Gianni Bosi

Lezioni di Tecnica delle Assicurazioni contro i Danni

Indice

pag.

1 Processi di Arrivo dei Sinistri **3**
1.1 Distribuzione di Poisson 3
1.2 Mistura di distribuzioni di Poisson 5
1.3 Processi di Arrivo di Poisson 8
1.4 Processi di Poisson omogenei 12
1.5 Proprietà markoviana del processo di Poisson 14
1.6 Relazione tra processi di Poisson omogenei e non omogenei . . 15
1.7 Il processo di Poisson omogeneo come un processo di rinnovamento 16
1.8 Processi mistura di processi di Poisson omogenei 17

Bibliografia **19**

CAPITOLO 1

Processi di Arrivo dei Sinistri

1.1 Distribuzione di Poisson

Da ora in avanti indicheremo con N (piú in generale con $N(t)$, dove t è un numero reale maggiore o ugale a zero) una *variabile aleatoria di conta*, quindi a determinazioni nell'insieme dei *numeri naturali* $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$, chiamata a rappresentare, ad esempio e per quanto ci interessa specificamente, il numero di sinistri in un certo periodo (rispettivamente, fino all'istante t compreso).

Definition 1.1.1 (distribuzione di Poisson). Una v.a. di conta ha una *distribuzione di Poisson*[(a)] di parametro $\lambda > 0$ se risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \tag{1.1.1}$$

Scriveremo in questo caso $N \sim Poisson(\lambda)$.

[(a)] Siméon-Denis Poisson (Pithiviers, Loiret, 1781 - Parigi 1840) presentò contributi nei piú svariati campi della fisica matematica.

Proposition 1.1.2. *Sia N una v.a. di conta, $N \sim Poisson(\lambda)$. Risulta allora*

$$\mathbb{E}[N] = Var[N] = \lambda. \tag{1.1.2}$$

Dimostrazione Ricordiamo che, risultando ovviamente, dallo sviluppo di Taylor McLaurin di $f(\lambda) = e^{\lambda}$ con punto iniziale $\lambda_0 = 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda},$$

si ha

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} \lambda = \lambda.$$

Per calcolare $Var[N]$ ricordiamo la relazione notevole, sempre valida qualunque sia la v.a. che si consideri,

$$Var[N] = \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}^2[N] = \mathbb{E}[N(N-1) + N] - \mathbb{E}^2[N].$$

Dedichiamoci al solo calcolo di $\mathbb{E}[N(N-1)]$, avendo già stabilto che $\mathbb{E}[N] = \lambda$. Risulta

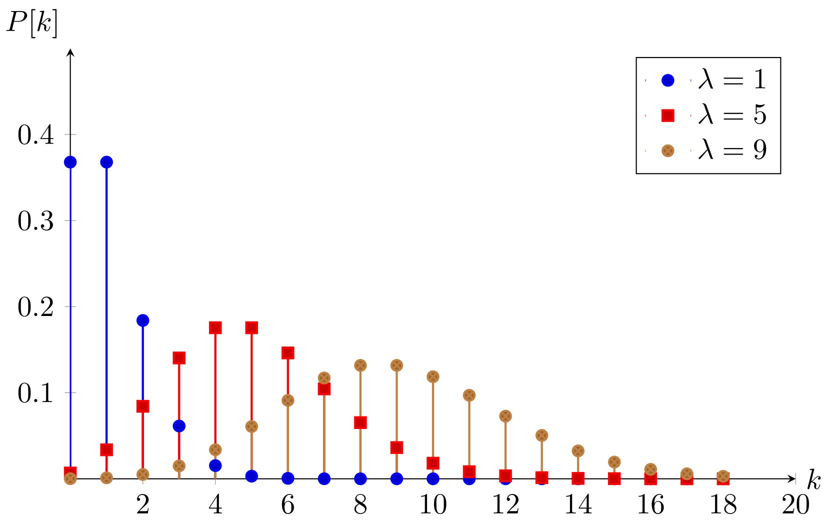
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(N-1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2. \end{aligned}$$

In definitiva avremo quindi

$$Var[N] = \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}^2[N] = \mathbb{E}[N(N-1) + N] - \mathbb{E}^2[N] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Remark 1.1.3. Si noti che, se N è una v.a. di conta con distribuzione di Poisson, allora la sua distribuzione rimane assegnata una volta che lo sia la speranza matematica $\mathbb{E}[N]$, che risulta altresì uguale alla varianza $Var[N]$.



