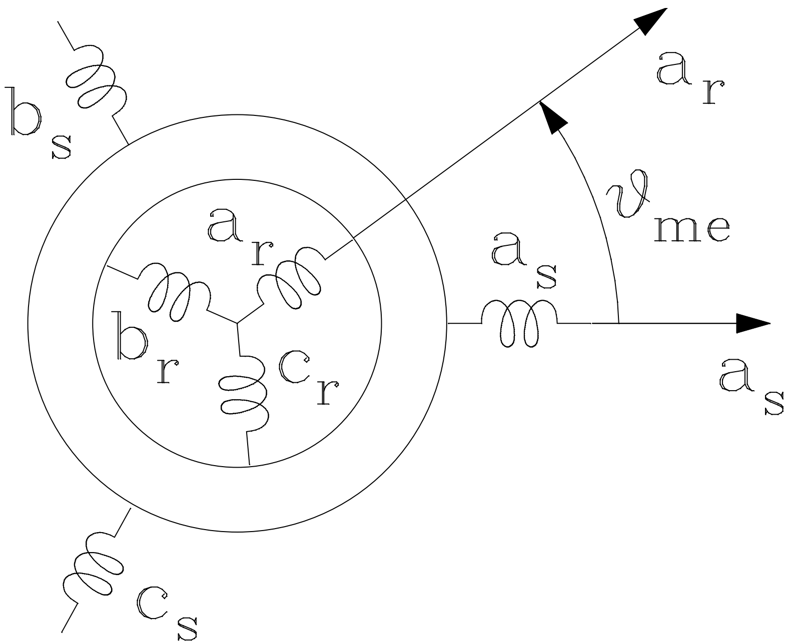
MODELLO DEL MOTORE ASINCRONO

STRUTTURA CIRCUITALE

Il motore asincrono a gabbia di scoiattolo è rappresentato come un insieme di due sistemi trifase di avvolgimenti collegati a stella uno aperto collocato sullo statore e l'altro in cortocircuito collocato sul rotore: è la struttura della teoria circuitale delle macchine elettriche.



IPOTESI per il MODELLO CIRCUITALE del MOTORE ASINCRONO

-traferro uniforme (superfici di statore e rotore lisce)

-avvolgimenti di statore e rotore simmetrici e distribuiti sinusoidalmente in modo da produrre una distribuzione sinusoidale della f.m.m. al traferro

-andamento sinusoidale del valore delle induttanze in funzione della posizione angolare del rotore

-circuiti magnetici lineari

Introducendo le trasformazioni:

-trifase-bifase (abc-$\alpha\beta$) (stazionarie)

-bifase stazionaria-bifase rotante ($\alpha\beta$-dq)

si perviene, a partire dalle equazioni trifase, alle equazioni in regime dinamico del motore asincrono.

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Applicando la legge di Ohm generalizzata si possono scrivere:

$$v_{as} = R_s i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt}$$

...

$$0 = v_{ar} = R_r i_{ar} + \frac{d\lambda_{ar}}{dt}$$

...

Espressioni di legame tra i flussi concatenati con gli avvolgimenti e le correnti che li attraversano

$$\lambda_{as} = L_{ss} i_{as} + M_{ss} i_{bs} + M_{ss} i_{cs} + m_{as,ar} i_{ar} + m_{as,br} i_{br} + m_{as,cr} i_{cr}$$

$$\lambda_{ar} = m_{ar,as} i_{as} + m_{ar,bs} i_{bs} + m_{ar,cs} i_{cs} + L_{rr} i_{ar} + M_{rr} i_{br} + M_{rr} i_{cr}$$

$$m_{as,ar} = M_{sr} \cos(\theta_{\mathrm{me}})$$

$$m_{as,br} = M_{sr} \cos(\theta_{\mathrm{me}} + 120°)$$

...

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Esplicitando le derivate dei flussi si ottengono termini del tipo riportato a fianco (l'esempio è riferito al flusso della fase *a* di statore)

$$\frac{d\lambda_{as}}{dt} = \left(L_{ss}\frac{di_{as}}{dt} + M_{ss}\frac{di_{bs}}{dt} + M_{ss}\frac{di_{cs}}{dt} + \right.$$

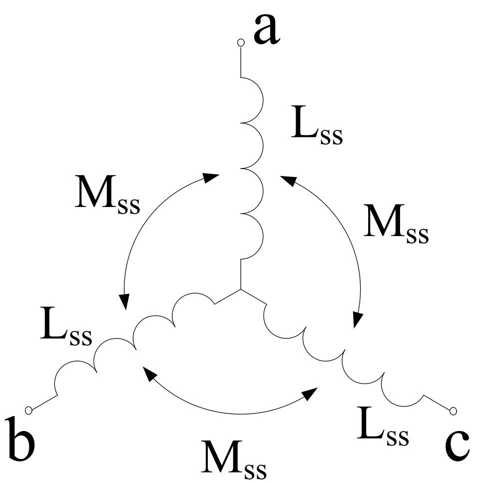
$$\left. + m_{as,ar}\frac{di_{ar}}{dt} + m_{as,br}\frac{di_{br}}{dt} + m_{as,cr}\frac{di_{cr}}{dt} \right)$$

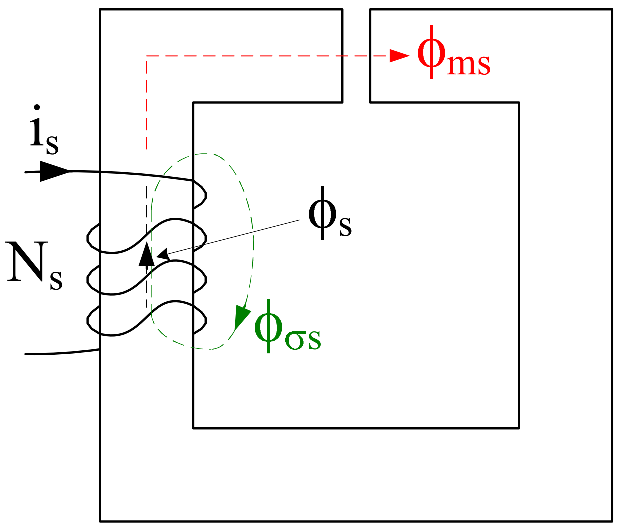
termine del 1°tipo (f.e.m. di tipo trasformatorico)

$$+\omega_{me}\left(\frac{\partial m_{as,ar}}{\partial \theta_{me}} i_{ar} + \frac{\partial m_{as,br}}{\partial \theta_{me}} i_{br} + \frac{\partial m_{as,cr}}{\partial \theta_{me}} i_{cr} \right)$$

termine del 2°tipo (f.e.m. di tipo mozionale)

AUTO E MUTUE INDUTTANZE





$$\phi_s = \frac{N_s i_s}{\Re} \qquad \phi_s = \phi_{\sigma s} + \phi_{ms}$$

$$\lambda_s = N_s \phi_s = N_s \phi_{\sigma s} + N_s \phi_{ms} = \lambda_{\sigma s} + \lambda_{ms}$$

