Algebra Lineare

0. Introduzione

Che cos'è un'equazione? Un'equazione è una domanda. Infatti, l'equazione

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

è un modo di formalizzare la domanda "Qual è quel numero, che indichiamo con x, tale per cui se a partire da esso calcoliamo la quantità $x^2 + 2x + 1$, che è anch'essa un numero, allora tale quantità è pari a zero?". Una soluzione dell'equazione è una risposta (corretta!) a tale domanda. Ad esempio, nel caso in specie, abbiamo che il numero -1 è una soluzione dell'equazione precedente dal momento che se sostituiamo -1 a x nella quantità a sinistra del segno di uguale (ovvero, al cosiddetto membro sinistro dell'equazione) otteniamo

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Dato che la quantità a sinistra del segno di uguale (il membro

sinistro) è la medesima di quella che abbiamo alla destra del segno di uguale (il membro destro) otteniamo che -1 è una soluzione dell'equazione che abbiamo considerato.
La teoria delle equazioni di secondo grado in una incognita, alle quali l'equazione che abbiamo considerato appartiene, ci dice che, inoltre, -1 è l'unica soluzione di tale equazione e che il membro sinistro si può scrivere come $(x+1)^2$. Per il momento, non ci curiamo di questi aspetti.
Passiamo, invece, a considerare un'altra equazione, ovvero

$$3x + y - 2z = 0$$

Risolverla significa dunque rispondere alla domanda "Per quali numeri x, y e z vale che la somma tra $3x$, y e $-2z$ fa zero?"
In altre parole, risolvere l'equazione significa determinare una (o tutte) le <u>terne</u> di numeri (x, y, z) tali che, se sostituiamo tali numeri alle variabili nel membro sinistro e svolgiamo i conti otteniamo il membro destro, ovvero zero. Notiamo che, mentre nella prima equazione che abbiamo considerato ci veniva chiesto di de-

terminare un numero x, nella seconda ci viene chiesto di determinarne tre, chiamati x, y e z. Diciamo quindi che la prima è un'equazione in una variabile, mentre la seconda è un'equazione in tre variabili. Consideriamo dunque il problema di risolvere questa seconda equazione. Una possibilità che salta all'occhio è quella di scegliere

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{ovvero la terna } (0,0,0).$$

Infatti vale che

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

Parimenti, abbiamo anche la scelta

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2 \quad \text{ovvero la terna } (1,1,2)$$

come soluzione dell'equazione, dato che

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 + 1 - 4 = 0$$

Similmente, anche

$$x = 0, \quad y = 2, \quad z = 1 \quad \text{ovvero la terna } (0,2,1)$$

è soluzione dell'equazione, dato che

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Ora accade un fatto mirabile, ovvero che da queste ultime due soluzioni che abbiamo esibito possiamo crearne di altre, sfruttando le proprietà di base delle operazioni tra numeri, in particolare la proprietà <u>commutativa</u> e quella <u>distributiva</u>. Cerchiamo di essere più concreti. Il mio obiettivo ora è mostrarvi che la scelta

$$x = 2, \ y = 2, \ z = 4 \quad \text{ovvero la terna } (2, 2, 4)$$

è anche essa una soluzione dell'equazione. Notiamo infatti che

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 6 + 2 - 8 = 0$$

Possiamo però vedere che la precedente scelta per le variabili determina zero al membro sinistro anche in un altro modo, per così dire senza effettuare ulteriori conti, ma basandoci sulla conoscenza accumulata fino ad ora. Il punto di partenza è notare che la terna $(2, 2, 4)$ si ottiene moltiplicando per due ciascuna delle tre entrate della terna $(1, 1, 2)$ (che già sappiamo essere soluzione della equazione). Con una notazione compatta, scriviamo che

$$(2, 2, 4) = 2 \cdot (1, 1, 2)$$

Pertanto, riprendendo la quantità che ci siamo accinti a calcolare in precedenza, possiamo scrivere

$$3\cdot 2 + 1\cdot 2 - 2\cdot 4 = 3\cdot(2\cdot 1) + 1\cdot(2\cdot 1) - 2\cdot(2\cdot 2) =$$

$$= 2\,(\underbrace{3\cdot 1 + 1 - 2\cdot 2}) = 2\cdot 0 = 0$$

qui abbiamo utilizzato le proprietà dei numeri: commutativa, associativa e distributiva

dal conto che abbiamo effettuato in precedenza sappiamo che questa quantità è uguale a zero

