Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1 + \frac{1}{\pi^2 z^2}}{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)} \ .$$

I - (5 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo (incluso eventualmente $z = \infty$).

II - (6 punti) Si calcoli l'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso dato dal cerchio unitario, percorso in senso antiorario.

Esercizio 2

La distribuzione *parte principale di Hadamard*, che si denota con $H\left(\frac{1}{t^2}\right)$, è definita tramite la derivata della usuale distribuzione parte principale (anche detta parte principale di Cauchy) nel modo seguente

$$H\left(\frac{1}{t^2}\right) \equiv -\frac{d}{dt} P\left(\frac{1}{t}\right) \ .$$

I - (4 punti) Data una funzione test f, ricordando la definizione

$$P\left(\frac{1}{t}\right)[f] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} dt \frac{1}{t} f(t) + \int_{+\epsilon}^{+\infty} dt \frac{1}{t} f(t)\right) \ ,$$

e usando la definizione di derivata di una distribuzione, si mostri che

$$H\left(\frac{1}{t^2}\right)[f] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} dt \frac{1}{t^2} f(t) + \int_{+\epsilon}^{+\infty} dt \frac{1}{t^2} f(t) - \frac{f(\epsilon) + f(-\epsilon)}{\epsilon}\right) \ .$$

II - (3 punti) Ricordando l'identità

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{t + i\epsilon} = P\left(\frac{1}{t}\right) - i\pi\delta(t) \ ,$$

si mostri che

$$H\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{(t+i\epsilon)^2} + \frac{1}{(t-i\epsilon)^2}\right) \ . \qquad (1)$$

III - (6 punti) Usando l'identitá (1), si mostri che

$$H\left(\frac{1}{t^2}\right)[e^{i\omega t}] = -\pi|\omega| \ .$$

Esercizio 3

Si consideri il s.o.c. dei coseni su $L^2([0,1])$

$$\{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(n\pi t)\}_{n\geq 1}$$

I - (4 punti) Si calcoli la serie di Fourier in questo sistema della funzione $f(t) = t$.

II - (5 punti) Si utilizzi il risultato precedente per calcolare la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \; .$$