

Esame di Analisi Matematica 1 del 4/7/2023

Nome e Cognome

Corso di studi: Fisica Matematica

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\sin x)}{3 \tanh(x^2)} = \boxed{},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^5} (1 - x^2) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x-2} \right| (x-3),$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Eventuali simmetrie:

iii) Limiti importanti:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno, dove definita.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno, dove definita.

viii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte tale che

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(1) &= 0, & f(2) &= 0, \\ f'(0) &= 1, & f'(1) &= 1, & f'(2) &= 1, \end{aligned}$$

Dimostrare che:

i) esiste almeno un punto in cui la derivata si annulla;

ii) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla;

iii) esiste almeno un punto in cui la derivata terza si annulla;

iv) esiste almeno un punto in cui la derivata quarta si annulla.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino:

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx = \boxed{},$$

$$\int_{-2}^2 (|x-1| - 1) x^2 \, dx = \boxed{}.$$