

# **Corso di Laurea in Ingegneria Navale e Industriale**

## **Geometria**

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2023–2024



## Richiami sugli insiemi

**Insieme.** Collezione di elementi (oggetti) di cui non si considera l'ordine e senza ripetizioni.

Un insieme si può assegnare elencandone gli elementi tra parentesi graffe

$$\{1\}, \quad \{3, -7, 42\}, \quad \{2, 12, 132, -1, 0\}$$

Esiste un insieme senza elementi, detto insieme vuoto e denotato con  $\emptyset$

In molti casi un insieme si assegna specificando una proprietà  $\mathcal{P}$  che ne caratterizza gli elementi. In simboli

$$X = \{x \mid x \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

$X$  è quindi l'insieme di tutti e soli gli elementi che hanno la proprietà  $\mathcal{P}$ , qualunque essa sia.

**Esempio.**  $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ è un numero naturale}\}$  è l'insieme infinito dei numeri naturali, ad esempio  $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ . Non è possibile elencarli tutti (i puntini non risolvono il problema...).

Per affermare che un elemento  $x$  appartiene all'insieme  $X$  si scrive

$$x \in X$$

e si legge “ $x$  appartiene a  $X$ ”. Il simbolo di non appartenenza è  $\notin$ . Per esempio  $2 \in \{5, 3, 10, 2, 0\}$  ma  $1 \notin \{5, 3, 10, 2, 0\}$ .

Per affermare che un insieme  $X$  è contenuto in un insieme  $Y$  si scrive

$$X \subset Y$$

e si legge “ $X$  è sottoinsieme di  $Y$ ” o anche “ $X$  è contenuto in  $Y$ ”. Precisamente questo significa che ogni elemento di  $X$  appartiene a  $Y$ . Non confondere inclusione (di sottoinsiemi) e appartenenza (di elementi). Per esempio

$$\{0, 3\} \subset \{5, 3, 10, 2, 0\}, \quad 3 \in \{5, 3\}, \quad \{3\} \subset \{5, 3\}, \quad \{3\} \notin \{5, 3\}$$

$$\{0, 3\} \notin \{10, 2, 0\}, \quad \{0, 3\} \in \{10, 2, 0, \{3, 0\}\}.$$

Se  $X \subset Y$  scriviamo anche  $Y \supset X$  (si legge  $Y$  contiene  $X$ ).

Due insiemi  $X$  e  $Y$  sono uguali (sono lo stesso insieme) se hanno gli stessi elementi:  $X = Y$  se e solo se  $X \subset Y$  e  $Y \subset X$ . Ad esempio

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} \quad \text{ma} \quad \{1, 2\} \neq \{3, 2\}.$$

## Operazioni tra insiemi

**Intersezione.**  $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ e } x \in Y\}$

Esempio:  $\{1, 2, 3, 5\} \cap \{10, 9, 1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$ .

Si ha  $X \cap Y \subseteq X$  e  $X \cap Y \subseteq Y$ .

$X$  e  $Y$  sono detti disgiunti se  $X \cap Y = \emptyset$ , ovvero se  $X$  e  $Y$  non hanno nessun elemento in comune.

**Unione.**  $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\}$

Esempio:  $\{1, 2, 3, 5\} \cup \{10, 9, 1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 10, 9\}$ .

Si ha  $X \subseteq X \cup Y$  e  $Y \subseteq X \cup Y$ .

**Coppie ordinate.** Una coppia ordinata  $(x, y)$  di elementi (detti componenti) è un insieme in cui conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni. Ad esempio  $(2, 3)$  è diverso da  $(3, 2)$  ed è diverso da  $\{2, 3\}$ . Anche  $(1, 1)$  è una coppia ordinata, in questo caso con le due componenti uguali.

**$n$ -uple ordinate.** Più in generale si possono fare  $n$ -uple ordinate

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

cioè insiemi di  $n \geq 1$  componenti in cui conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni. Le 2-uple sono le coppie, le 3-uple sono dette terne, le 4-uple quaterne.

**Prodotto cartesiano.**  $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$  è l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui la prima componente appartiene al primo insieme e la seconda al secondo insieme.

$$\{1, 2, 3\} \times \{3, 5\} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$$

**Oss.** Se  $X$  ha  $m$  elementi e  $Y$  ha  $n$  elementi allora  $X \times Y$  ha  $mn$  elementi.

Più in generale si può definire il prodotto cartesiano di un numero  $n$  arbitrario di insiemi  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

cioè l'insieme di tutte le  $n$ -uple ordinate in cui la prima componente appartiene al primo insieme, la seconda al secondo e così via, in tutti i modi possibili.

Si pone  $X^n = X \times \cdots \times X$ , prodotto di  $X$  con sé stesso  $n$  volte. Quindi  $X^1 = X$ ,  $X^2 = X \times X$ ,  $X^3 = X \times X \times X$ , ... Ad esempio

$$\{1, 2\}^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

**Quantificatori.** In Matematica e in logica si usano i seguenti quantificatori.

- $\forall$  “per ogni” (quantificatore universale)
- $\exists$  “esiste (almeno uno)” (quantificatore esistenziale)
- $\exists!$  “esiste unico” (quantificatore unico)
- $\nexists$  “non esiste”

## Numeri

**Numeri naturali.** L'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali l'abbiamo già incontrato. In questo insieme è definita l'addizione e la moltiplicazione, ma non sempre si può fare la sottrazione o la divisione.

**Numeri interi.**  $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ è un numero intero}\}$  è l'insieme dei numeri interi, ad esempio

$$\dots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Su  $\mathbb{Z}$  sono definite l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione.

**Numeri razionali.**  $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ è un numero razionale}\}$  è l'insieme dei numeri razionali, ad esempio

$$-3, 0, 5, \frac{1}{2}, \frac{17}{6}, -\frac{143}{141}, \dots$$

Su  $\mathbb{Q}$  sono definite l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione per un numero diverso da 0.

**Numeri reali.**  $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ è un numero reale}\}$  è l'insieme dei numeri reali, ad esempio

$$-3, 0, 5, \frac{1}{2}, -\frac{17}{6}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt{5}}, \pi, e, \dots$$

Come su  $\mathbb{Q}$ , anche su  $\mathbb{R}$  sono definite l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione per un numero diverso da 0. Si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

## Funzioni

Dati due insiemi  $X$  e  $Y$ , una funzione o applicazione o mappa  $f: X \rightarrow Y$  è una terna ordinata  $f = (X, Y, G_f)$  dove  $G_f \subset X \times Y$  soddisfa la proprietà seguente: per ogni  $x \in X$  esiste un unico  $y \in Y$  t.c.  $(x, y) \in G_f$  e si scrive  $y = f(x)$ .

$X$  si chiama dominio,  $Y$  codominio e  $G_f$  si chiama grafico di  $f$ . Pertanto  $(x, f(x)) \in G_f$  e possiamo anche scrivere  $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ . L'elemento  $f(x) \in Y$  si dice immagine di  $x \in X$  tramite  $f$ .

**Oss.** Per una funzione dominio, codominio e grafico non vanno “trovati” essendo dati a priori. Il grafico rappresenta la legge che permette di associare ad ogni elemento del dominio il corrispondente elemento del codominio.

Per dare una funzione occorre quindi dare dominio, codominio e grafico, assegnato in genere dicendo come si passa da dominio a codominio. Ad esempio

$$\begin{aligned} h : \{1, 2, 3\} &\rightarrow \{1, 2\} \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

è la funzione con grafico  $G_h = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ .