Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}(\log z)^2}{(1+z)^2} \ .$$

I - (5 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo (incluso eventualmente $z = \infty$).

II - (6 punti) Si usi $f(z)$ per calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}(\log(x)^2 - 2\pi^2)}{(1+x)^2} \ .$$

Esercizio 2

Le *funzioni di Hermite* $f_n(x) \in L^2(\mathbb{R})$ soddisfano l'equazione

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) f_n(x) = (2n+1) f_n(x) \ , \tag{1}$$

dove n è un intero ≥ 0.

I - (5 punti) Deriva l'equazione soddisfatta dalla trasformata di Fourier $\hat{f}_n(k)$. Assumendo che l'equazione (1) ammetta un'unica soluzione a meno di moltiplicazione per costante, deduci che

$$\hat{f}_n = C_n f_n \ , \tag{2}$$

dove C_n è una costante. Infine considera la norma L^2 di entrambi i membri e usa questo per calcolare $|C_n|$.

II - (5 punti) Per $n = 0, 1$ si ha

$$f_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ , \quad f_1(x) = \sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \ .$$

In questi due casi verifica l'equazione (2) calcolando esplicitamente le trasformate di Fourier $\hat{f}_0$ e $\hat{f}_1$, e ottieni quindi C_0 e C_1.

[*Suggerimento:* Per calcolare la trasformata di f_1, usa la proprietà della trasformata di una funzione moltiplicata per x.]

III - (3 punti) Assumendo che siano normalizzate in modo da avere $||f_n||_{L^2} = 1$, le funzioni $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ formano un sistema ortonormale completo su $L^2(\mathbb{R})$. Data una qualsiasi funzione $F \in L^2(\mathbb{R})$, mostra che l'equazione (2) implica una relazione tra i coefficienti di Fourier di F e della sua trasformata di Fourier $\hat{F}$ in questo sistema ortonormale completo.

[*Suggerimento:* Ricorda l'identità di Parseval generalizzata: date $F, G \in L^2(\mathbb{R})$, e dette $\hat{F}$ e $\hat{G}$ le loro trasformate di Fourier, vale $(\hat{F}, \hat{G}) = 2\pi(F, G)$.]

Esercizio 3

Si consideri su uno spazio di Hilbert H con sistema ortonormale completo $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ l'operatore definito da

$$T(e^{(1)}) = 0 \ , \quad T(e^{(n)}) = \frac{1}{n} e^{(n-1)} \text{ per } n > 1 \ .$$

I - (4 punti) Si mostri che l'aggiunto di T è dato da

$$T^\dagger(e^{(n)}) = \frac{1}{n+1} e^{(n+1)} \ .$$

II - (5 punti) Si mostri che T non ha autovettori con autovalore non nullo.