Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione

$$f(z) = \frac{i - \sqrt{z}}{(1+z)^2} \ ,$$

dove la radice $\sqrt{z}$ è definita con un taglio lungo l'asse reale positivo, e in modo da prendere valori nel semipiano superiore, ovvero $\mathrm{Im}\sqrt{z} \geq 0$.

I - (5 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$ e discutine il tipo.

II - (6 punti) Utilizza l'integrale di $f(z)$ su un appropriato cammino nel piano complesso per calcolare l'integrale reale

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \ .$$

Esercizio 2

Data una funzione di variabile reale $f(t)$ definiamo

$$F(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} dt' \, f(t') \ , \ t < 0 \\ -\int_{t}^{+\infty} dt' \, f(t') \ , \ t > 0 \end{cases} \ .$$

Assumiamo che gli integrali convergano per ogni t (eventualmente anche in senso improprio per $t' \to \pm\infty$) e che la funzione $F(t)$ così definita appartenga a $L^2(\mathbb{R})$. Per $t \neq 0$ segue immediatamente dalla definizione che $\frac{dF}{dt}(t) = f(t)$, ma in $t = 0$ potrebbe essere presente una discontinuità per la funzione $F(t)$. Quindi vale che

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t) + C\delta(t) \ , \tag{1}$$

dove $\delta(t)$ indica la delta di Dirac e C è una costante da determinare.

I - (6 punti) Partendo da (1), determina l'equazione che lega la trasformata di Fourier $\hat{F}(\omega)$ di $F(t)$ alla trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ di $f(t)$. Ponendo $\omega = 0$ in tale equazione, determina C. Mostra infine che il valore così ottenuto coincide con la discontinuità di $F(t)$ in $t = 0$, ovvero mostra che vale

$$C = \lim_{t \to 0^+} F(t) - \lim_{t \to 0^-} F(t) \ .$$

II - (6 punti) Considera ora il caso particolare $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. Determina $\hat{F}(\omega)$ in questo caso, e quindi utilizza $\hat{F}(\omega)$ per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,(F(t))^2\ .$$

[*Suggerimento:* Ricorda che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ è data da $\hat{f}(\omega) = \pi\theta(1-|\omega|)$, dove θ denota la funzione theta di Heaviside.]

Esercizio 3

Su uno spazio di Hilbert H è dato un operatore limitato T con $||T|| \leq 1$.

I - (4 punti) Considera l'operatore $S = \mathbb{1} - T$, dove $\mathbb{1}$ è l'identità. Mostra che vale

$$\forall v \in H,\ \mathrm{Re}(v, S(v)) \geq 0\ . \tag{2}$$

[*Suggerimento:* Utilizza la disuguaglianza $\mathrm{Re}(v, T(v)) \leq |(v, T(v))|$.]

II - (6 punti) Considera il seguente operatore parametrizzato da un intero positivo n

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(\mathbb{1} + T + T^2 + \cdots + T^{n-1})\ ,$$

dove la potenza T^k indica l'applicazione ripetuta di T per k volte. Dato $v \in H$ della seguente forma[1]

$$v = v_1 + S(v_2)\ ,\quad S(v_1) = 0\ ,$$

mostra che

$$\sigma_n(v) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_1\ .$$

[*Suggerimento:* Nota che $S(v_1) = 0$ implica che $\forall n, \sigma_n(v_1) = v_1$; poi mostra che $\sigma_n(S(v_2)) = \frac{1}{n}(v_2 - T^n(v_2))$, ad esempio per induzione, e usa questo per mostrare che $\sigma_n(S(v_2)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.]

[1] Si può mostrare che la disuguaglianza (2) implica che $\forall v \in H,\ \exists v_1, w_2 \in H$ tali che $v = v_1 + w_2$ con $S(v_1) = 0$ e $w_2 = \lim_{k\to\infty} S((v_2)_k)$ per una certa successione $(v_2)_k$. Il caso in cui w_2 stesso è della forma $S(v_2)$ è un caso particolare che semplifica il resto dell'esercizio.