UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura



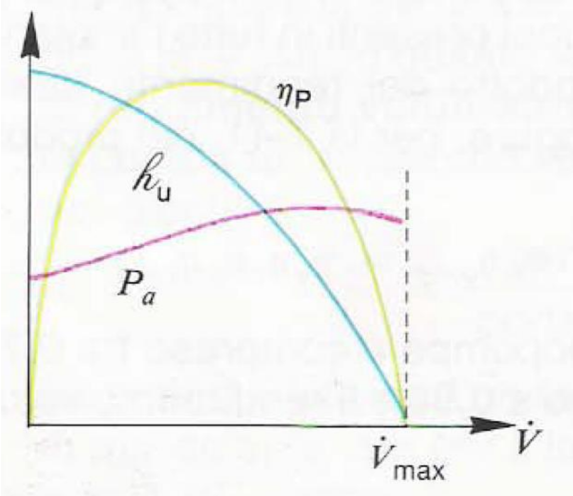


Corso di MACCHINE [065IN]
Corso di MACCHINE MARINE [100IN]

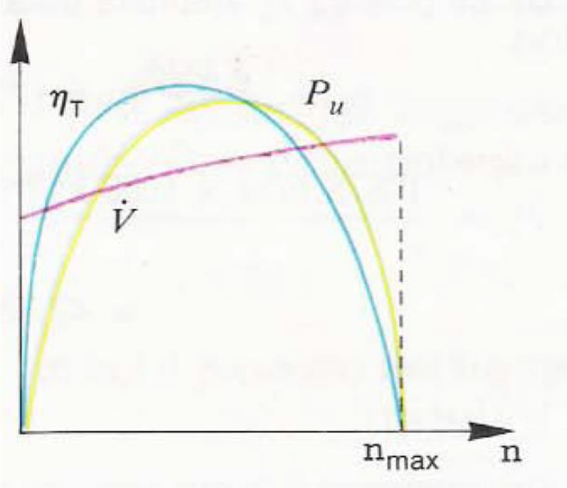
Prof. Rodolfo Taccani
Prof. Lucia Parussini
Prof. Marco Bogar

A.A. 2023-2024

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine



Curve caratteristiche di una pompa.



Curve caratteristiche di una turbina.

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Adimensionalizzare: trasformare le variabili del problema in grandezze prive di dimensioni dividendole per opportuni fattori di scala.

Analisi dimensionale: tecnica che consente di individuare le dipendenze funzionali dei fenomeni da variabili fisiche e geometriche basandosi su considerazioni di OMOGENEITA' DIMENSIONALE.

Se una equazione esprime una corretta relazione tra le variabili di un processo fisico allora sarà dimensionalmente omogenea, cioè ciascun termine additivo avrà le medesime dimensioni.

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Analisi dimensionale

Vantaggi:

- relazioni più semplici con minor numero di parametri
- compattazione degli ordini di grandezza
- valutazione dell'importanza dei termini all'interno delle equazioni
- leggi di scala, quindi maggiore universalità delle leggi ottenute
- nelle sperimentazione: riduzione del numero di parametri da variare, riduzione del numero di esperimenti da fare, possibilità di fare esperimenti significativi in scala ridotta

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Similitudine fluidodinamica

Se una turbomacchina A e una turbomacchina B sono:

- geometricamente simili: uguali angoli delle pale e rapporti principali delle dimensioni della turbomacchina
- cinematicamente simili: triangoli di velocità simili
- dinamicamente simili: uguale regime di moto (stesso numero di Reynolds riferito al diametro massimo D della girante e stessa rugosità relativa dei passaggi interni alla macchina)

allora avranno le stesse caratteristiche fluidodinamiche e in particolare gli stessi rendimenti $\eta_A = \eta_B$ (facciamo l'ipotesi che η_o e η_v si conservino inalterati nelle due turbomacchine, in modo che il rendimento totale e quello idraulico siano intercambiabili).