1.2 Mistura di distribuzioni di Poisson

Ricordiamo innanzitutto le seguenti *formule di decomposizione* (o *formule di disintegrabilità*) per la speranza matematica e per la varianza. Le relazioni hanno validità generale, anche se le dimostreremo in un caso particolare, d'interesse per noi, in vista anche della determinazione dei primi due momenti del cosiddetto *danno cumulato*. .

Proposition 1.2.1. *Siano X e N due variabili aleatorie: Allora valgono le seguenti proprietà:*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid N]]; \tag{1.2.1}$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[Var[X \mid N]] + Var[\mathbb{E}[X \mid N]]. \tag{1.2.2}$$

Dimostrazione Proviamo che vale la proprietà (1.2.1) limitandoci a considerare il caso in cui X sia assolutamente continua e N sia discreta con determinazioni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Risulta che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid N]] &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^{\infty} x d\, P(X \leq x \mid N = n) \\
&= \int_0^{\infty} x \sum_{n=0}^{\infty} p_n d\, P(X \leq x \mid N = n) = \int_0^{\infty} x dF(x) = \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

Passando ora alla proprietà (1.2.2), risulta che

$$\begin{aligned}
Var[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2 \mid N]] - \mathbb{E}^2[\mathbb{E}[X \mid N]] \\
&= \mathbb{E}[Var[X \mid N] + \mathbb{E}^2[X \mid N]] - \mathbb{E}^2[\mathbb{E}[X \mid N]] \\
&= \mathbb{E}[Var[X \mid N]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}^2[X \mid N] - \mathbb{E}^2[\mathbb{E}[X \mid N]]] \\
&= \mathbb{E}[Var[X \mid N]] + Var[\mathbb{E}[X \mid N]].
\end{aligned}$$

□

Nel caso più generale in cui, nella distribuzione di Poisson, il parametro λ sia inteso come la determinazione di una variabile aleatoria Λ, allora otteniamo una variabile aleatoria *mistura di distribuzioni di Poisson* (o di *Poisson composto*).
In questo caso, se $F(\lambda) = P(\Lambda \le \lambda)$ è la funzione di ripartizione di Λ, allora la distribuzione di N si determina, ovviamente, nel modo seguente:

$$P(N = n) = \int_0^\infty P(N = n \mid \Lambda = \lambda) dF(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dF(\lambda) \qquad (1.2.3)$$

La speranza matematica e rispettivamente la varianza of N possono essere determinate usando le formule di decomposizione (1.2.1) and (1.2.2), arrivando quindi alle seguenti espressioni:

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N \mid \Lambda] = \mathbb{E}[\Lambda], \qquad (1.2.4)$$

$$Var[N] = \mathbb{E}[Var[N \mid \Lambda] + Var[\mathbb{E}[N \mid \Lambda] = \mathbb{E}[\Lambda] + Var[\Lambda] \ge \mathbb{E}[N]. \qquad (1.2.5)$$

Una tipica distribuzione per Λ è rappresentata dalla *distribuzione gamma* di parametri generici α, ρ ($\Lambda \sim Gamma(\alpha, \rho)$), caratterizzata da una funzione di densità

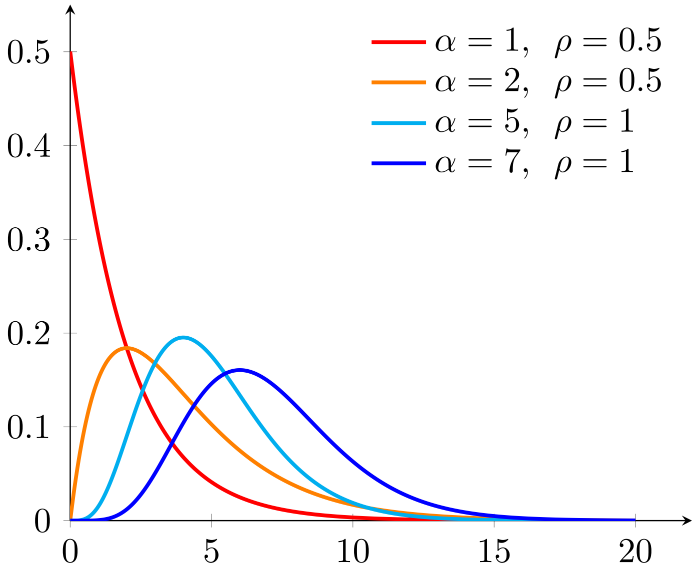
$$f(\lambda) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\rho\lambda}, \qquad (1.2.6)$$