Lo stesso ragionamento ci mostra che anche la scelta

$x = 37,\ y = 37,\ z = 37$ ovvero la terna $(37, 37, 72)$

è soluzione dell'equazione dal momento che possiamo scrivere

$$3\cdot 37 + 1\cdot 37 - 2\cdot 37 = 37\cdot(\underbrace{3\cdot 1 + 1 - 2\cdot 2}_{=0})$$

$$= 37\cdot 0 = 0$$

Usando la notazione compatta che abbiamo adottato prima, possiamo affermare che la terna $(37, 37, 72)$ è soluzione dell'equazione dal momento che possiamo esprimerla nella forma $37\cdot(1, 1, 2)$

Vediamo quindi come per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, (ovvero per ogni numero reale α), la scelta

$x=\alpha,\ y=\alpha,\ z=2\alpha$ ovvero la terna $(\alpha,\alpha,2\alpha)=\alpha(1,1,2)$

sia soluzione dell'equazione. Notiamo che questa è una proprietà peculiare del tipo di equazione che stiamo studiando (vedremo che il motivo chiave è che le variabili appaiono al <u>primo grado</u>, ovvero non ci sono potenze superiori come x^2, xz, y^4z^2, ... e non compaiono altre funzioni come seno, coseno, tangente, logaritmo o esponenziale): infatti, se consideriamo la prima equazione che abbiamo preso in esame, ovvero $x^2+2x+1=0$ e la soluzione che abbiamo trovato, ovvero -1, risulta che se moltiplichiamo -1 per un qualsiasi numero reale diverso da 1 allora otteniamo un numero che <u>non</u> è soluzione dell'equazione (ad esempio, $5\cdot(-1)=-5$ non è soluzione dell'equazione).

Analizziamo ora un secondo fenomeno peculiare delle soluzioni dell'equazione $3x+y-2z=0$. Ricordiamo che abbiamo visto come le due terne $(1,1,2)$ e $(0,2,1)$ siano sue soluzioni. Vorrei ora verificare che anche la terna $(1,3,3)$ è soluzione dell'equazione. Anche qui potremmo sostituire i tre valori $1,3,3$ alle tre variabili, ma procediamo in maniera differente. L'osser=

vazione che ci guiderà nel nostro procedere è che la terna $(1,3,3)$ è ottenuta sommando "entrata per entrata" le due terne $(1,1,2)$ e $(0,2,1)$:

$$1 = 1+0$$
$$3 = 1+2$$
$$3 = 2+1$$

Con una notazione compatta andremo a scrivere

$$(1,3,3) = (1,1,2) + (0,2,1)$$

Ora, come abbiamo fatto in precedenza, mostriamo che $(1,3,3)$ è una soluzione utilizzando la nostra conoscenza pregressa:

$$3\cdot 1 + 1\cdot 3 - 2\cdot 3 = 3\cdot(0+1) + 1\cdot(1+2) - 2\cdot(2+1) =$$

$$= \underbrace{(3\cdot 0 + 1\cdot 1 - 2\cdot 2)}_{\substack{=0 \text{ perché } (0,1,2) \\ \text{è soluzione}}} + \underbrace{(3\cdot 1 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1)}_{\substack{=0 \text{ perché } (1,1,2) \\ \text{è soluzione}}}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Anche questa proprietà che abbiamo evidenziato non si riscontra se consideriamo equazioni di tipo diverso: l'equazione

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ammette sia 2 che 3 come soluzioni, ma la loro somma 5 non è soluzione dell'equazione (verificate queste affermazioni!)