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Coefficienti adimensionali

Coefficiente di portata

$$\varphi = \frac{Q}{nD^3}$$

$$(definizione\ alternativa\ \varphi = \frac{c_m}{u} = \frac{c_m D^2}{uD^2} \sim \frac{Q}{nD^3})$$

Coefficiente di pressione o di lavoro

$$\psi = \frac{l}{n^2 D^2} = \frac{gh}{n^2 D^2}$$

$$(\ definizione\ alternativa\ \psi = \frac{l}{u^2} = \frac{gh}{u^2})$$

Rapporto di velocità periferica

$$k_p = \frac{u}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2\psi}}$$

Coefficiente di potenza

$$\Pi = \frac{P}{\rho n^3 D^5}$$

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Due turbomacchine della stessa famiglia soddisfano contemporaneamente

$$\varphi_A = \varphi_B$$
$$\psi_A = \psi_B$$
$$\Pi_A = \Pi_B$$

Regole di similitudine

$$\frac{Q_A}{n_A D_A^3} = \frac{Q_B}{n_B D_B^3} \qquad \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n_A}{n_B}\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^3$$

$$\frac{l_A}{n_A^2 D_A^2} = \frac{l_B}{n_B^2 D_B^2} \qquad \frac{l_A}{l_B} = \left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2 \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2$$

$$\frac{P_A}{\rho_A n_A^3 D_A^5} = \frac{P_B}{\rho_B n_B^3 D_B^5} \qquad \frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B}\left(\frac{n_A}{n_B}\right)^3 \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^5$$

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

ESEMPIO:

Pompa centrifuga A

$$D_A = 600 \text{ mm}$$
$$n_A = 12.5 \frac{\text{giri}}{\text{s}} = 750 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

Q_A	h_A	η_A
0.0	40.0	0.00
0.1	40.4	0.40
0.2	40.6	0.57
0.3	40.0	0.69
0.4	38.7	0.78
0.5	36.0	0.83
0.6	32.0	0.83
0.7	25.6	0.75
0.8	16.0	0.53
0.9	4.0	0.15
0.93	0.0	0.00

Pompa centrifuga B

$$D_B = 450 \text{ mm}$$
$$n_B = 20 \frac{\text{giri}}{\text{s}} = 1200 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

Le turbomachine A e B sono della stessa famiglia.

- Ricavare le caratteristiche della pompa B.
- Calcolare i coefficienti adimensionali di portata e di pressione delle due pompe.

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

<u>ESEMPIO</u>:

Utilizzando le relazioni per turbomachine della stessa famiglia:

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n_A}{n_B}\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^3$$

$$\frac{l_A}{l_B} = \frac{gh_A}{gh_B} = \frac{h_A}{h_B} = \left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2$$

Pompa centrifuga A

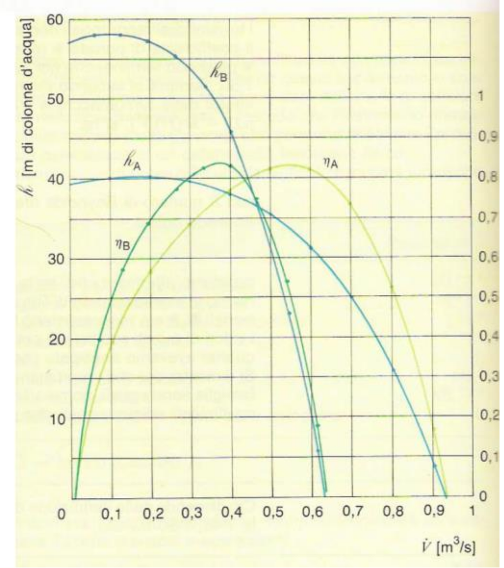
$$D_A = 600\ \mathrm{mm}$$
$$n_A = 12.5\,\frac{\mathrm{giri}}{\mathrm{s}} = 750\,\frac{\mathrm{giri}}{\mathrm{min}}$$

Q_A	h_A	η_A
0.0	40.0	0.00
0.1	40.4	0.40
0.2	40.6	0.57
0.3	40.0	0.69
0.4	38.7	0.78
0.5	36.0	0.83
0.6	32.0	0.83
0.7	25.6	0.75
0.8	16.0	0.53
0.9	4.0	0.15
0.93	0.0	0.00