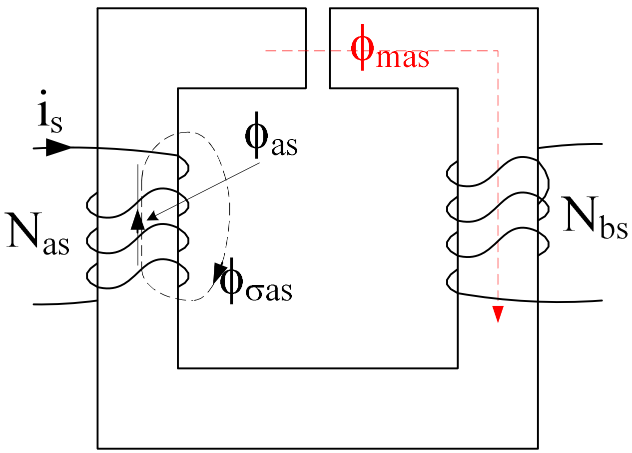
$$L_{ss} = \frac{\lambda_s}{i_s} = \frac{\lambda_{\sigma s}}{i_s} + \frac{\lambda_{ms}}{i_s} = L_{\sigma s} + L_{ms}$$

$$\phi_{\sigma s} = \frac{N_s i_s}{\Re_\sigma} \qquad \phi_{ms} = \frac{N_s i_s}{\Re_m}$$

$$L_{\sigma s} = \frac{\lambda_{\sigma s}}{i_s} = \frac{N_s \phi_{\sigma s}}{i_s} = \frac{N_s^2}{\Re_\sigma}$$

$$L_{ms} = \frac{\lambda_{ms}}{i_s} = \frac{N_s \phi_{ms}}{i_s} = \frac{N_s^2}{\Re_m}$$

AUTO E MUTUE INDUTTANZE DI STATORE E DI ROTORE



$$N_{as} = N_{bs} = N_s$$

$$M_{ss} = M_{ss,\max} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$M_{ss,\max} = \frac{\lambda_{mab}}{i_s} = \frac{N_{bs}\phi_{mas}}{i_s} = \frac{N_{bs}N_{as}i_s}{i_s\Re_m}$$

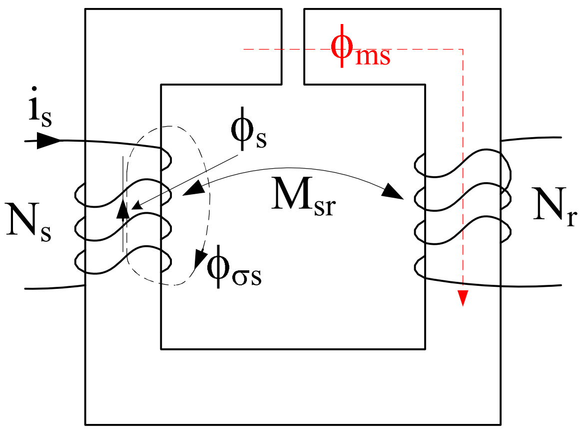
$$M_{ss} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{N_s^2}{\Re_m} = -\frac{1}{2}L_{ms}$$

In modo del tutto analogo si può procedere per il sistema di avvolgimenti di rotore

$$L_r = L_{\sigma r} + L_{mr} \qquad L_{\sigma r} = \frac{N_r^2}{\Re_{\sigma r}} \qquad L_{mr} = \frac{N_r^2}{\Re_m} \qquad M_{rr} = -\frac{1}{2}L_{mr}$$

A cui si può aggiungere la relazione $L_{ms} = \dfrac{N_s^2}{N_r^2}\dfrac{N_r^2}{\Re_m} = \dfrac{N_s^2}{N_r^2}L_{mr}$

MUTUE-INDUTTANZE STATORE-ROTORE



Si ricordi per esempio:

$$m_{as,ar} = M_{sr}\cos(\theta_{\mathrm{me}})$$

$$M_{sr} = \frac{\lambda_{sr}}{i_s} = \frac{N_r \phi_{ms}}{i_s} = \frac{N_s i_s}{\Re_m} N_r \frac{1}{i_s}$$

$$M_{sr} = \frac{N_s N_r}{\Re_m} = \frac{N_s^2}{\Re_m}\frac{N_r}{N_s} = L_{ms}\frac{N_r}{N_s} = L_{mr}\frac{N_s}{N_r}$$

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Tenendo conto delle
$$i_{as} + i_{bs} + i_{cs} = 0$$
$$i_{ar} + i_{br} + i_{cr} = 0$$

si ottengono
$$\lambda_{as} = L_s i_{as} + m_{as,ar} i_{ar} + m_{as,br} i_{br} + m_{as,cr} i_{cr}$$
$$\ldots$$
$$\lambda_{ar} = m_{ar,as} i_{as} + m_{ar,bs} i_{bs} + m_{ar,cs} i_{cs} + L_r i_{ar}$$
$$\ldots$$

dove
$$L_s = L_{ss} - M_{ss} = L_{ms} + L_{\sigma s} + \frac{1}{2} L_{ms} = \frac{3}{2} L_{ms} + L_{\sigma s} = L_M + L_{\sigma s}$$
$$L_r = L_{rr} - M_{rr} = \frac{3}{2} L_{mr} + L_{\sigma r}$$

si è posto $\boxed{L_M = \frac{3}{2} L_{ms}}$

riportando le induttanze di rotore allo statore:
$$L_{sr} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_r = \frac{3}{2}\left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_{mr} + \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_{\sigma r} = \frac{3}{2} L_{ms} + L_{\sigma sr} = L_M + L_{\sigma sr}$$

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Le equazioni complessive del motore asincrono espresse nelle variabili di fase sono complesse. Conviene introdurre delle opportune trasformazioni che semplifichino la rappresentazione.

Per prima cosa si scrivono le equazioni del motore asincrono in maniera organica e compatta attraverso la rappresentazione matriciale.

$$\left|v_{abc,s}\right| = \begin{vmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{vmatrix} \qquad \left|i_{abc,s}\right| = \begin{vmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{vmatrix} \qquad \left|\lambda_{abc,s}\right| = \begin{vmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{vmatrix}$$

$$\left|v_{abc,r}\right| = \begin{vmatrix} v_{ar} \\ v_{br} \\ v_{cr} \end{vmatrix} \qquad \left|i_{abc,r}\right| = \begin{vmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{vmatrix} \qquad \left|\lambda_{abc,r}\right| = \begin{vmatrix} \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \\ \lambda_{cr} \end{vmatrix}$$

EQUAZIONI IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{vmatrix} v_{abc,s} \\ v_{abc,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |R_s| & 0 \\ 0 & |R_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{abc,s} \\ i_{abc,r} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} \lambda_{abc,s} \\ \lambda_{abc,r} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_{abc,s} \\ \lambda_{abc,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |M_{abc,ss}| & |M_{abc,sr}| \\ |M_{abc,rs}| & |M_{abc,rr}| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{abc,s} \\ i_{abc,r} \end{vmatrix}$$

MATRICI DELLE INDUTTANZE

$$\left|M_{abc,kk}\right| = \begin{vmatrix} L_{a,kk} & M_{ab,kk} & M_{ac,kk} \\ M_{ba,kk} & L_{b,kk} & M_{bc,kk} \\ M_{ca,kk} & M_{cb,kk} & L_{c,kk} \end{vmatrix}$$

$$k = \begin{matrix} s & \text{(statore)} \\ r & \text{(rotore)} \end{matrix}$$

$$L_{a,kk} = L_{b,kk} = L_{c,kk} = L_{kk}$$

$$M_{ab,kk} = M_{ac,kk} = \ldots = M_{kk}$$

$$L_{kk} = L_{ss}$$
$$M_{kk} = M_{ss}$$

statore

$$L_{kk} = L_{rr}$$
$$M_{kk} = M_{rr}$$

rotore

MATRICI DELLE MUTUE-INDUTTANZE STATORE-ROTORE

$$\left|M_{abc,hk}\right| = \begin{vmatrix} m_{ah,ak} & m_{ah,bk} & m_{ah,ck} \\ m_{bh,ak} & m_{bh,bk} & m_{bh,ck} \\ m_{ch,ak} & m_{ch,bk} & m_{ch,ck} \end{vmatrix}$$

$$h,k = \begin{matrix} s & \text{(statore)} \\ r & \text{(rotore)} \end{matrix}$$

$$h \neq k$$

$$m_{ah,ak} = M_{hk} \cos(\theta_{me})$$

$$m_{ah,bk} = M_{hk} \cos\left(\theta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

