Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log z - \log(z-1)}{P(z)} \ ,$$

dove log indica il ramo principale della funzione logaritmo, e $P(z)$ è un polinomio. Detto n il grado di $P(z)$, si denotino con z_i, $i = 1, \ldots, n$ gli zeri di $P(z)$, che assumiamo tutti distinti e non appartenenti all'intervallo $[0, 1]$ dell'asse reale.

I - (5 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo, spiegando anche dove si trova il taglio.

II - (4 punti) Si mostri che $f(z)$ ha residuo non nullo a $z = \infty$ se e soltanto se $P(z)$ ha grado $n = 0$, ovvero se $P(z)$ è una costante $\neq 0$.

III - (6 punti) Si spieghi come utilizzare $f(z)$ per calcolare l'integrale

$$\int_0^1 dx \, \frac{1}{P(x)} \ .$$

Si verifichi esplicitamente questo metodo nell'esempio di $P(x) = 1$ oppure di $P(x) = 1 + x^2$ (si scelga uno dei due).

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} - \frac{1}{T^2}F(t) = -\frac{2}{T}\delta(t) \ , \qquad (1)$$

per la funzione di variabile reale $F(t)$, dove δ è la distribuzione delta di Dirac.

I - (5 punti) Si verifichi che $F(t) = e^{-|t|/T}$ soddisfa l'equazione.

II - (6 punti) Si applichi la trasformata di Fourier all'equazione (1) e si ottenga un'equazione per la trasformata $\hat{F}(\omega)$. Si verifichi che la trasformata di Fourier di $F(t) = e^{-|t|/T}$ soddisfa l'equazione così ottenuta.

Esercizio 3

Si consideri il seguente operatore lineare su $L^2([0,1])$

$$T[f](t) = \begin{cases} a\, f(t) \ , & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}] \ , \\ b\, f(t) \ , & \text{per } t \in (\frac{1}{2}, 1] \ . \end{cases}$$

dove a e b sono due numeri complessi fissati.

I - (3 punti) Si mostri che T è un operatore limitato e che la sua norma è data da

$$||T|| = \sqrt{\mathrm{Max}(|a|^2, |b|^2)} \ .$$

II - (4 punti) Si mostri che T è un operatore unitario se e soltanto se a e b appartengono entrambi al cerchio unitario.