

Esame di Analisi Matematica 1 del 15/9/2023

Nome e Cognome

Corso di studi: Fisica Matematica

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\arcsin x)}{7 \arctan(x^2)} = \boxed{},$$

$$\lim_n \frac{2n^2}{n+1} \left(\pi - 2 \arctan(n) \right) = \boxed{}.$$

(Potrebbe essere utile la formula $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.)

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \right| - \frac{1}{2},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Eventuali simmetrie:

iii) Limiti importanti:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno, dove definita.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno, dove definita.

viii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari, derivabile tre volte, tale che

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che:

i) esistono almeno due punti, oltre a 0, in cui la derivata si annulla;

ii) esistono almeno due punti di minimo;

iii) esistono almeno due punti in cui la derivata seconda si annulla;

iv) esiste almeno un punto in cui la derivata terza si annulla.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino:

$$\int_0^1 \frac{3e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \boxed{},$$

$$\int_{-4}^4 (|x+2| - 1) x^2 dx = \boxed{}.$$