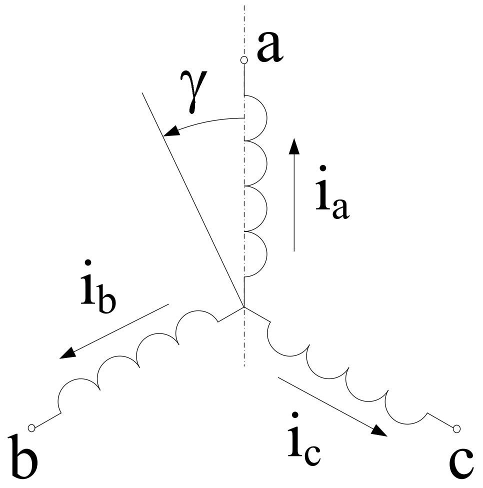
$$m_{ah,ck} = M_{hk} \cos\left(\theta_{me} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Dipendono dall'angolo θ_{me} tra statore e rotore

Esplicitando le matrici si riconosce che

$$\left|M_{abc,\boldsymbol{rs}}\right| = \left|M_{abc,\boldsymbol{sr}}\right|^T$$

TRASFORMAZIONE TRIFASE-BIFASE



Espressioni delle densità angolari di f.m.m. (densità di corrente concatenata) di fase

$$J_a = K_a \cos(\gamma)\, i_a$$

$$J_b = K_b \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) i_b$$

$$J_c = K_c \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) i_c$$

γ indica la posizione angolare di osservazione.

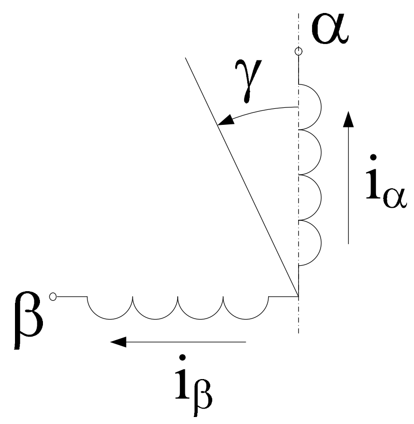
Densità angolare di f.m.m. totale

$$J_{a,b,c} = J_a + J_b + J_c = K_{a,b,c}\left[\left(i_a + i_b \cos\frac{2\pi}{3} + i_c \cos\frac{2\pi}{3}\right)\cos(\gamma) + \left(i_b \sin\frac{2\pi}{3} - i_c \sin\frac{2\pi}{3}\right)\sin(\gamma)\right]$$

con

$$K_a = K_b = K_c = K_{a,b,c}$$

TRASFORMAZIONE TRIFASE-BIFASE



$$J_\alpha = K_\alpha \cos(\gamma)\, i_\alpha$$

$$J_\beta = K_\beta \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) i_\beta = K_\beta \sin(\gamma)\, i_\beta$$

$$J_{\alpha,\beta} = J_\alpha + J_\beta = K_{\alpha,\beta}\left[\cos(\gamma)\, i_\alpha + \sin(\gamma)\, i_\beta\right]$$

$$K_\alpha = K_\beta = K_{\alpha,\beta}$$

Condizione di equivalenza

$$J_{\alpha,\beta} = J_{a,b,c}$$

$$K_{a,b,c}\left(i_a + i_b\, cos\frac{2\pi}{3} + i_c\, cos\frac{2\pi}{3}\right) = K_{\alpha,\beta} i_\alpha$$

$$K_{a,b,c}\left(i_b\, sin\frac{2\pi}{3} - i_c\, sin\frac{2\pi}{3}\right) = K_{\alpha,\beta} i_\beta$$

TRASFORMAZIONE TRIFASE-BIFASE

In forma matriciale

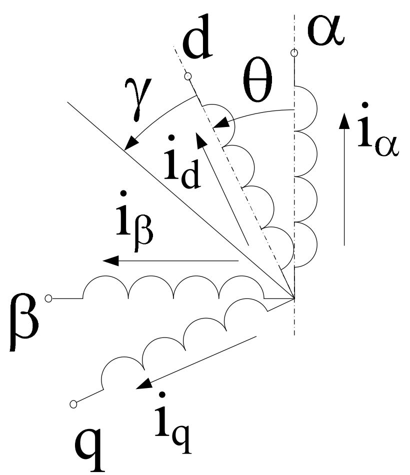
$$\begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{vmatrix} = \frac{K_{a,b,c}}{K_{\alpha,\beta}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

Generalizzando, quando $i_a + i_b + i_c \neq 0$, si introduce la variabile i_0

$$\begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{K\sqrt{3}} & \frac{1}{K\sqrt{3}} & \frac{1}{K\sqrt{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

Dove $\dfrac{K_{a,b,c}}{K_{\alpha,\beta}} = K$

TRASFORMAZIONE “BIFASE-BIFASE” (“STAZIONARIA-ROTANTE”)



$$J_d = K_{\alpha\beta} \sin(\gamma)\, i_d$$
$$J_q = -K_{\alpha\beta} \cos(\gamma)\, i_q$$

$$J_\alpha = K_{\alpha\beta} \sin(\gamma + \theta)\, i_\alpha$$
$$J_\beta = -K_{\alpha\beta} \cos(\gamma + \theta)\, i_\beta$$

Condizione di equivalenza

$$J_\alpha + J_\beta = J_d + J_q$$

Sviluppando il secondo gruppo di equazioni

$$K_{\alpha\beta}\left[\sin(\theta)\cos(\gamma)i_\alpha + \cos(\theta)\sin(\gamma)i_\alpha + \cos(\theta)\cos(\gamma)i_\beta + \sin(\theta)\sin(\gamma)i_\beta\right] =$$
$$= K_{\alpha\beta}\left[\sin(\gamma)i_d - \cos(\gamma)i_q\right]$$

TRASFORMAZIONE "BIFASE-BIFASE" ("STAZIONARIA-ROTANTE")

Le trasformazioni sono dunque

$$i_d = \cos(\theta) i_\alpha + \sin(\theta) i_\beta$$

$$i_q = -\sin(\theta) i_\alpha + \cos(\theta) i_\beta$$

In forma matriciale (con l'estensione alla terza variabile, cosiddetta di sequenza zero)

$$\begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{vmatrix}$$

Si ricordi che l'angolo θ può anche essere funzione del tempo: θ= θ(t)

TRASFORMAZIONI

Sono state introdotte due trasformazioni con un preciso significato fisico (equivalenza dei fenomeni magnetici: f.m.m., flusso, ecc.)

$$T_1 = K \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{K\sqrt{3}} & \frac{1}{K\sqrt{3}} & \frac{1}{K\sqrt{3}} \end{vmatrix} \qquad T_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Le trasformazioni così introdotte possono "perdere" il loro significato fisico ed essere considerate mere *trasformazioni matematiche*.

Possono allora "trasformare" qualsiasi terna di grandezze: tensioni, correnti, flussi.

Tramite l'algebra matriciale possono essere applicate ad intere equazioni.

TRASFORMAZIONI

Conviene considerare un'altra "astrazione".

Gli assi degli avvolgimenti dei sistemi bifase possono essere "visti" come gli assi di *sistemi di riferimento ortogonali.* Per cui le trasformazioni di tipo T_2 diventano "trasformazioni tra sistemi di riferimento cartesiani".

Sono usuali così espressioni del tipo "*scelta del sistema di riferimento*", "*sistema di riferimento stazionario/rotante*", ecc.

Scelta del coefficiente K.

