Durata: 5 ore.

Esercizio 1

Dati due parametri reali α e A, considera la funzione reale di due variabili reali x, y

$$u(x,y) = 1 + x^\alpha - A\, x\, y^2 \ .$$

I - (4 punti) Mostra che è necessario imporre $\alpha = A = 3$ affinchè $u(x,y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinchè

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y) \ ,$$

dove $v(x,y)$ è anche una funzione reale. Poi assumi che $f(0) = 1$ e determina anche la funzione $v(x,y)$, e dunque $f(z)$.

II - (4 punti) Data la $f(z)$ determinata al punto precedente, considera

$$F(z) = \frac{z^3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{f(z)} \ .$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo.

III - (3 punti) Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} dz\, F(z) \ ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 2, orientato in senso antiorario.

[*Suggerimento*: Usa il teorema esterno dei residui.]

Esercizio 2

Data una funzione $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ vale la seguente relazione tra integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \hat{f}(-\omega)\hat{f}(\omega) \ , \tag{1}$$

dove $\hat{f}(\omega)$ è la trasformata di Fourier. L'obiettivo di questo esercizio è derivare e applicare questa relazione.

I - (4 punti) Scrivi la relazione tra $\widehat{f^2}(k)$ – ovvero la trasformata di Fourier di $f(t)^2$ calcolata in $k \in \mathbb{R}$ – e $\hat{f}(\omega)$. Valuta questa relazione a $k = 0$ e mostra che si ottiene la relazione (1). Mostra che (1) si ottiene anche dall'identità di Parseval generalizzata $(\widehat{f^*}, \widehat{f}\,) = 2\pi(f^*, f)$ dove $f^*(t)$ è il complesso coniugato della funzione $f(t)$, e $(\cdot, \cdot)$ è il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$.

II - (3 punti) Considera ora una funzione $G(t)$ tale che valga anche $\frac{dG(t)}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$. Definiamo l'integrale

$$S[G] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\left(\frac{dG(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{T^2} G(t)^2 \right) ,$$

dove T è un parametro reale. Usando la relazione (1) mostra che

$$S[G] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\omega^2 + \frac{1}{T^2} \right) \hat{G}(-\omega)\hat{G}(\omega) \ . \tag{2}$$

III - (3 punti) Considera una funzione $G(t)$ come al punto II e che in aggiunta è soluzione dell'equazione

$$\left(-\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \frac{1}{T^2} G(t) \right) = \delta(t) \ .$$

Usa questa equazione per determinare $\hat{G}(\omega)$ e quindi usa (2) per calcolare $S[G]$.

[*Suggerimento:* Puoi aver bisogno del seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1 + x^2} = \pi \ .]$$

Esercizio 3

Considera la funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{|x|} \ , & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$

Usando questa funzione, definiamo un operatore $T_n : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ come segue

$$T_n(f)(x) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) \ ,$$

dove f è una generica funzione in $L^2(\mathbb{R})$ e n è un intero ≥ 1. L'obiettivo di questo esercizio è mostrare in che senso T_n e $T_n^\dagger$ tendono a 0 per $n \to \infty$.

I - (3 punti) Mostra che $||T_n|| = 1$, per ogni n. Dunque T_n non tende a 0 in norma.

[*Suggerimento*: Scrivi $||T_n(f)||_2^2$, fai un opportuno cambio di variabili, poi usa che $\phi(nx)^2 \leq 1$ per ottenere una stila per tale norma in funzione di $||f||_2^2$. Infine nota che $\phi(nx)^2 = 1$ nell'intervallo $[-1/n, 1/n]$ e quindi...]

II - (4 punti) Trova l'operatore aggiunto $T_n^\dagger$ e mostra che anche $||T_n^\dagger|| = 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque neanche $T_n^\dagger$ tende a 0 in norma.

III - (5 punti) Mostra che $T_n \to 0$ in senso forte (ovvero per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $||T_n(f)||_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$). Deduci che $T_n^\dagger \to 0$ in senso debole (ovvero per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $(f, T_n^\dagger(g)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$).