Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n} \ ,$$

dove n è un numero naturale > 1.

I - (3 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo (incluso eventualmente $z = \infty$).

II - (4 punti) Si consideri l'integrale di $f(z)$ sul cammino γ "a spicchio" in figura 1, costituito dal segmento $[0, R]$ sull'asse reale positivo, dall'arco di raggio R e angolo $\frac{2\pi}{n}$ tra i punti $z = R$ e $z = Re^{i\frac{2\pi}{n}}$, e infine dal segmento "inclinato" di lunghezza R che congiunge $z = Re^{i\frac{2\pi}{n}}$ con $z = 0$. Assumendo $R > 1$, si calcoli

$$\oint_\gamma f(z)\, dz \ .$$

[*Suggerimento*: Per calcolare il residuo in z_0 polo di ordine 1 di $\frac{1}{g(z)}$ talvolta è conveniente usare la formula $\mathrm{Res}_{\frac{1}{g}}(z_0) = \frac{1}{g'(z_0)}$.]

III - (6 punti) Si mostri che l'integrale sulla parte del cammino data dall'arco di angolo $\frac{2\pi}{n}$ va a 0 nel limite $R \to \infty$. Si mostri poi che l'integrale sul segmento "inclinato" nel limite $R \to \infty$ è proporzionale a

$$I_n = \int_0^\infty dx\, \frac{1}{1+x^n} \ .$$

Quindi si usi il risultato dell'integrale su γ di $f(z)$ nel limite $R \to \infty$ per ottenere I_n.

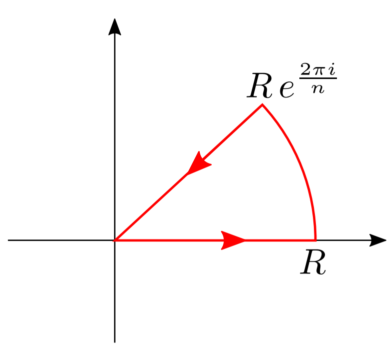

Figure 1

Esercizio 2

Si consideri una funzione $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *a supporto compatto*, ovvero per cui esiste $R > 0$ tale che $f(x)$ è $= 0$ in qualsiasi punto fuori dall'intervallo $[-R, R]$.

I - (5 punti) Si mostri che la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ è la restrizione all'asse reale di una funzione analitica su tutto il piano complesso, ovvero esiste $F(z)$ analitica per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $F(z = \omega) = \hat{f}(\omega)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

[*Suggerimento*: Si consideri l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{izx}$ e si mostri che converge $\forall z \in \mathbb{C}$.]

Supponiamo di aggiungere anche l'ipotesi che $F(z)$ sia limitata in tutto un intorno di $z = \infty$ in $\mathbb{C}$. Si deduca che in questo caso l'unica possibilità è che $f(x)$ sia identicamente nulla.

II - (6 punti) Si verifichi che nell'esempio di f a supporto compatto data da

$$f(x) = x\, \theta\left(\frac{1}{2} - |x - \frac{3}{2}|\right) + x\, \theta\left(\frac{1}{2} - |x + \frac{3}{2}|\right) \ ,$$

dove θ è la theta di Heaviside, la trasformata di Fourier $\hat{f}$ è in effetti la restrizione all'asse reale di una funzione analitica su tutto $\mathbb{C}$.

Esercizio 3

Su uno spazio di Hilbert H è dato un operatore T per cui esiste un sistema ortonormale completo di autovettori $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$, con corrispondenti autovalori λ_n reali e ordinati in ordine crescente, ovvero tali che $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, e con $\lambda_1 = 0$. Si consideri $v(t)$ funzione da $t \in \mathbb{R}_+$ a H, che soddisfa l'equazione

$$\dot{v}(t) = -T\left(v(t)\right) \ ,$$

dove il punto denota la derivata rispetto a t. La condizione iniziale è $v(0) = v_0 \in H$.

I - (4 punti) Prendendo $v_0 = a_n e^{(n)}$, con $a_n \in \mathbb{C}$, si risolva l'equazione usando l'ansatz $v(t) = \alpha_n(t) e^{(n)}$ e si mostri che $\alpha_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t}$.

II - (5 punti) Si consideri ora v_0 generico. Si mostri che

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = (e^{(1)}, v_0) e^{(1)} \ .$$

[*Suggerimento:* Stavolta si consideri l'ansatz $v(t) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n(t) e^{(n)}$.]