K di T_1 è un coefficiente arbitrario in quanto lo è anche $K_{\alpha,\beta}$ da cui dipende. Tra le possibili scelte due sono più significative di altre:

$K = \sqrt{\frac{2}{3}}$ Rende la T_1 ortogonale e mantiene inalterate le espressioni energetiche (potenza, ecc.)

$K = \frac{2}{3}$ Mantiene inalterate le ampiezze delle grandezze sinusoidali

TRASFORMAZIONI

Matrici d'interesse

$$T_1^{-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{K}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}K \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}K \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}K \end{vmatrix}$$

Scelta $K = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \qquad T_1^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

TRASFORMAZIONI

Si può verificare che (sempre con $K = \sqrt{\frac{2}{3}}$):

$T_1^T = T_1^{-1}$ significa T_1 ortogonale e quindi vale anche

$T_1^T T_1 = I$ da cui $det(T_1) = 1$

Si osservi che anche T2 è ortogonale.

Scelta $K = \frac{2}{3}$

$$T_1 = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \qquad T_1^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

EQUAZIONI UTILI

$$\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)$$

$$\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)$$

$$\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)$$

TRASFORMAZIONI

Trasformazioni combinate:

$$T_2T_1 = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\left(T_2T_1\right)^{-1} = T_1^{-1}T_2^{-1} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

ESEMPIO

$$\mathrm{v}_a = \mathrm{V}_M \cos(\theta)$$

$$\mathrm{v}_b = \mathrm{V}_M \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathrm{v}_c = \mathrm{V}_M \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{T_1}$$

$$\mathrm{v}_\alpha = \mathrm{V}_M \cos(\theta)$$

$$\mathrm{v}_\beta = \mathrm{V}_M \sin(\theta)$$

$$\mathrm{v}_0 = 0$$

$$\theta = \omega t + \delta$$

Vettore spaziale

$$\overline{v}(t) = \frac{2}{3}\left(v_a + v_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + v_c e^{j\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$\frac{2}{3}V_M \left\{\left[\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right] + \right.$$

$$\left. \mathrm{j}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

ESEMPIO

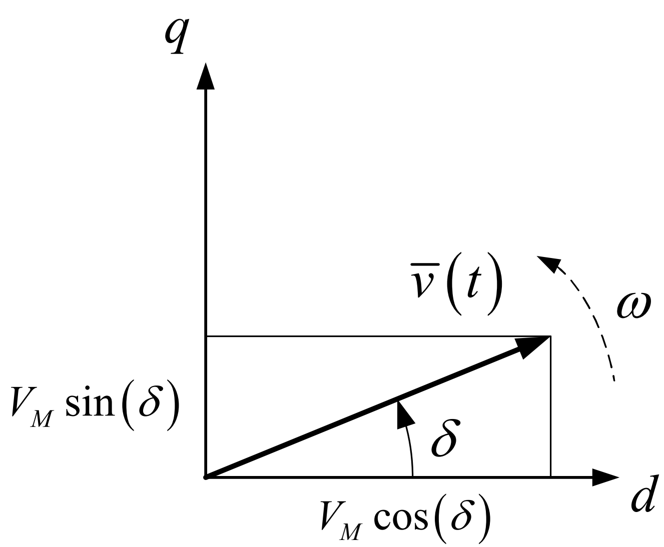
da cui $$\overline{v}(t) = V_M\left[\cos(\theta) - j\sin(\theta)\right]$$

$$\overline{v}(t) = V_M e^{j\theta}$$

se $\theta = \omega t + \delta$

$$\overline{v}(t) = V_M e^{j(\omega t + \delta)}$$

graficamente



EQUAZIONI IN REGIME DINAMICO DEL MOTORE ASINCRONO (statore)

Si parta dalle equazioni matriciali che descrivono il motore nelle variabili di fase (vedi dia 11) e si introduca la trasformazione T_1 sia sullo statore che sul rotore

$$\begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{\alpha\beta 0,s} \\ v_{\alpha\beta 0,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |R_s| & 0 \\ 0 & |R_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{\alpha\beta 0,s} \\ i_{\alpha\beta 0,r} \end{vmatrix} + p \left[\begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha\beta 0,s} \\ \lambda_{\alpha\beta 0,\mathrm{r}} \end{vmatrix} \right]$$

Si pre-moltiplicano tutti i termini per $\begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{vmatrix}$ ottenendo

$$\begin{vmatrix} v_{\alpha\beta 0,s} \\ v_{\alpha\beta 0,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |R_s| & 0 \\ 0 & |R_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{\alpha\beta 0,s} \\ i_{\alpha\beta 0,r} \end{vmatrix} + p \left[\begin{vmatrix} \lambda_{\alpha\beta 0,s} \\ \lambda_{\alpha\beta 0,\mathrm{r}} \end{vmatrix} \right]$$

Si osservi che la matrice di trasformazione qui utilizzata è indipendente dal tempo.

EQUAZIONI IN REGIME DINAMICO DEL MOTORE ASINCRONO (rif. separati)

Operando sul rotore analogamente a quanto visto per lo statore si perviene alle equazioni di statore e di rotore scritte *separatamente*. Escludendo la componente di sequenza nulla si ottengono le equazioni (elettriche) nel sistema bifase ciascuna relativa al proprio riferimento

L'apice indica il riferimento nel quale sono espresse le grandezze:

^{s}=statore

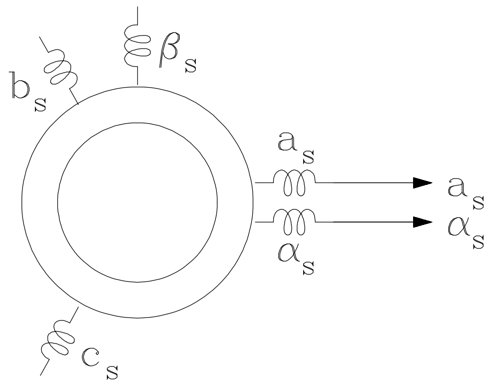
^{r}=rotore.

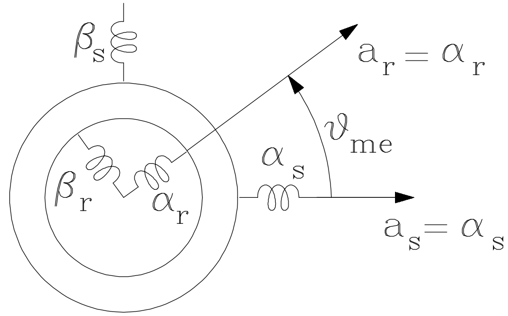
$$v_{\alpha s}^{s} = R_s i_{\alpha s}^{s} + \frac{d\lambda_{\alpha s}^{s}}{dt}$$

$$v_{\beta s}^{s} = R_s i_{\beta s}^{s} + \frac{d\lambda_{\beta s}^{s}}{dt}$$

$$v_{\alpha r}^{r} = 0 = R_r i_{\alpha r}^{r} + \frac{d\lambda_{\alpha r}^{r}}{dt}$$

$$v_{\beta r}^{r} = 0 = R_r i_{\beta r}^{r} + \frac{d\lambda_{\beta r}^{r}}{dt}$$