dove Γ è la *funzione Gamma di Eulero*, vale a dire

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Incidentalmente, ricordiamo che $\Gamma(n) = (n-1)!$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
La speranza matematica e la varianza di una variabile aleatoria $\Lambda \sim Gamma(\alpha, \rho)$ sono determinate nel modo seguente:

$$\mathbb{E}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\rho}, \quad Var[\Lambda] = \frac{\alpha}{\rho^2}. \qquad (1.2.7)$$



Quindi, se il numero aleatorio di sinistri N ha una *distribuzione di Poisson composto* di *parametro* $\Lambda \sim gamma(\alpha, \rho)$, allora dalle espressioni (1.2.4) and (1.2.5) si arriva a

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\alpha}{\rho}, \quad Var[N] = \frac{\alpha}{\rho}(1 + \frac{1}{\rho}). \tag{1.2.8}$$

Osserviamo ancora che in questo caso, vale dire quando si tratti una distribuzione di Poisson composto con distribuzione misturante gamma, risulta, per $n = 0, 1, 2, ...$,

$$\begin{aligned} p_n &= P(N = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\rho\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{n!\Gamma(\alpha)} \frac{\rho^\alpha}{(\rho+1)^{\alpha+n}} = \frac{(\alpha)_n}{n!} \left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\rho+1}\right)^n, \end{aligned}$$

dove $(\alpha)_n$ è il cosiddetto *simbolo di Pochkammer*,cioè

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)...(\alpha + n - 1).$$

La distribuzione che si ricava, vale a dire la

$$p_n = \binom{\alpha + n - 1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\rho+1}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.2.9}$$

è la *distribuzione binomiale negativa.*
Ricordiamo ancora che una distribuzione binomiale negativa di parametri b and p ($b > 0$, $0 < p < 1$) è tale che

$$p_n = P(N = n) = \frac{(b)_n}{n!} p^b (1 - p)^n,$$

ed in questo caso

$$\mathbb{E}[N] = b\frac{1-p}{p}, \quad Var[N] = b\frac{1-p}{p^2}.$$

Un'altra distribuzione largamente usata per una variabile aleatoria non negativa Λ è la *distribuzione esponenziale* di parametro $\rho > 0$ ($\Lambda \sim esp(\rho)$), caratterizzata da una funzione di densità

$$f(\lambda) = \rho e^{-\rho\lambda}. \tag{1.2.10}$$

Ognuno riconosce che la distribuzione $esp(\rho)$ coincide con una distribuzione $gamma(1, \rho)$. Quindi, la speranza matematica e la varianza di una variabile aleatoria $\Lambda \sim esp(\rho)$ sono determinate nel modo seguente:

$$\mathbb{E}[\lambda] = \frac{1}{\rho}, \quad Var[\Lambda] = \frac{1}{\rho^2}. \tag{1.2.11}$$

In quest'ultimo caso, the speranza matematica e la varianza del numero aleatorio di sinistri sono quindi

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{\rho}, \quad Var[N] = \frac{1}{\rho}(1 + \frac{1}{\rho}). \tag{1.2.12}$$

1.3 Processi di Arrivo di Poisson

Definition 1.3.1 (incremento di una funzione). Per comodità di scrittura, se f è una funzione reale definita su $[0, \infty[$, allora indicheremo con $f]s, t]$ il cosiddetto *incremento* di f relativo all'intervallo $[s, t]$ (per ogni scelta dei numeri reali s e t con $0 \leq s < t$).