Pompa centrifuga B

$$D_B = 450\ \mathrm{mm}$$
$$n_B = 20\,\frac{\mathrm{giri}}{\mathrm{s}} = 1200\,\frac{\mathrm{giri}}{\mathrm{min}}$$

Q_B	h_B	η_B
0.0	57.6	0.00
0.07	58.2	0.40
0.135	58.5	0.57
0.20	57.6	0.69
0.27	55.7	0.78
0.34	51.8	0.83
0.405	46.1	0.83
0.47	36.9	0.75
0.54	23.0	0.53
0.61	5.8	0.15
0.63	0.0	0.00



Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

ESEMPIO:

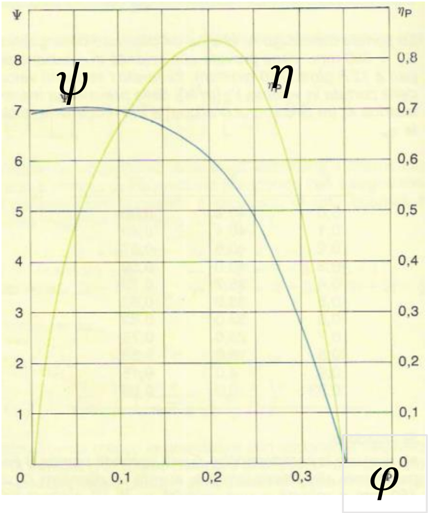
$$\varphi = \frac{Q}{nD^3}$$

$$\psi = \frac{l}{n^2 D^2} = \frac{gh}{n^2 D^2}$$

$$\varphi_A = \varphi_B \qquad \varphi_A = \frac{Q_A}{n_A {D_A}^3} \qquad \varphi_B = \frac{Q_B}{n_B {D_B}^3}$$

$$\psi_A = \psi_B \qquad \psi_A = \frac{gh_A}{{n_A}^2 {D_A}^2} \qquad \psi_B = \frac{gh_B}{{n_B}^2 {D_B}^2}$$

φ	ψ	η
0.0	6.96	0.00
0.037	7.03	0.40
0.074	7.06	0.57
0.111	6.96	0.69
0.148	6.73	0.78
0.185	6.26	0.83
0.222	5.57	0.83
0.259	4.45	0.75
0.296	2.78	0.53
0.333	0.70	0.15
0.344	0.0	0.00



Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Per studiare il comportamento di una turbomacchina possiamo scrivere una funzione di una serie di grandezze che ne determinano il comportamento:

$$f\left(D_i, l_j, \dot{m}, \omega, L_{id}, \mu, a_{01}, \rho_{01}\right) = 0$$

D_i diametri
l_j lunghezze
$\dot{m}$ portata di massa
ω velocità angolare della macchina
L_{id} quantità di energia scambiata tra macchina e fluido (lavoro ideale scambiato per unità di massa di fluido)
μ viscosità dinamica del fluido
a_{01} velocità del suono del fluido
ρ_{01} densità del fluido

Teorema di Buckingham

L'analisi dimensionale è basata sul teorema del π, o di Buckingham, che può essere così enunciato: la formulazione analitica di una relazione che correla n parametri fisici tramite una equazione dimensionalmente omogenea rispetto a m grandezze fondamentali, può esser espressa come legame tra $(n - m)$ gruppi adimensionali π.

Teorema di Buckingham

L'analisi dimensionale è basata sul teorema del π, o di Buckingham, che può essere così enunciato: la formulazione analitica di una relazione che correla n parametri fisici tramite una equazione dimensionalmente omogenea rispetto a m grandezze fondamentali, può esser espressa come legame tra $(n-m)$ gruppi adimensionali π.

Applicazione allo studio delle prestazioni delle turbomacchine:

$D_i, l_j, \dot{m}, \omega, L_{id}, \mu, a_{01}, \rho_{01}$ sono n parametri fisici
$f\left(D_i, l_j, \dot{m}, \omega, L_{id}, \mu, a_{01}, \rho_{01}\right) = 0$ è dimensionalmente omogenea rispetto alle tre grandezze fondamentali L, T, M, per cui $m = 3$
Si scelgono quali tre grandezze fondamentali: il diametro massimo della girante D, la velocità angolare ω e la densità del fluido nelle condizioni prefissate ρ_{01}.

