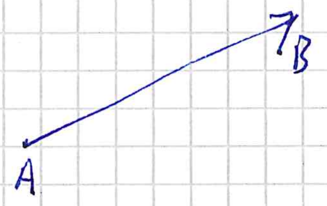
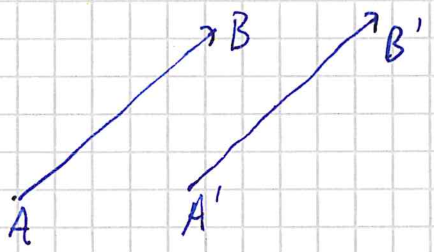
VETTORI NELLO SPAZIO

La nozione naïve di vettore è la seguente: si definisce "segmento orientato" una porzione di retta compresa tra due punti A e B. A si dice "punto iniziale", B si dice "punto finale". Per evidenziare l'orientamento si usa una notazione "a frecce"



Il segmento si indica con $\overrightarrow{AB}$.

Due segmenti orientati si dicono equivalenti se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.

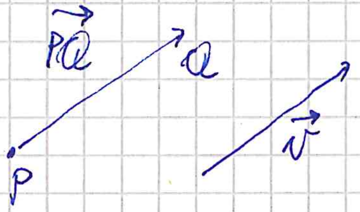


Una classe di equivalenza di segmenti orientati si dice "vettore", e si scrive $\vec{v}$

La lunghezza di un vettore si dice modulo o norma e si indica con $|\vec{v}|$

(10)

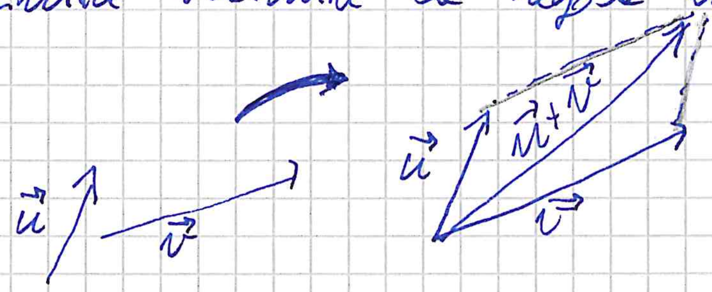
Dato un punto P e un vettore $\vec{v}$ esiste un unico punto Q tale che $\vec{PQ} \sim \vec{v}$



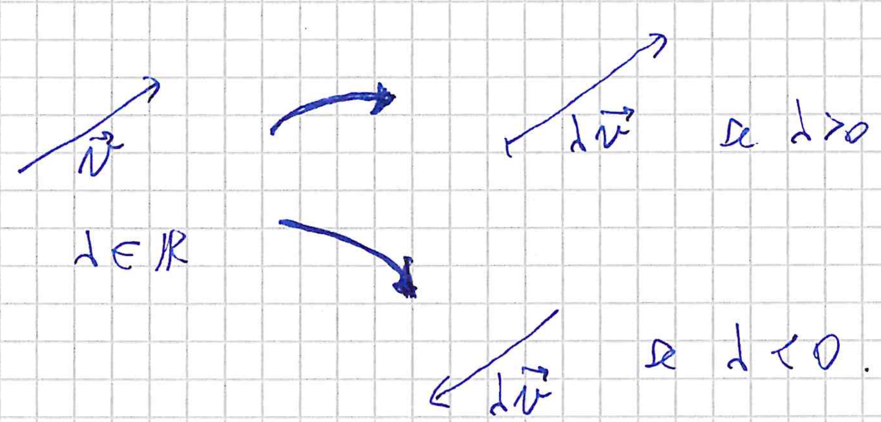
Il segmento orientato $\vec{PQ}$ può quindi essere interpretato come un "vettore applicato a P". (interpretazione tipica nel caso delle forze).

SOMMA DI VETTORI

È definita tramite la regola del parallelogramma.



MOLTIPLICAZIONE per un fattore di scala

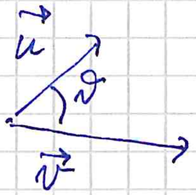


In ogni caso $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| \, |\vec{v}|$

Notare che $(-1)\vec{v}$ è t.c. $\vec{v} + (-1)\vec{v} = 0$.
Quindi $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ (opposto di $\vec{v}$)

