Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^k}{1+z^n} \ .$$

dove k e n sono due numeri interi con $1 \leq k < n$.

I - (3 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo.

II - (4 punti) Si trovi il valore k_* di k per cui $f(z)$ ha residuo non nullo a $z = \infty$.

II - (5 punti) Si mostri che la somma dei residui a tutti i poli di $f(z)$ che si trovano sul cerchio unitario vale 0 per $k \neq k_*$ e 1 per $k = k_*$.

[*Suggerimento:* Considera l'integrale di $f(z)$ su un cammino che racchiude tutti i poli sul cerchio unitario...]

Esercizio 2

È data l'equazione

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial x^2} = 0 \ ,$$

detta *equazione di d'Alembert* o *equazione delle onde*, per la funzione $\phi(t,x)$ che assumiamo essere una funzione $L^2(\mathbb{R})$ della variabile spaziale x per tutti i tempi t. La costante $C > 0$ rappresenta la velocità dell'onda.

I - (5 punti) Si scriva l'equazione soddisfatta dalla trasformata di Fourier $\hat{\phi}(t,k)$ di $\phi(t,x)$ rispetto alla variabile x. Si deduca che la forma generale della trasformata di Fourier è

$$\hat{\phi}(t,k) = \alpha(k)e^{iCkt} + \beta(k)e^{-iCkt} \ , \tag{1}$$

dove $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ sono costanti di integrazione (costanti nel tempo). Considerata una condizione iniziale

$$\phi(0,x) = g(x) \ , \quad \frac{\partial\phi(0,x)}{\partial t} = h(x) \ ,$$

si determini quindi $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ in funzione di $\hat{g}(k)$ e $\hat{h}(k)$.

II - (5 punti) Si usi (1) per mostrare che la soluzione generale $\phi(t,x)$ dell'equazione di D'Alembert si puó sempre scrivere come somma di due funzioni di una sola variabile nel seguente modo

$$\phi(t,x) = \phi_1(Ct - x) + \phi_2(Ct + x) \ ,$$

ovvero come somma di due onde, una propagante nella direzione delle x positive e una nella direzione delle x negative.

Esercizio 3

Su $L^2([0,2\pi])$ si consideri il s.o.c. dato dagli esponenziali complessi

$$\left\{ \frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \ ,$$

dove θ denota la variabile nell'intervallo $[0,2\pi]$.

I- (6 punti) Usando metodi di analisi complessa, si calcoli il prodotto scalare tra l'elemento del s.o.c. $\frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$ con $n \geq 0$ e la funzione

$$F(\theta) = \frac{1}{5 + 4\cos\theta} \ .$$

Si spieghi perché il risultato con $n < 0$ si puó ottere da quello con $n > 0$. Si scriva quindi lo sviluppo di Fourier di $F(\theta)$ nel s.o.c. dato.

II - (5 punti) Si consideri la funzione $G(\theta)$ i cui coefficienti di Fourier nel s.o.c. dato sono

$$b_n = \begin{cases} 0 \ , & n < 0 \\ 2^{-n} \ , & n \geq 0 \ . \end{cases}$$

Si usi la serie di Fourier per calcolare il prodotto scalare (G, F).