Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(z^3+1)(e^{\frac{i\pi}{z}}-1)}{(3z-1)(16z^2+1)} \ .$$

I - (5 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo (incluso eventualmente $z = \infty$).

II - (6 punti) Si calcoli l'integrale di $f(z)$ sul cerchio unitario, orientato in senso orario.

Esercizio 2

È data la seguente equazione per $F(t)$

$$t\frac{d}{dt}F(t) = \alpha F(t) \ ,$$

dove α è un parametro reale.

I - (5 punti) Si derivi l'equazione soddisfatta dalla trasformata di Fourier $\hat{F}(\omega)$.

II - (4 punti) Si mostri che $F(t) = \theta(t)t^\alpha$, dove θ indica la theta di Heaviside, soddisfa l'equazione quando $\alpha > -1$. Si spieghi perché è necessario prendere $\alpha > -1$ affinché $F(t)$ definisca una distribuzione temperata.

[*Suggerimento*: Si studi la convergenza dell'integrale $T_F[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, F(t)^*\varphi(t)$, dove $\varphi(t)$ è una funzione test.]

III - (6 punti) Prendendo $F(t)$ come al punto II, si mostri che l'integrale che definisce $\hat{F}(\omega)$ converge se consideriamo $\omega \in \mathbb{C}$ con una parte immaginaria positiva $\mathrm{Im}(\omega) > 0$. Con questa assunzione si mostri che

$$\hat{F}(\omega) = \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\alpha+1} \ .$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero.

[*Suggerimento*: Si consideri il cambio di variabili $t' = -i\omega t$. Su che cammino è l'integrale nel piano complesso t'? Si mostri che può essere deformato al cammino con t' sull'asse reale positivo.]

Esercizio 3

Si consideri un operatore limitato P su uno spazio di Hilbert

I - (4 punti) Detto $P^\dagger$ l'operatore aggiunto di P, si mostri che $P + P^\dagger$ e $iP - iP^\dagger$ possono avere solo autovalori reali, e che $PP^\dagger$ e $P^\dagger P$ possono avere solo autovalori reali positivi.

[*Suggerimento*: Chiamando T uno qualsiasi di questi operatori, e detto v un suo autovettore, si consideri il prodotto scalare $(v, T(v))$...]

II - (3 punti) Si assuma che P ammetta un s.o.c. di autovettori $\{e^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, ovvero

$$P(e^{(n)}) = \lambda_n e^{(n)} \ , \quad \lambda_n \in \mathbb{C} \ .$$

Si mostri che allora questo è anche un s.o.c. di autovettori di $P^\dagger$, e vale

$$P^\dagger(e^{(n)}) = \lambda_n^* e^{(n)} \ .$$