EQUAZIONI DI LEGAME

Applicando la trasformazione T_1 alle equazioni di legame si hanno

$$\begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha\beta,s} \\ \lambda_{\alpha\beta,r} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} |M_{abc,ss}| & |M_{abc,sr}| \\ |M_{abc,rs}| & |M_{abc,rr}| \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{\alpha\beta,s} \\ i_{\alpha\beta,r} \end{vmatrix}$$

da cui si ricava

$$\begin{vmatrix} \lambda_{\alpha\beta,s} \\ \lambda_{\alpha\beta,r} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} |M_{\alpha\beta,ss}| & |M_{\alpha\beta,sr}| \\ |M_{\alpha\beta,rs}| & |M_{\alpha\beta,rr}| \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} i_{\alpha\beta,s} \\ i_{\alpha\beta,r} \end{vmatrix}$$

dove

$$\begin{Vmatrix} |M_{\alpha\beta,ss}| & |M_{\alpha\beta,sr}| \\ |M_{\alpha\beta,rs}| & |M_{\alpha\beta,rr}| \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} |M_{abc,ss}| & |M_{abc,sr}| \\ |M_{abc,rs}| & |M_{abc,rr}| \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{vmatrix}$$

EQUAZIONI DI LEGAME

$$\lambda_{\alpha s}^{s} = L_s i_{\alpha s}^{s} + \frac{3}{2} M_{sr} \left(i_{\alpha r}^{r} \cos\theta_{me} - i_{\beta r}^{r} \sin\theta_{me} \right)$$

$$\lambda_{\beta s}^{s} = L_s i_{\beta s}^{s} + \frac{3}{2} M_{sr} \left(i_{\alpha r}^{r} \sin\theta_{me} + i_{\beta r}^{r} \cos\theta_{me} \right)$$

$$\lambda_{\alpha r}^{r} = L_r i_{\alpha r}^{r} + \frac{3}{2} M_{rs} \left(i_{\alpha s}^{s} \cos\theta_{me} + i_{\beta s}^{s} \sin\theta_{me} \right)$$

$$\lambda_{\beta r}^{r} = L_r i_{\beta r}^{r} + \frac{3}{2} M_{rs} \left(- i_{\alpha s}^{s} \sin\theta_{me} + i_{\beta s}^{s} \cos\theta_{me} \right)$$

si ricordi che

$$\frac{3}{2} M_{sr} = \frac{3}{2} M_{rs} = \frac{3}{2} L_{ms} \frac{N_r}{N_s} = L_M \frac{N_r}{N_s}$$

$$L_s = L_{\sigma s} + L_M$$

$$L_r = L_{\sigma r} + L_M$$

RIFERIMENTO UNICO

Le grandezze che compaiono nelle equazioni scritte fino ad ora sono relative a sistemi di riferimento separati:

le grandezze di statore in un riferimento solidale con lo statore (stazionario)

Le grandezze di rotore in un riferimento solidale con il rotore (rotante).

Conviene usare un unico riferimento per le grandezze di entrambe le strutture, ciò significa trasformare:

le sole grandezze di rotore oppure

le sole grandezze di statore o in generale

entrambe (sia quelle di statore che di rotore)

tramite una trasformazione bifase-bifase per rappresentarle in un opportuno sistema di riferimento comune a tutte.

RIFERIMENTI PARTICOLARI

Alcuni tra i sistemi di riferimento più usuali sono:

riferimento stazionario (solidale con lo statore) nel qual caso non serve trasformare le grandezze di statore, mentre quelle di rotore vanno trasformate applicando la matrice $T_2(-\theta_{me})$;

riferimento rotante solidale con il rotore, nel qual caso non serve trasformare le grandezze di rotore, mentre quelle di statore vanno trasformate applicando la matrice $T_2(\theta_{me})$;

riferimento generico rotante con una pulsazione ω_d, nel qual caso le grandezze di statore vanno trasformate applicando la matrice $T_2(\theta_d)$, mentre alle grandezze di rotore si applica la matrice $T_2(\theta_d-\theta_{me})$, dove $\theta_d=\int\omega_d\, dt$.

Nel riferimento unico, tutte le grandezze delle equazioni avranno lo stesso apice "**s**" nel primo caso, "**r**" nel secondo e "**d**" nel terzo. Quando non si crei confusione, per semplicità, si omette l'apice stabilendo (dichiarandolo), come presupposto, il sistema di riferimento in cui si lavora.

EQUAZIONI DEL MOTORE

$$\begin{vmatrix} T_2(\theta_d)^{-1} & 0 \\ 0 & T_2(\theta_d-\theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{dq,s} \\ v_{dq,r} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} |R_s| & 0 \\ 0 & |R_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_2(\theta_d)^{-1} & 0 \\ 0 & T_2(\theta_d-\theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{dq,s} \\ i_{dq,r} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix} T_2(\theta_d)^{-1} & 0 \\ 0 & T_2(\theta_d-\theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{dq,s} \\ \lambda_{dq,r} \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} v_{dq,s} \\ v_{dq,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |R_s| & 0 \\ 0 & |R_r| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{dq,s} \\ i_{dq,r} \end{vmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \lambda_{dq,s} \\ \lambda_{dq,r} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} |J|\omega_d & 0 \\ 0 & |J|(\omega_d-\omega_{me}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{dq,s} \\ \lambda_{dq,r} \end{vmatrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

EQUAZIONI DI LEGAME NEI VARI RIFERIMENTI

STAZIONARIO:

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2(-\theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{dq,s} \\ \lambda_{dq,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,ss} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,sr} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,rs} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,rr} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2(-\theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{dq,s} \\ i_{dq,r} \end{vmatrix}$$

ROTANTE SOLIDALE CON IL ROTORE:

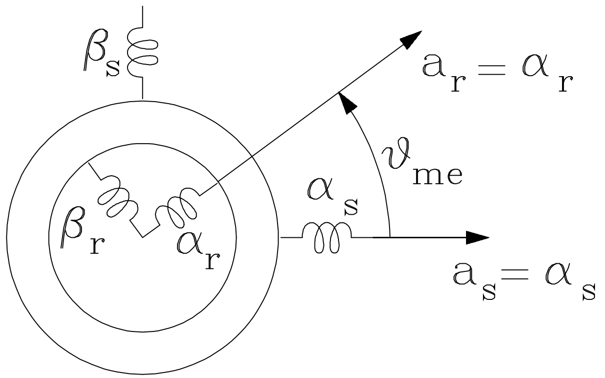
$$\begin{vmatrix} T_2(\theta_{me})^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{dq,s} \\ \lambda_{dq,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,ss} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,sr} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,rs} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,rr} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_2(\theta_{me})^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{dq,s} \\ i_{dq,r} \end{vmatrix}$$

GENERICO:

$$\begin{vmatrix} T_2(\theta_d)^{-1} & 0 \\ 0 & T_2(\theta_d - \theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_{dq,s} \\ \lambda_{dq,r} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,ss} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,sr} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,rs} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{\alpha\beta,rr} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_2(\theta_d)^{-1} & 0 \\ 0 & T_2(\theta_d - \theta_{me})^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{dq,s} \\ i_{dq,r} \end{vmatrix}$$

MODELLO DEL M.A.
(riferimento stazionario)



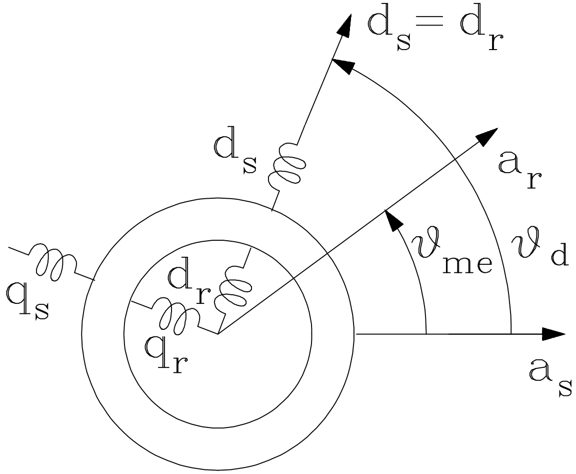
$$v_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt}$$

$$v_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt}$$

$$v_{\alpha r} = 0 = R_r i_{\alpha r} + \frac{d\lambda_{\alpha r}}{dt} + \omega_{me}\lambda_{\beta r}$$

$$v_{\beta r} = 0 = R_r i_{\beta r} + \frac{d\lambda_{\beta r}}{dt} - \omega_{me}\lambda_{\alpha r}$$

MODELLO DEL M.A.
(riferimento generico rotante con ω_d)



$$v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} - \omega_d \lambda_{qs}$$

$$v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} + \omega_d \lambda_{ds}$$

$$v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \frac{d\lambda_{dr}}{dt} - (\omega_d - \omega_{me})\lambda_{qr}$$

$$v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \frac{d\lambda_{qr}}{dt} + (\omega_d - \omega_{me})\lambda_{dr}$$

EQUAZIONI DI LEGAME

Si può dimostrare (esplicitando analiticamente le equazioni della dia 30) che in qualsiasi sistema di riferimento le equazioni di legame hanno gli stessi parametri, indipendenti dalla posizione del rotore (angolo θ_{me}).