Si definisce $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$

PRODOTTO SCALARE



$$\vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\vartheta$$

$$\vartheta \in [0, \pi]$$

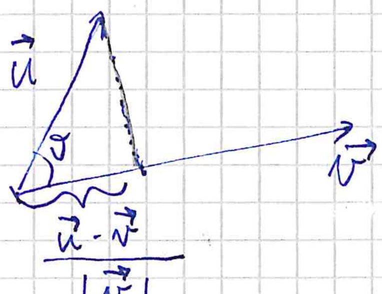
se $0 \leq \vartheta < \pi/2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

se $\vartheta = \pi/2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

se $\pi/2 < \vartheta \leq \pi$, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

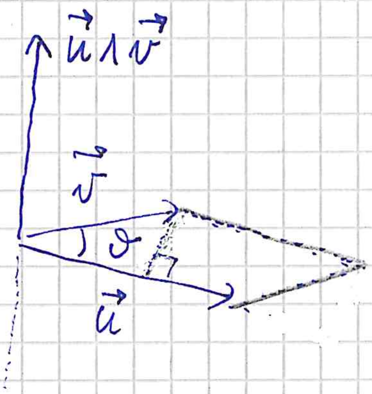
OSS.

$\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ è la lunghezza della proiezione di $\vec{u}$ sulla retta individuata da $\vec{v}$, con segno.



$(0 < \vartheta < \pi/2)$

PRODOTTO VETTORIALE



$0 \leq \vartheta \leq \pi$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$

È il vettore che ha

- modulo uguale all'area del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cioè $|\vec{u}||\vec{v}| \sin\vartheta$
- direzione ortogonale sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$
- verso scelto in modo da formare una "terna destrorsa", ovvero il verso di avanzamento di una vite standard quando col cacciavite porto $\vec{u}$ su $\vec{v}$ con un angolo $\leq \pi$.

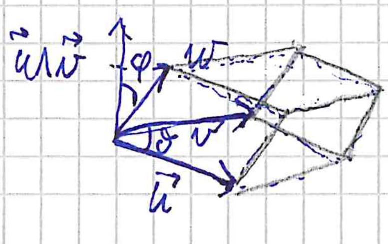
N.B. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

e $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$

N.B. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \pm \mathrm{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

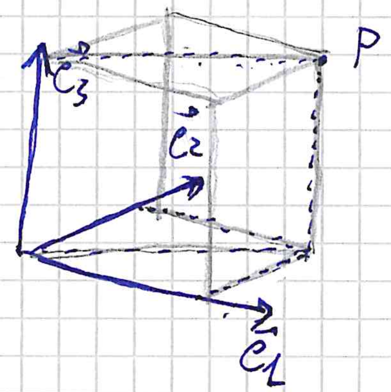
segno dipende da orientamento.

parallelepipedo individuato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



Queste definizioni non sono rigorose e sono "geometriche". Ora partendo da queste base intuitiva vogliamo costruire una teoria rigorosa dei vettori, basata sui numeri (coordinate), con cui sia possibile "fare i calcoli".

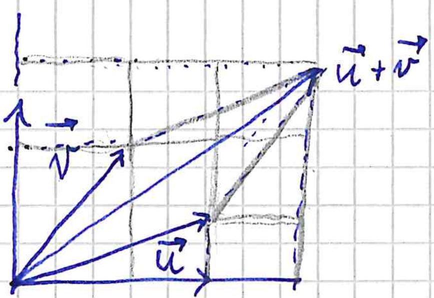
Se fissiamo un'origine O e un sistema di riferimento ortogonale $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ di vettori applicati a O, ogni punto dello spazio 3-d può essere individuato in modo univoco da una terna di numeri reali



$$\vec{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \simeq (x_1, x_2, x_3)$$

notare che
$$\vec{e}_1 \simeq (1,0,0)$$
$$\vec{e}_2 \simeq (0,1,0)$$
$$\vec{e}_3 \simeq (0,0,1)$$

(14)



la regola del parallelogramma diventa:

$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$
$\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$

$\vec{u}+\vec{v} = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

(il disegno per semplicità rappresenta una situazione in cui $\vec{u}$ e $\vec{v}$ appartengono al piano individuato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$)

la moltiplicazione di $\vec{v}$ per un numero λ diventa

$\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

$\mapsto$ Arriviamo quindi a introdurre una struttura algebrica in $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

SPAZIO VETTORIALE

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \underset{\text{df.}}{:=} (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) \underset{\text{df.}}{:=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Indicando $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$
$\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$