Adimensionalizzazione dei diametri

$$\pi_{D_i} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) D_i$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+1} T^{-y} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 1 = 0 \\ T: -y = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{D_i} = \frac{D_i}{D}$$

Adimensionalizzazione delle lunghezze

$$\pi_{l_j} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) l_j$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+1} T^{-y} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 1 = 0 \\ T: -y = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{l_j} = \frac{l_j}{D}$$

Adimensionalizzazione della portata di massa

$$\varphi = (D^x \omega^y \rho_{01}^z)\dot{m}$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (ML^{-3})^z) M T^{-1}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z} T^{-y-1} M^{z+1}$$

$$\begin{cases} L: x - 3z = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \\ M: z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \omega D^3}$$

CIFRA DI FLUSSO

Adimensionalizzazione del lavoro unitario

$$\psi = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) L_{id}$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L^2 T^{-2}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+2} T^{-y-2} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 2 = 0 \\ T: -y - 2 = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\psi = \frac{L_{id}}{\omega^2 D^2}$$

CIFRA DI PRESSIONE

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Adimensionalizzazione della viscosità

$$\frac{1}{Re} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z)\mu$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (ML^{-3})^z) ML^{-1} T^{-1}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z-1} T^{-y-1} M^{z+1}$$

$$\begin{cases} L: x - 3z - 1 = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \\ M: z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$Re = \frac{\rho_{01} \omega D^2}{\mu}$$

NUMERO DI REYNOLDS

Adimensionalizzazione della velocità del suono

$$\frac{1}{Ma} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) a_{01}$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L T^{-1}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+1} T^{-y-1} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 1 = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Ma = \frac{\omega D}{a_{01}}$$

NUMERO DI MACH PALARE

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Per studiare il comportamento di una turbomacchina possiamo scrivere il nuovo legame funzionale:

$$g\left(\pi_{D_i}, \pi_{l_j}, \varphi, \psi, Re, Ma\right) = 0$$

condizioni di similitudine

Due turbomacchine sono simili se hanno lo stesso valore di tutti i parametri adimensionali

Se le machine sono geometricamente simili hanno lo stesso valore di π_{D_i}, π_{l_j}

Se Re è molto elevato questo potrà anche variare ma le prestazioni non ne saranno influenzate

$$\psi = g(\varphi, Ma)$$

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

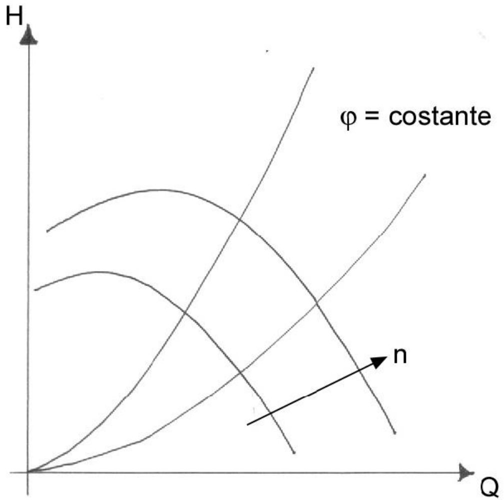
Macchine idrauliche

$$\psi = g(\varphi)$$

$$\varphi = \frac{Q}{\omega D^3} \propto \frac{c_m}{u}$$
$$\psi = \frac{L_{id}}{\omega^2 D^2} \propto \frac{c_u}{u}$$

Due macchine che operano in condizioni di similitudine hanno lo stesso valore di φ e ψ e quindi avranno lo stesso valore dei rapporti c_m/u e c_u/u. Allora si manterranno i valori degli angoli dei triangoli di velocità.