Riferimento stazionario:

$$\lambda_{\beta s} = L_s i_{\alpha s} + L_M \frac{N_r}{N_s} i_{\alpha r}$$

$$\lambda_{\beta s} = L_s i_{\beta s} + L_M \frac{N_r}{N_s} i_{\beta r}$$

$$\lambda_{\alpha r} = L_M \frac{N_r}{N_s} i_{\alpha s} + L_r i_{\alpha r}$$

$$\lambda_{\beta r} = L_M \frac{N_r}{N_s} i_{\beta s} + L_r i_{\beta r}$$

apice ^{s} omesso

Riferimento generico

$$\lambda_{ds} = L_s i_{ds} + L_M \frac{N_r}{N_s} i_{dr}$$

$$\lambda_{qs} = L_s i_{qs} + L_M \frac{N_r}{N_s} i_{qr}$$

$$\lambda_{dr} = L_M \frac{N_r}{N_s} i_{ds} + L_r i_{dr}$$

$$\lambda_{qr} = L_M \frac{N_r}{N_s} i_{qs} + L_r i_{qr}$$

apice ^{d} omesso

GRANDEZZE DI ROTORE: PRECISAZIONI

Le grandezze relative al rotore (tensioni, correnti, flussi, induttanze, resistenze ecc.) che compaiono nelle espressioni precedenti in realtà sono grandezze *"non riportate"*.

Associando convenientemente i rapporti di trasformazione e moltiplicando ambo i membri per stesse quantità opportune, si ottengono:

$$\lambda_{ds} = L_s i_{ds} + L_M \underbrace{\left(\frac{N_r}{N_s} i_{dr} \right)}_{i_{dsr}}$$

$$\lambda_{qs} = L_s i_{qs} + L_M \left(\frac{N_r}{N_s} i_{qr} \right)$$

$$\underbrace{\frac{N_s}{N_r} \lambda_{dr}}_{\lambda_{dsr}} = L_M i_{ds} + \underbrace{L_r \left(\frac{N_s}{N_r} \right)^2}_{L_{sr}} \underbrace{\left(\frac{N_r}{N_s} i_{dr} \right)}_{i_{dsr}}$$

$$\frac{N_s}{N_r} \lambda_{qr} = L_M i_{qs} + L_r \left(\frac{N_s}{N_r} \right)^2 \left(\frac{N_r}{N_s} i_{qr} \right)$$

Per motivi di chiarezza (più evidenti nel seguito) si chiami questo passaggio:

riporto o passaggio rotore-statore dovuto al modello

EQUAZIONI DI LEGAME (e di tensione)

In definitiva usualmente le equazioni di legame si scrivono

Riferimento stazionario:

$$\lambda_{\alpha s} = L_s i_{\alpha s} + L_M i_{\alpha r}$$
$$\lambda_{\beta s} = L_s i_{\beta s} + L_M i_{\beta r}$$
$$\lambda_{\alpha r} = L_M i_{\alpha s} + L_r i_{\alpha r}$$
$$\lambda_{\beta r} = L_M i_{\beta s} + L_r i_{\beta r}$$

Riferimento generico:

$$\lambda_{ds} = L_s i_{ds} + L_M i_{dr}$$
$$\lambda_{qs} = L_s i_{qs} + L_M i_{qr}$$
$$\lambda_{dr} = L_M i_{ds} + L_r i_{dr}$$
$$\lambda_{qr} = L_M i_{qs} + L_r i_{qr}$$

Dove il pedice "$_{sr}$", per semplicità di scrittura e per uniformarsi all'usuale nomenclatura presente in letteratura è stato indicato semplicemente "$_{r}$".

Operando in maniera analoga sulle equazioni di tensione (quelle di rotore): moltiplicazione ambo i membri per ${}^{N_r}/_{N_s}$ e poi per $\left({}^{N_r}/_{N_s}\,{}^{N_s}/_{N_r}\right)$ il solo termine c.d.t resistiva, si perviene alle stesse conclusioni sopra dette.

ESPRESSIONE DELLA COPPIA

Come usuale si valuta il bilancio energetico

$$\underset{(elettrica)}{P_{entrante}} = \underset{(elettrica\ e\ meccanica)}{P_{energia\ immagazzinata}} + \underset{(elettrica\ e\ meccanica)}{P_{dissipata}} + \underset{(meccanica)}{P_{uscente}}$$

$$P_{\substack{elettrica\\entrante}} = v_{as}i_{as} + v_{bs}i_{bs} + v_{cs}i_{cs} + v_{ar}i_{ar} + v_{br}i_{br} + v_{cr}i_{cr}$$

Con espressione matriciale: $P_{\substack{elettrica\\entrante}} = \left|i_{abc,s}\right|^T \left|v_{abc,s}\right| + \left|i_{abc,r}\right|^T \left|v_{abc,r}\right|$

$$P_{meccanica} = \omega_m c$$

$P_{meccanica}$ è la potenza meccanica totale (inclusiva delle perdite meccaniche) derivante dalla conversione elettromeccanica. Quindi c è la coppia elettromagnetica prodotta dal motore. Per trovare la coppia utile all'asse bisognerebbe sottrarre a c la coppia di attrito.

ESPRESSIONE DELLA COPPIA

Applicando la trasformazione che porta in un sistema bifase di statore (T_1 sullo statore T_2T_1 sul rotore) si ottiene:

$$P_{\substack{elettrica\\entrante}} = \left(T_1^{-1}\left|i_{\alpha\beta0,s}\right|\right)^T \left(T_1^{-1}\left|v_{\alpha\beta0,s}\right|\right) +$$

$$+\left(T_1^{-1}T_2^{-1}(-\theta_{me})\left|i_{\alpha\beta0,r}\right|\right)^T \left(T_1^{-1}T_2^{-1}(-\theta_{me})\left|v_{\alpha\beta0,r}\right|\right)$$

$$P_{\substack{elettrica\\entrante}} = \left|i_{\alpha\beta0,s}\right|^T \left(T_1^{-1}\right)^T \left(T_1^{-1}\right)\left|v_{\alpha\beta0,s}\right| +$$

$$+\left|i_{\alpha\beta0,r}\right|^T \left(T_1^{-1}T_2^{-1}(-\theta_{me})\right)^T \left(T_1^{-1}T_2^{-1}(-\theta_{me})\right)\left|v_{\alpha\beta0,r}\right| =$$

$$= \left|i_{\alpha\beta0,s}\right|^T \left(T_1^{-1}\right)^T \left(T_1^{-1}\right)\left|v_{\alpha\beta0,s}\right| +$$

$$+\left|i_{\alpha\beta0,r}\right|^T \left(T_2^{-1}(-\theta_{me})\right)^T \left(T_1^{-1}\right)^T T_1^{-1}T_2^{-1}(-\theta_{me})\left|v_{\alpha\beta0,r}\right|$$

ESPRESSIONE DELLA COPPIA

Si ricordi che nel caso $K = \sqrt{\frac{2}{3}}$ si ha

$$\left(T_1^{-1}\right)^T T_1^{-1} = \left(T_1^T\right)^T T_1^{-1} = T_1 T_1^{-1} = I$$

mentre nel caso $K = \frac{2}{3}$ si ottiene

$$\left(T_1^{-1}\right)^T T_1^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi scegliendo $K = \frac{2}{3}$ ne consegue:

$$P_{\substack{elettrica \\ entrante}} - P_{meccanica} = \frac{3}{2}\left(v_{\alpha s} i_{\alpha s} + v_{\beta s} i_{\beta s} + v_{\alpha r} i_{\alpha r} + v_{\beta r} i_{\beta r}\right) - \omega_m c$$

ESPRESSIONE DELLA COPPIA

Sostituendo alle tensioni le espressioni delle equazioni elettriche si perviene alla equazione

$$P_{\substack{elettrica \\ entrante}} - P_{meccanica} = -\omega_m c +$$

$$+\frac{3}{2}\left(R_s i_{\alpha s}^2 + \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} i_{\alpha s} + R_s i_{\beta s}^2 + \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt} i_{\beta s} + R_s i_{\alpha r}^2 + \frac{d\lambda_{\alpha s}}{dt} i_{\alpha r} + \omega_{me} \lambda_{\beta r} i_{\alpha r} + R_s i_{\beta r}^2 + \frac{d\lambda_{\beta s}}{dt} i_{\beta r} - \omega_{me} \lambda_{\alpha r} i_{\beta r} \right)$$

isolando poi i termini della potenza persa e di quella immagazzinata nel campo magnetico, come già fatto nel caso del motore a c.c., si perviene alla equazione della coppia

$$c = \frac{3}{2} p \left(\lambda_{\beta r} i_{\alpha r} - \lambda_{\alpha r} i_{\beta r} \right)$$

dove p è n° di coppie polari, il quale interviene con la nota relazione

$$\omega_{me} = p\,\omega_m$$

ESPRESSIONE DELLA COPPIA

Utilizzando le equazioni di legame (vedi dia 35) opportunamente elaborate

$$i_{\alpha r} = \frac{1}{L_M}\lambda_{\alpha s} - \frac{L_s}{L_M} i_{\alpha s}$$

$$i_{\beta r} = \frac{1}{L_M}\lambda_{\beta s} - \frac{L_s}{L_M} i_{\beta s}$$

$$\lambda_{\alpha r} = L_M i_{\alpha s} + L_r i_{\alpha r}$$

$$\lambda_{\beta r} = L_M i_{\beta s} + L_r i_{\beta r}$$

L'espressione della coppia può essere messa in funzione delle sole quantità di statore (sostituendo alle quantità di rotore quelle ottenute dalle equazioni di legame qui sopra riportate). Così facendo si perviene alla

$$c = \frac{3}{2} p\left(\lambda_{\alpha s} i_{\beta s} - \lambda_{\beta s} i_{\alpha s}\right)$$

ALTRE ESPRESSIONI DELLA COPPIA

Utilizzando sempre le equazioni di legame, si possono ottenere, a partire da quelle già proposte, altre espressioni per la coppia prodotta dal motore. Infatti assumendo come espressione base (di partenza) la seguente

$$c = \frac{3}{2} p\left(\lambda_{\alpha s} i_{\beta s} - \lambda_{\beta s} i_{\alpha s}\right)$$

Sostituendo alle componenti del flusso di statore le prime due espressioni delle equazioni di legame della dia 35 si ha

$$c = \frac{3}{2} p\left[\left(L_s i_{\alpha s} + L_M i_{\alpha r}\right) i_{\beta s} - \left(L_s i_{\beta s} + L_M i_{\beta r}\right) i_{\alpha s}\right]$$

da cui

$$c = \frac{3}{2} p\, L_M \left(i_{\alpha r} i_{\beta s} - i_{\beta r} i_{\alpha s}\right)$$

Procedendo in modo analogo, p.es. ricavando, sempre dalle equazioni di legame, i flussi di statore in funzione dei flussi di rotore (e delle correnti di statore) si perviene a

$$c = \frac{3}{2} \frac{L_M}{L_r} p\left(\lambda_{\alpha r} i_{\beta s} - \lambda_{\beta r} i_{\alpha s}\right)$$

e così via…

ALTRE ESPRESSIONI DELLA COPPIA

Va osservato che tutte le espressioni energetiche (comprese quelle della coppia) **NON dipendono dal sistema di riferimento**: stazionario o rotante generico che sia. Per cui tutte le equazioni viste prima possono essere riscritte sostituendo ai pedici α e β i pedici d e q rispettivamente.

Ad esempio:

$$c = \frac{3}{2} p\left(\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}\right)$$

$$c = \frac{3}{2} p\, L_M \left(i_{dr} i_{qs} - i_{qr} i_{ds}\right)$$

$$c = \frac{3}{2} p \frac{L_M}{L_r}\left(\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}\right)$$

ecc., ecc. ….

ALTRE ESPRESSIONI DELLA COPPIA

Un esercizio potrebbe essere (se non si è convinti di quanto affermato nella dia precedente):

riscrivere re-interpretando l'equazione della potenza entrante della dia 37, esprimendola in un sistema di riferimento generico.

Si devono utilizzare sia per lo statore che per il rotore la trasformazione composta T_2T_1, per lo statore con la $T_2(\theta_d)$ e per il rotore con la $T_2(\theta_d-\theta_{me})$. Si arriva alla

$$P_{\substack{elettrica\\entrante}} - P_{meccanica} = \frac{3}{2}\left(v_{ds}i_{ds} + v_{qs}i_{qs} + v_{dr}i_{dr} + v_{qr}i_{qr}\right) - \omega_m c$$

Quindi sostituire le equazioni delle tensioni del modello matematico in un riferimento generico e particolarizzare poi il sistema di riferimento, verificando (come curiosità) che nel caso rotante alla pulsazione ω_{me} si perviene direttamente alla $c = \frac{3}{2}p\left(\lambda_{ds}i_{qs} - \lambda_{qs}i_{ds}\right)$

nel caso stazionario (caso visto in precedenza) si perviene direttamente alla $c = \frac{3}{2}p\left(\lambda_{qr}i_{dr} - \lambda_{dr}i_{qr}\right)$

In ogni caso, come detto, tramite le equazioni di legame (anche loro indipendenti dal sistema di riferimento!) si può passare da una all'altra o trovare altre combinazioni di variabili.