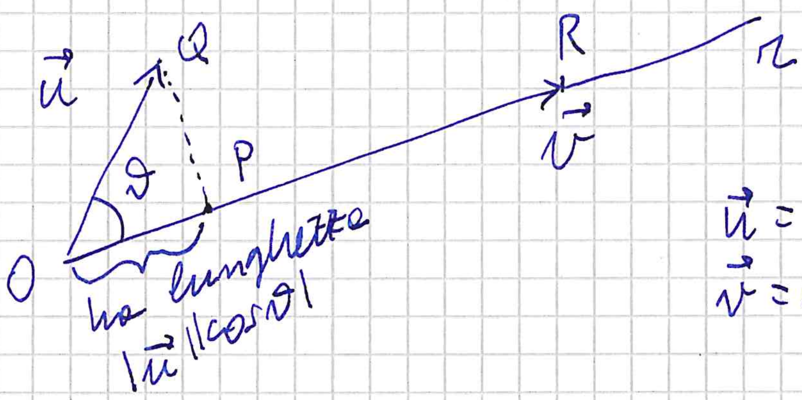
si verifica facilmente che:

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, dove $0 = (0, 0, \dots, 0)$
4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$, dove $-\vec{u} = (-x_1, \dots, -x_n)$
5) $\lambda(\mu \vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
6) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
7) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
8) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

Queste due operazioni, somma e moltiplicazione per uno scalare, danno a $\mathbb{R}^n$ la struttura di <u>spazio vettoriale</u>.

Vediamo ora come si trasporta in $\mathbb{R}^3$ o più in generale in $\mathbb{R}^n$ il concetto di prodotto scalare, di lunghezza di un vettore e nel caso di $\mathbb{R}^3$ il prodotto vettoriale.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\vartheta$



$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$

$|\vec{u}|\cos\vartheta$ (con segno) rappresenta la proiezione ortogonale di $\vec{u}$ sulla retta individuata da $\vec{v}$

$$\vec{OP} = \underbrace{|\vec{u}|\cos\vartheta}_{\text{coefficiente}} \; \underbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

vettore di norma 1 che ha la stessa direzione e verso di $\vec{v}$

Il punto P minimizza la distanza di Q dai punti della retta r generata da $\vec{v}$.

I punti di r sono l'insieme

$\{ t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$

Introduciamo quindi la funzione

$$\varphi(t) := |\vec{u} - t\vec{v}|^2 \;, \quad t \in \mathbb{R}$$

dove $|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (Pitagora)

Allora dobbiamo trovare il punto di minimo di $\varphi(t)$ e quindi calcoliamo la derivata e vediamo dove si annulla.

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}(x_i - t y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} 2(x_i - t y_i) y_i$$

$$\varphi'(t) = 0 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i = t \sum_{i=1}^{3} y_i^2$$

cioè $$t = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i}{|\vec{v}|^2}$$

Il minimo si avrà quindi in P t.c.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i}{|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

sapre che $$|\vec{u}|\cos\vartheta = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i}{|\vec{v}|}$$

da cui $$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\vartheta = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i}$$

(18)

Queste formule ottenute in modo euristico ci suggerisce come introdurre il concetto di prodotto scalare direttamente in coordinate, in dimensione qualunque.

Se $\vec{u} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

definiamo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Si vede facilmente che:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$

La norma di $\vec{u} = (x_1, x_2, .., x_n)$ è

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Osserviamo che

1) $\|\vec{u}\| \geq 0 \quad \forall \vec{u}$

2) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$

3) $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$

Due vettori si diranno ortogonali se e solo se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vediamo ora alcune importanti proprietà del prodotto scalare e della norma.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$

poiché $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|\vec{u}\|} \frac{y_i}{\|\vec{v}\|} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{x_i^2}{\|\vec{u}\|^2} + \frac{y_i^2}{\|\vec{v}\|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sum x_i^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum y_i^2}{\|v\|^2}\right) = 1$$

da cui $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

ovvero $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

da cui $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Disuguaglianza triangolare

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

da cui $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Def.

Distanza

Se $P, Q \in \mathbb{R}^n$

definiamo $\operatorname{dist}(P,Q) := \|\vec{OP} - \vec{OQ}\|$

Si ha:

1) $\operatorname{dist}(P,Q) \geq 0$ e $\operatorname{dist}(P,Q) = 0 \iff P = Q$

2) $\operatorname{dist}(P,Q) = \operatorname{dist}(Q,P)$

3) $\operatorname{dist}(P,S) \leq \operatorname{dist}(P,Q) + \operatorname{dist}(Q,S)$

OSSERVAZIONE

Se $\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \cong (x_1, \dots, x_n)$

allora $\vec{v} \cdot \vec{e}_j = x_j \quad \forall j$

e quindi $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{v} \cdot \vec{e}_j)\, \vec{e}_j$.

Segue facilmente che $\vec{v} = 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w}$