Definition 1.3.2 (processi di conta ad incrementi indipendenti e rispettivamente stazionari). Un *processo di conta* (o *processo di arrivo*) $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice essere

1. *un processo ad incrementi indipendenti*, se, per ogni numero intero positivo $n \in \mathbb{N}^+$, e per ogni scelta di $2n > 0$ numeri

$$0 =\leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq ... \leq s_n < t_n \,,$$

gli incrementi $N]s_i, t_i]$ $(i = 1, ..., n)$ sono variabili aleatorie indipendenti;

2. *un processo ad incrementi stazionari*, se, per ogni scelta di due numeri reali $0 \leq s < t$, la distribuzione della variabile aleatoria $N]s, t]$ dipende da s e t esclusivamente attraverso la differenza $t - s$.

Si noti che, forse in termini più espliciti, un processo di conta $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ è ad incrementi stazionari se la distribuzione di $N]t_1, s_1]$ risulta uguale alla distribuzione di $N]t_2, s_2]$ non appena risulti $t_1 - s_1 = t_2 - s_2$.

Passiamo alla definizione di *Processo di Poisson*.

Definition 1.3.3 (processi di Poisoon)**.** Un processo stocastico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice un *processo di Poisson* se valgono le seguenti condizioni:

1. Il processo inizia nell'istante $t = 0$ (vale a dire $N(0) = 0$ con probabilità 1, o equivalentemente *quasi certamente*) ;
2. Il processo ha incrementi indipendenti;
3. Esiste una funzione continua a destra $\mu : [0, +\infty[\Rightarrow [0, +\infty[$ con $\mu(0) = 0$, detta *funzione valor medio*, tale che gli incrementi $N]s, t]$ del processo hanno una distribuzione di Poisson di parametro $\mu]s, t]$ ($N]s, t] \sim Poisson(\mu]s, t])$ per ogni scelta di s e t tali che $0 \leq s < t < +\infty$);
4. Con probabilità 1, le traiettorie $\{N(t, \omega)\}_{t\geq 0}$ sono continue a destra per $t \geq 0$ e hanno limiti finiti a sinistra per $t > 0$. Si dice in questo caso che il processo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ ha traiettorie di tipo *cádlág* (*continue à droite limites à gauche*).

Remark 1.3.4. Un'ovvia conseguenza della definizione precedente è che, risultando $N(0) = 0$ quasi certamente,

$$N(t) = Nt) - N(0) \sim Poisson(\mu(t) - \mu(0)) = Poisson(\mu(t)).$$

Risulta quindi che, per ogni $t > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

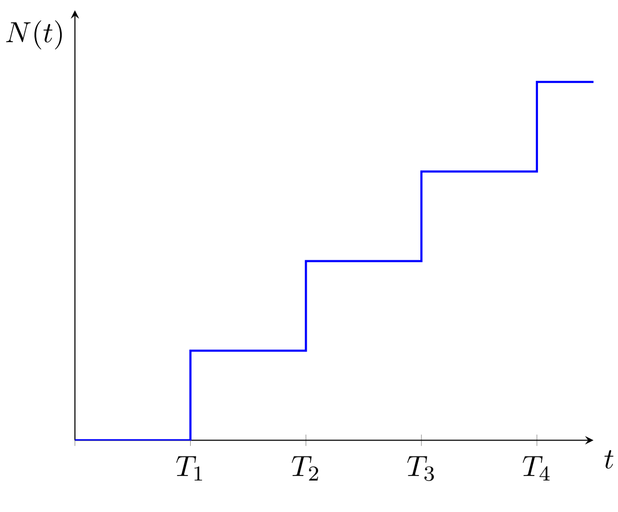
$$P(N(t) = n) = e^{-\mu(t)} \frac{\mu(t)^n}{n!}. \tag{1.3.1}$$

Remark 1.3.5. La *legge temporale* di un processo di Poisson, intese come l'insieme delle distribuzioni congiunte di un numero finito di variabili aleatorie del processo, risulta facilmente determinabile, dal momento che in virtù dell'indipendenza degli incrementi, che peraltro hanno distribuzione di Poisson come decritto sopra, si ha che, per ogni numero intero positivo n, per ogni scelta di n punti (numeri) $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, e per ogni scelta di n numeri interi non negativi i_1, i_2, ..., i_n, risulta

$$P(N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, ..., N(t_n) = i_n) =$$

$$P(N(t_1) = i_1, N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1, ..., N(t_n) - N(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1})$$

$$= e^{-\mu(t_1)} \frac{\mu(t_1)^{n_1}}{i_1!} t e^{-\mu]t_1,t_2]} \frac{\mu]t_1, t_2]^{i_2-i_1}}{(i_2 - i_1)!} ... e^{-\mu]t_{n-1},t_n]} \frac{\mu]t_{n-1}, t_n]^{i_n - i_{n-1}}}{(i_n - i_{n-1})!}$$



1.4 Processi di Poisson omogenei

Definition 1.4.1 (processi di Poisson omogenei)**.** Un processo stocastico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice un *processo di Poisson omogeneo* se $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson la cui funzione valor medio μ sia lineare, vale a dire risulti $\mu(t) = \lambda t$ $(t \geq 0)$ per qualche numero reale positivo λ. Si dice in questo caso che λ è la *intensità* del processo.

Più in generale, si dice che il processo di Poisson $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ ha una *funzione d'intensità* λ se la funzione valor medio μ è assolutamente continua, nel senso che, per ogni $0 \leq s < t$, l'incremento $\mu]s,t]$ ha una rappresentazione della forma

$$\mu]s,t] = \int_s^t \lambda(y)dy,$$

per qualche funzione non negativa λ In questo caso, μ risulta essere continua.

Remark 1.4.2. Un processo di Poisson omogeneo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ è ad incrementi stazionari, dal momento che $N]s,t] \sim \mathit{Poisson}(\lambda(t-s))$ per ogni $0 \leq s < t$.

Si noti che la funzione valor medio μ, nel caso generale di un processo di Poisson non necessariamente omogenoeo, ha il significato di *tempo operativo* o *orologio interno*, in quanto determina la grandezza degli incremento $N]s,t]$. Nel caso di un processo di Poisson omogeneo, l'evoluzione di detto tempo operativo avviene linearmente, vale a dire $\mu]s,t] = \mu]s+h, t+h]$ per ogni $h > 0$ e per ogni $0 \leq s < t$. Intuitivamente, ciò significa che i sinistri avvengono in maniera grosso modo uniforme nel tempo.

Possiamo definire un processo di Poisson omogeneo nel modo seguente.

Definition 1.4.3 (processi di Poisson omogeneo)**.** Un processo stocastico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice un *processo di Poisson omogeneo* di intensità $\lambda > 0$ se valgono le seguenti condizioni:

1. Il processo inizia nell'istante $t = 0$ (vale a dire $N(0) = 0$ con probabilità 1, o equivalentemente *quasi certamente*) ;
2. Il processo ha incrementi indipendenti e stazionari;
3. Gli incrementi $N]s, t]$ del processo hanno una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(t - s)$ ($N]s, t] \sim Poisson(\lambda(t - s))$ per ogni scelta di s e t tali che $0 \leq s < t < +\infty$);
4. Con probabilità 1, le traiettorie $\{N(t, \omega)\}_{t\geq 0}$ sono continue a destra per $t \geq 0$ e hanno limiti finiti a sinistra per $t > 0$. Si dice in questo caso che il processo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ ha traiettorie di tipo *cádlág* (*continue à droite limites à gauche*).

Proposition 1.4.4. *Se $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson omogeneo di intensità $\lambda > 0$, allora riesce, per ogni $t > 0$ e $\Delta t > 0$,*

1. $P(N]t, t + \Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, *con* $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$;

2. $P(N]t, t + \Delta t) = \geq 2) = o(\Delta t)$, *con* $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$;

Dimostrazione. Per dimostrare la proprietà 1., si noti che

$$P(N]t, t + \Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t + \lambda \Delta t (e^{-\lambda \Delta t} - 1).$$

Posto $o(\Delta t) = \lambda \Delta t (e^{-\lambda \Delta t} - 1)$, risulta $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$
Per dimostrare la proprietà 2, si osservi che

$$P(N]t, t + \Delta t) \geq 2) = 1 - P(N]t, t + \Delta t) = 0) - P(N]t, t + \Delta t) = 1) =$$
$$1 - e^{-\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t - o_1(\Delta t),$$

dove si è sfruttata la proprietà precedente per esprimere $P(N]t, t + \Delta t) = 1)$.
Posto $o(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t - o_1(\Delta t)$, risulta $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$ □

1.5 Proprietà markoviana del processo di Poisson

Presentiamo la definizione di *processo Markoviano* riferita ad un processo di conta $\{N(t)\}_{t\geq 0}$.