MODELLO DEL M.A. espressioni vettoriali (riferimento rotante generico)

Si può passare alle espressioni vettoriali in cui i vettori sono costruiti giustapponendo le componenti di asse diretto (parte reale) e in quadratura (parte immaginaria); in maniera analoga si procede con le equazioni.

$$\bar{\lambda}_s = L_s \bar{i}_s + L_M \bar{i}_r$$

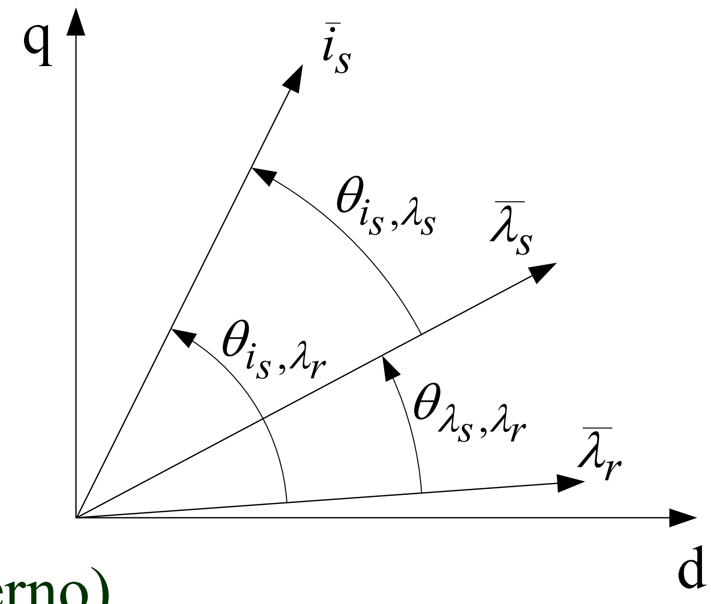
$$\bar{\lambda}_r = L_M \bar{i}_s + L_r \bar{i}_r$$

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\lambda}_s}{dt} + j\omega_d \bar{\lambda}_s$$

$$\bar{v}_r = 0 = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\lambda}_r}{dt} + j(\omega_d - \omega_{me})\bar{\lambda}_r$$

$$c = \frac{3}{2} p \Re\left[\bar{i}_s \left(j\bar{\lambda}_s\right)^*\right] \qquad c = \frac{3}{2} p \lambda_s i_s sen\left(\theta_{is,\lambda s}\right)$$

$$c = \frac{3}{2} p\left[\bar{i}_s \cdot \left(j\bar{\lambda}_s\right)\right]$$



Il segno • indica il prodotto scalare (interno)

EQUAZIONE MECCANICA

Oltre le equazioni che descrivono la parte elettrica del motore c'è anche l'equazione meccanica

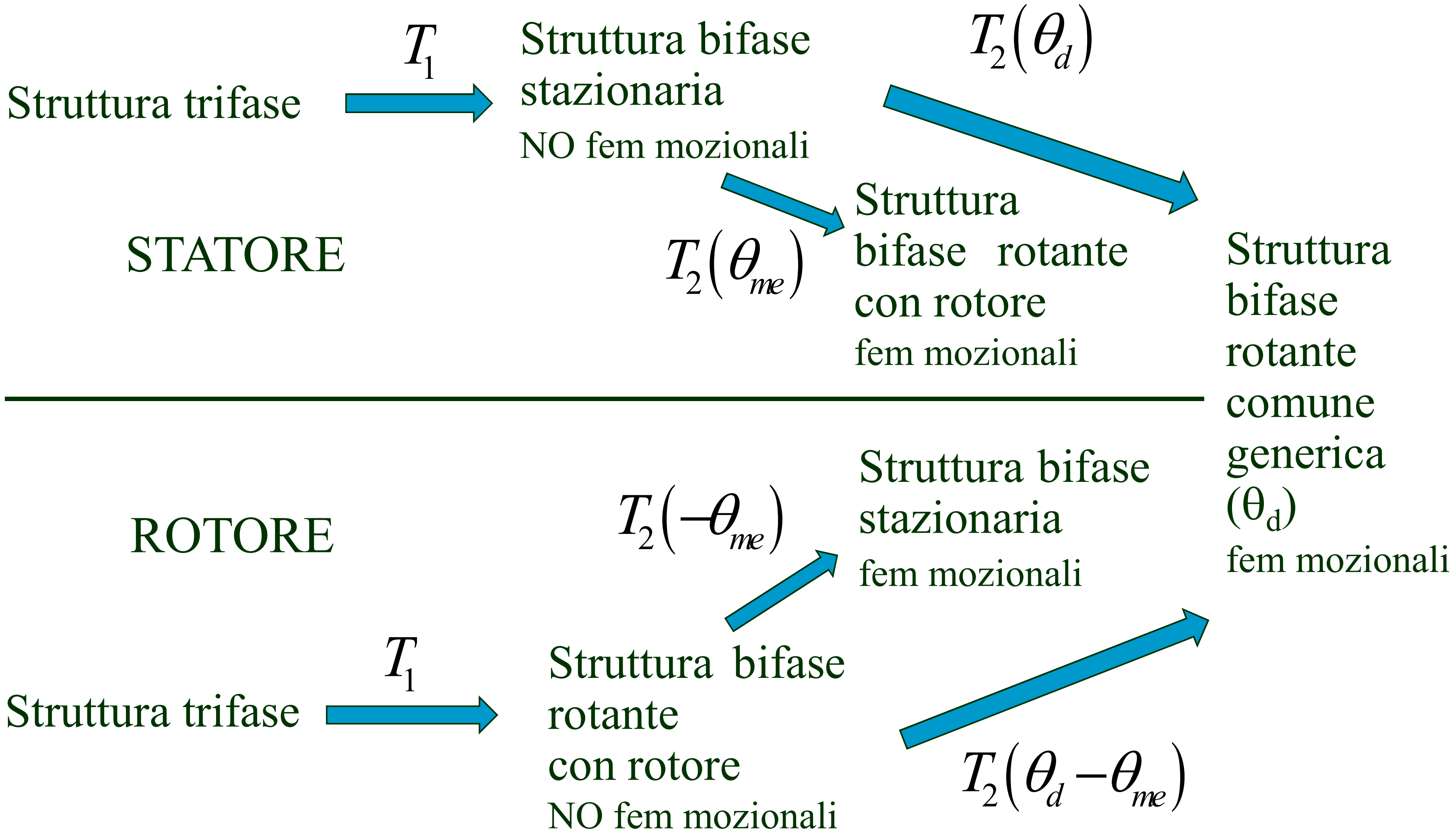
$$c - c_c = J \frac{d}{dt}\omega_m + B\omega_m$$

dove c è la coppia fornita dal motore, c_c è la coppia di carico (eventualmente può avere una sua dinamica), J il momento d'inerzia (comprensivo del momento d'inerzia del carico o meno a seconda delle necessità), B il coefficiente di attrito viscoso, ω_m la velocità meccanica del motore. Quest'ultima è legata, come già rammentato precedentemente, alla pulsazione elettrica da

$$\omega_m = \frac{\omega_{me}}{p}$$

p è il numero di coppie polari

QUADRO RIASSUNTIVO TRASFORMAZIONI EQUAZIONI DIFFERENZIALI



QUADRO RIASSUNTIVO TRASFORMAZIONI EQUAZIONI DI LEGAME

STATORE

Struttura trifase auto-mutue indipendenti da θ_{me} (rotore liscio)

$\xrightarrow{T_1}$

Struttura bifase stazionaria auto indipendenti da θ_{me} NO mutue

$\xrightarrow{T_2(\theta_d)}$

Struttura bifase rotante comune generica (θ_d) auto indipendenti da θ_{me} NO mutue

ROTORE

Struttura trifase auto-mutue indipendenti da θ_{me} (rotore liscio)

$\xrightarrow{T_1}$

Struttura bifase rotante con rotore auto indipendenti da θ_{me} NO mutue

$\xrightarrow{T_2(\theta_d - \theta_{me})}$

Struttura bifase rotante comune generica (θ_d) auto indipendenti da θ_{me} NO mutue

QUADRO RIASSUNTIVO TRASFORMAZIONI EQUAZIONI DI LEGAME

STATORE-ROTORE

Strutture trifase originali
mutue statore-rotore e vic.
variabili con θ_{me}

$\xrightarrow{T_1}$

Strutture bifase
stazionaria su statore
rotante su rotore
mutue statore-rotore e vic.
variabili con θ_{me}

$T_2(\theta_d)$
statore

$T_2(\theta_d - \theta_{me})$
rotore

$\Downarrow$

Struttura bifase rotante comune generica (θ_d)
mutue statore-rotore e vic. indipendenti da θ_{me}
(avvolgimenti di statore e rotore fissi tra loro)