Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri una funzione di variabile complessa $f(z)$ che è olomorfa in tutto il semipiano inferiore $\operatorname{Im} z \le 0$ del piano complesso. È definito l'integrale

$$I(w) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{f(x)}{(x-w)^2} \ .$$

dipendente dal parametro complesso w.

I - (5 punti) Assumendo opportune condizioni sul comportamento di $f(z)$ all'infinito, si mostri che vale $I(w) = f'(w)$ per ogni w con $\operatorname{Im} w < 0$.

II - (5 punti) Si consideri il caso particolare $f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-i-1}$. Si calcoli l'integrale $I(w)$ chiudendo il cammino con un arco nel semipiano superiore, e si verifichi la relazione dimostrata al punto I.

III - (6 punti) Si consideri il caso particolare $f(z) = \log(1+iz)$, prendendo il ramo principale del logaritmo, con taglio sull'asse reale negativo. Dunque $f(z)$ ha un taglio lungo l'asse immaginario da i a $+i\infty$. Si calcoli l'integrale $I(w)$ chiudendo opportunamente il cammino nel semipiano superiore, e si verifichi la relazione dimostrata al punto I.

Esercizio 2

Fissata una funzione o una distribuzione temperata $G(t)$, si ha la mappa lineare

$$T_G[\phi](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, G(t-t')\phi(t') \ ,$$

definita sulle funzioni test $\phi(t)$. Si consideri l'equazione agli autovalori

$$T_G[\phi](t) = \lambda\phi(t) \ .$$

I - (4 punti) Assumendo dapprima che $G(t) \in L^1(\mathbb{R})$, si applichi la trasformata di Fourier all'equazione agli autovalori, scrivendo l'equazione risultante per $\hat{\phi}(\omega)$.

II -(4 punti) Dando per buono che l'equazione per $\hat{\phi}(\omega)$ ottenuta al punto precedente sia valida anche quando $G(t)$ è una distribuzione temperata, si scriva l'equazione nel caso particolare di $G(t) = P(\frac{1}{t})$, dove P indica la parte principale.

III -(4 punti) Si deduca quindi che, per $G(t) = P(\frac{1}{t})$, l'equazione agli autovalori è soddisfatta con $\lambda = +i\pi$ se $\hat{\phi}(\omega)$ è diversa da zero solo in un certo sottoinsieme dell'asse reale, e similmente per $\lambda = -i\pi$, specificando quale sia il sottoinsieme in ciascuno dei due casi.

Esercizio 3

Su uno spazio di Hilbert H è dato un sistema ortonormale completo $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$.

I - (5 punti) Si mostri che il sistema indipendente $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ definito da:

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= e^{(1)} + e^{(2)} \ , \\
f^{(2)} &= e^{(1)} - e^{(2)} + e^{(3)} \ , \\
f^{(3)} &= e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)} + e^{(4)} \ , \\
&\vdots \\
f^{(n)} &= e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)} - \cdots - e^{(n)} + e^{(n+1)} \ , \\
&\vdots
\end{aligned}$$

è un sistema completo.