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine



Luoghi dei punti a φ costante sulla caratteristica manometrica

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

Velocità specifica o numero caratteristico

$$\omega_s = k = \omega \frac{\sqrt{Q}}{l^{3/4}} = 2\pi n \frac{\sqrt{Q}}{(gh)^{3/4}} = 2\pi n \frac{\sqrt{Q}}{(gh)^{0.75}} = 2\pi n_s$$

Per turbine idruliche, ma solo per queste, si fa talvolta riferimento alla potenza utile

$$\omega_s = k = \omega \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\rho} l^{5/4}} = 2\pi n \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\rho}(gh)^{1.25}}$$

Diametro specifico

$$D_s = D \frac{l^{1/4}}{\sqrt{Q}} = D \frac{(gh)^{1/4}}{\sqrt{Q}} = D \frac{(gh)^{0.25}}{\sqrt{Q}}$$

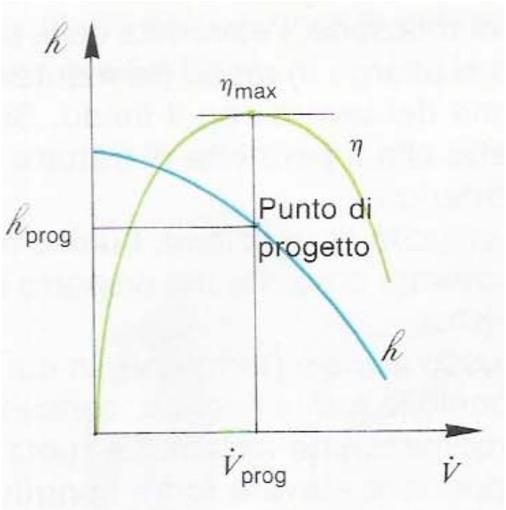
ESEMPIO:

Consideriamo una pompa centrifuga con $\mathrm{n} = 12.5\ \mathrm{giri}/s$ e $\mathrm{D} = 0.6\ \mathrm{m}$ avente il punto di progetto, per cui il rendimento raggiunge il suo valore massimo, in corrispondenza di una portata $\dot{V} = 0.55\ \mathrm{m}^3/s$ e di una prevalenza manometrica $h_u = 34\ \mathrm{m}$.

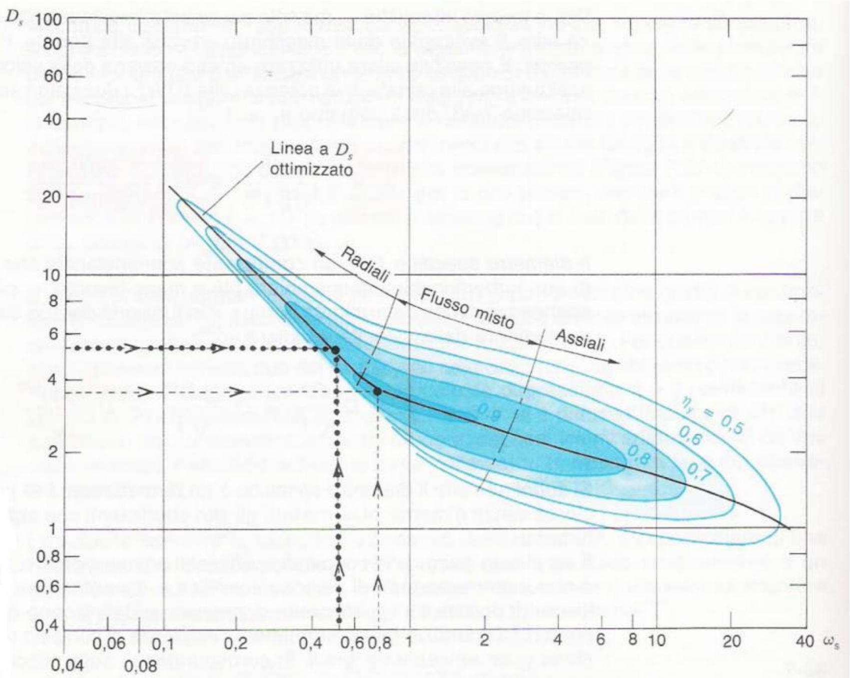
Calcoliamo la velocità specifica e il diametro specifico e rendimento in corrispondenza del punto di progetto:

$$\omega_s = 2\pi n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(gh)^{0.75}} = 0.75$$

$$D_s = D \frac{(gh)^{0.25}}{\sqrt{\dot{V}}} = 3.5$$



<u>ESEMPIO</u>:



$$\omega_s = 0.75$$
$$D_s = 3.5$$

Il rendimento idraulico nel punto di progetto sarà:

$$\eta_{y,max} > 0.9$$

Diagramma di Balje per pompe a un solo stadio con linee di uguale rendimento idraulico.