Definition 1.5.1 (processo markoviano di conta)**.** Un processo di conta $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice *processo di Markov* se per ogni sequenza finita di istanti $o < t_1 < t_2 < ... < t_n$ e per ogni sequenza non decrescente finita di numeri naturali $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n$ risulta

$$P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}, ..., N(t_1) = i_1) =$$
$$P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}).$$

In conseguenza dell'indipendenza degli incrementi in un processo di Poisson, si prova che vale la seguente proprietà.

Proposition 1.5.2. *Sia $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson. Allora $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ è un processo di conta di Markov.*

Dimostrazione. Riesce

$$P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}, ..., N(t_1) = i_1) =$$
$$\frac{P(N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, ..., N(t_n) = i_n)}{P(N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, ..., N(t_{n-1}) = i_{n-1})} =$$
$$\frac{e^{-\mu(t_1)} \frac{\mu(t_1)^{n_1}}{i_1!} e^{-\mu]t_1,t_2]} \frac{\mu]t_1,t_2]^{i_2-i_1}}{(i_2-i_1)!} ... e^{-\mu]t_{n-1},t_n]} \frac{\mu]t_{n-1},t_n]^{i_n-i_{n-1}}}{(i_n-i_{n-1})!}}{e^{-\mu(t_1)} \frac{\mu(t_1)^{n_1}}{i_1!} e^{-\mu]t_1,t_2]} \frac{\mu]t_1,t_2]^{i_2-i_1}}{(i_2-i_1)!} ... e^{-\mu]t_{n-2},t_{n-1}]} \frac{\mu]t_{n-2},t_{n-1}]^{i_{n-1}-i_{n-2}}}{(i_{n-1}-i_{n-2})!}} =$$
$$e^{-\mu]t_{n-1},t_n]} \frac{\mu]t_{n-1}, t_n]^{i_n-i_{n-1}}}{(i_n - i_{n-1})!} = P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1} = i_{n-1}).$$

□

Definition 1.5.3 (probabilità di transizione)**.** In un processo di conta di Markov $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, le quantità

$$p_{k,k+h}(s, t) = P(N(t) = k + h \mid N(s) = k)$$

sono dette *probabilità di transizione*.

A partire dalle probabilità di transizione, si definiscono le intensità di transizione In un processo di conta di Markov.

Definition 1.5.4 (intensità di transizione)**.** In un processo di conta di Markov $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, le quantità

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \lim_{u\to 0^+} \frac{p_{k,k+h}(t,t+u)}{u}$$

sono dette *intensità di transizione.*

Proposition 1.5.5. *Sia* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *un processo di Poisson con un'intensità continua* λ *su* $[0,+\infty[$. *Risulta allora, per ogni* $k \geq 0$,

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & se\ h = 1 \\ 0 & se\ h > 1 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \lim_{u\to 0^+} \frac{p_{k,k+h}(t,t+u)}{u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{e^{-\int_t^{t+u}\lambda(y)dy}}{h!} \frac{\left(\int_t^{t+u}\lambda(y)dy\right)^h}{u},$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Un ovvio corollario riguarda il caso di un processo di Poisson omogeneo.

Corollary 1.5.6. *Sia* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *un processo di Poisson omogeneo con un'intensità* λ. *Risulta allora, per ogni* $k \geq 0$,

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \begin{cases} \lambda & se\ h = 1 \\ 0 & se\ h > 1 \end{cases}.$$

1.6 Relazione tra processi di Poisson omogenei e non omogenei

La relazione tra processi di Poisson omogenei e non omogenei è descritta dalla seguente proposizione.

Proposition 1.6.1. *Sia μ la funzione valor medio di un processo di Poisson $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, e sia $\{\widetilde{N}(t)\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson omogeneo. Allora*

1. *Il processo $\{\hat{N}(t)\}_{t\geq 0}$ definito dalle*

$$\hat{N}(t) = \widetilde{N}(\mu(t)), t \geq 0$$

è un processo di Poisson con funzione valor medio μ;

2. *Se μ è continua, crescente e $\lim_{t\to+\infty} \mu(t) = +\infty$, allora $\{N(\mu^{-1}(t))\}_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson omogeneo.*