Se volessimo condensare in delle affermazioni generali quanto abbiamo appreso circa le soluzioni di $3x+y-2z=0$, diremmo:

A. la terna $(0,0,0)$ è soluzione dell'equazione

B. Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è una particolare soluzione dell'equazione (ovvero, $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ sono numeri reali) e $\alpha \in \mathbb{R}$ è un altro numero reale, allora anche la terna $\alpha \cdot (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\alpha \cdot \bar{x}, \alpha \bar{y}, \alpha \cdot \bar{z})$ è soluzione dell'equazione

C. se $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono due soluzioni dell'equazione allora anche $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\hat{x}+\bar{x}, \hat{y}+\bar{y}, \hat{z}+\bar{z})$ è soluzione dell'equazione.

Vedremo che queste sono le proprietà centrali del concetto di linearità, che sarà il cardine attorno al quale ruota tutto il corso.

Allarghiamo ora il nostro orizzonte e, invece che focalizzarci su una singola equazione, studieremo i cosiddetti sistemi di equazioni, ovvero ci chiederemo cosa succeda quando imponiamo che più equazioni valgano simultaneamente.

Concretamente studiamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Esprimendoci come abbiamo già fatto in precedenza, il nostro obiettivo sarà comprendere quali terne (x, y, z) sono soluzioni di tutte e tre le equazioni contemporaneamente.

Ragionando in maniera analoga a quanto abbiamo fatto nel caso di una sola equazione possiamo vedere che tutte e tre le proprietà A, B e C sono soddisfatte anche quando consideriamo un sistema di equazioni. Soffermiamoci ora sul come possiamo concretamente determinare alcune, o tutte, le soluzioni del sistema. Utilizzeremo una tecnica denominata "eliminazione di Gauss", la quale si basa su due principi che possiamo enunciare così:

1. "se a cose uguali sommiamo cose uguali, otteniamo cose uguali"
2. "se moltiplichiamo due numeri uguali per il medesimo

numero non nullo, otteniamo numeri uguali"

Quello che andremo a fare è manipolare attraverso questi due principi il sistema di partenza per ottenerne uno equivalente, ovvero uno che ammette le medesime soluzioni dell'originario, che sia per noi più semplice da risolvere.

Nella fattispecie, noi partiamo dal sistema originario per ottenerne uno che ha la seguente struttura:

$$\begin{cases} \text{un'equazione in cui compaiono tutte e tre le variabili} \\ \text{un'equazione in cui compaiono due variabili su tre} \\ \text{un'equazione in cui compare una variabile su tre} \end{cases}$$

qualcuna di queste equazioni potrebbe essere mancante

Partiamo notando che nell'equazione

$$-2x - 2y + 2z = 0$$

possiamo moltiplicare entrambi i membri per $-\frac{1}{2}$, ottenendo:

$$x + y - z = 0$$

Il sistema diviene:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x \quad\quad - z = 0 \end{cases}$$

Ora usiamo il primo principio che abbiamo enunciato precedentemente per sottrarre alla seconda equazione la prima, moltiplicata per 3:

$$(3x + y - 2z) - 3(x+y-z) = 0 - 3\cdot 0$$

$$-2y + z = 0$$

Similmente, sottraiamo alla terza equazione la prima, moltiplicata per 2:

$$(2x - z) - 2\cdot(x+y-z) = 0$$

$$-2y + z = 0$$

Notiamo come queste operazioni abbiano avuto il risultato di eliminare la variabile x dalla seconda e dalla terza equazione. Otteniamo dunque il sistema equivalente dato da

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

Ora, la seconda e la terza equazione sono identiche, e dunque mantenerle entrambe risulta ridondante; in definitiva, abbiamo ottenuto il sistema, equivalente a quello di partenza, dato da:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$