Richiami e complementi di similitudine delle turbomacchine

ESEMPIO:

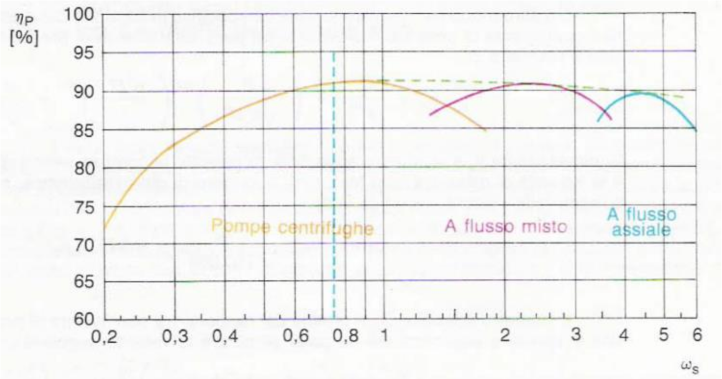
Per un nuovo punto di funzionamento fuori progetto con portata $\dot{V} = 0.3\ \mathrm{m}^3/s$ e prevalenza manometrica $h_u = 40\ \mathrm{m}$, si ha:

$$\omega_s = 2\pi n \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(gh)^{0.75}} = 0.5$$

$$D_s = D \frac{(gh)^{0.25}}{\sqrt{\dot{V}}} = 4.9 \approx 5$$

Dal diagramma di Balje :

$$\eta_y \approx 0.85$$



Rendimento in funzione di ω_s per pompe a un solo stadio.

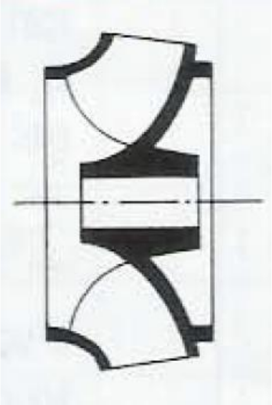
Relazione tra velocità specifica e forma della girante

lenta (flusso radiale)

basse velocità di rotazione e/o basse portate e/o lavoro massico elevato

$\omega_s = 0.2 \div 0.6$

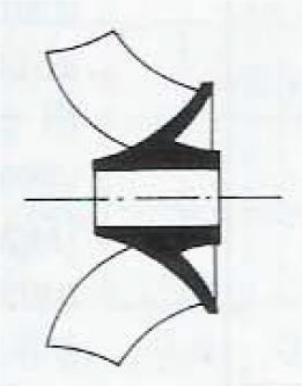
media (flusso radiale)



medie velocità di rotazione e/o medie portate e/o lavoro massico elevato

$\omega_s = 0.6 \div 1.2$

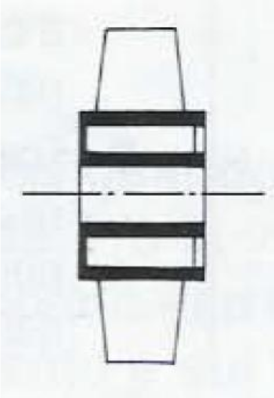
veloce (flusso misto)