1.7 Il processo di Poisson omogeneo come un processo di rinnovamento

Si può studiare la successione $0 \leq T_1 < T_2 < ... < T_n < T_{n+1} < ...$ dei *tempi di arrivo* (intesi come istanti in cui avvengono i sinistri) in un processo di Poisson $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ di intensità $\lambda > 0$, a cui è associata la successione $\{W_n\}_{n\geq 1}$ degli *intertempi*, con $W_1 = T_1$, $W_2 = T_2 - T_1$, e in generale $W_n = T_n - T_{n-1}$.
Presentiamo prima la definizione di *processo di conta di rinnovamento*. Indicheremo con $\#A$ la *cardinalità* (vale a dire il numero di elementi) di un insieme A.

Definition 1.7.1 (processo di conta di rinnovamento)**.** Un processo stocastico di conta $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice un *processo di rinnovamento (di conta)* se, per ogni $t \geq 0$,

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \tag{1.7.1}$$

dove, per ogni $n \geq 1$,

$$T_n = W_1 + ... + W_n \tag{1.7.2}$$

e $\{W_n\}_{n\geq 1}$ è una sequenza di variabili aleatorie *indipendenti e identicamente distribuite* (*i.i.d.*).

Si può dimostrare il seguente teorema.

Theorem 1.7.2 (il processo di Poisson omogeneo di rinnovamento)**.** *Valgono le seguenti asserzioni.*

1. *Il processo di conta di rinnovamento* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *definito dalle relazioni (1.7.1) e (1.7.2) con una successione* $\{W_n\}_{n\geq 1}$ *di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale esp*(λ) $(\lambda > 0)$ *costituisce un processo di Poisson omogeneo con intensità* λ*.*

2. *Se* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *è un processo di Poisson omogeneo con intensità* $\lambda > 0$*, allora le variabili aleatorie* $N(t)$ *hanno la rappresentazione (1.7.1) e le variabili aleatorie* T_n *hanno la rappresentazione (1.7.2) per una successione* $\{W_n\}_{n\geq 1}$ *di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale esp*(λ)*.*

1.8 Processi mistura di processi di Poisson omogenei

Definition 1.8.1 (processo mistura di poissoniani)**.** Un processo di conta $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ si dice *processo mistura di processi di Poisson omogenei* se, per ogni $t \geq 0$, riesce

$$p_n(t) = P(N(t) = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dF_\Lambda(\lambda), \tag{1.8.1}$$

dove F_Λ è la funzione di ripartizione dell'intensità Λ, pensata come variabile aleatoria ($F_\Lambda(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$, $F_\Lambda(0) = 0$).

Remark 1.8.2. I processi mistura di processi poissoniani omogenei sono ad incrementi stazionari, risultando

$$P(N]s,t] = n) = \int_0^\infty P(N]s,t] = n \mid \Lambda = \lambda) dF_\Lambda(\lambda) =$$
$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} dF_\Lambda(\lambda),$$

espressione che dipende dagli istanti s e t solo attraverso la differenza $t - s$.

D'altra parte, un processo siffatto è ad incrementi dipendenti, risultando

$$P(N]s,t] = n \mid N(s) = m) =$$
$$\int_0^\infty P(N]s,t] = n \mid N(s) = m, \Lambda = \lambda) dF_{\Lambda|N(s)=m}(\lambda) =$$
$$\int_0^\infty P(N]s,t] = n \mid \Lambda = \lambda) dF_{\Lambda|N(s)=m}(\lambda),$$

espressione che evidentemente dipende da m.

Come abbiamo visto in precedenza, una tipica distribuzione per Λ è la $Gamma(\alpha, \rho)$ (si veda (1.2.6)). In qusto caso si perviene, analobgamente a (1.2.9), ad distribuzione binomiale negativa per $N(t)$, vale a dire alla

$$p_n(t) = P(N(t) = n) = \binom{\alpha + n - 1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho + t}\right)^\alpha \left(\frac{t}{\rho + t}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.8.2}$$

Bibliografia

[1] L. Daboni, Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni, Edizioni Lint, Trieste, 1989.

[2] P. Embrechts, C. Klüpperberg, T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, 1997.

[3] M. Käärik, Non-Life Insurance Mathematics, E-kursuse, 2013.

[4] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene and M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2008.

[5] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics, Universitext, Springer, 2009.