alte velocità di rotazione e/o portate elevate e/o piccolo lavoro massico

$\omega_s = 1.0 \div 3.0$

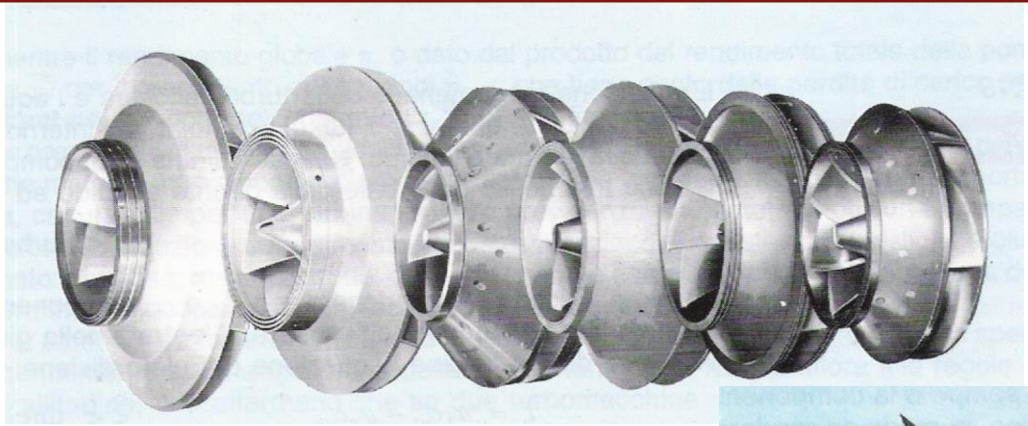
ultraveloce (flusso assiale)

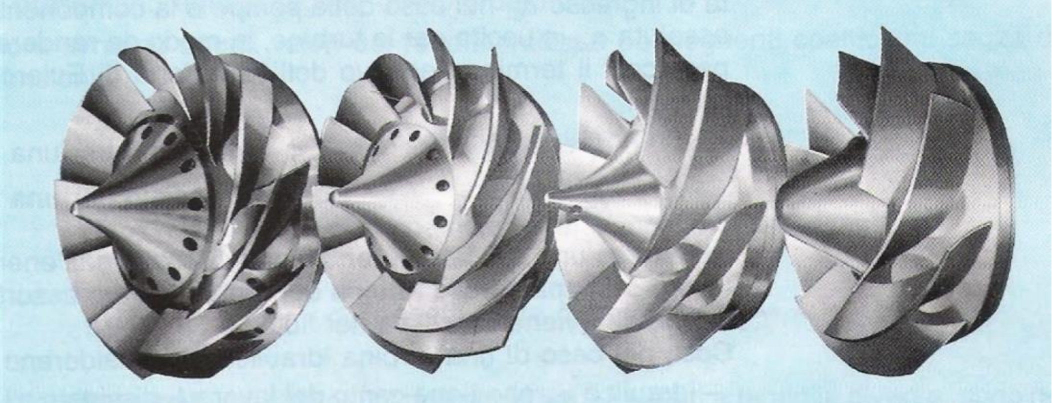


altissime velocità di rotazione e/o altissime portate e/o piccolo lavoro massico

$\omega_s = 2.0 \div 10$

Relazione tra velocità specifica e forma della girante





Sequenza di giranti a velocità specifica crescente.

Relazione tra velocità specifica e forma della girante

Al di sotto di $\omega_s = 0.2$ il rendimento delle turbomachine ad ammissione totale diminuisce a tal punto da imporre o la parzializzazione della girante oppure la soluzione multistadio.

Nel caso delle turbine si ricorre alla parzializzazione, in modo da alimentare solo parte della periferia della girante con il fluido. E' pratica usuale nel campo delle turbine idrauliche, mentre nel caso delle turbine termiche (a vapore o gas) si cerca di evitare, in quanto le pale rotoriche non alimentate, ruotando nel fluido motore, danno luogo a perdite per ventilazione, mentre la parete della ruota è soggetta all'attrito del fluido motore. Si preferisce quindi la soluzione multistadio.

Nel caso delle turbomachine operatrici, la soluzione abituale è disporre più giranti in serie, suddividendo il lavoro in diversi stadi in modo da raggiungere sul singolo stadio, una velocità specifica maggiore di 0.2.

Bibliografia

Micheli D. Dispense del Corso di Macchine e di Macchine Marine.
Cornetti G. Macchine idrauliche. Ed. Il capitello (2015)
Seppo A. Korpela. Principles of Turbomachinery. Ed. Wiley (2019)

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

Dipartimento di
Ingegneria
e Architettura