Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{i\sqrt{z}}\ \log z}{1+z}\ ,$$

dove per $\sqrt{z}$ e $\log z$ prendiamo il taglio sull'asse reale positivo, e i rami definiti da $\mathrm{Im}\sqrt{z} \geq 0$ e $\mathrm{Im}\log z \in (0, 2\pi)$.

I - (4 punti) Discuti le singolarità della funzione, indicandone il tipo se sono isolate, e determina i valori della funzione nel limite in cui z va sul taglio da sopra e da sotto.

II - (6 punti) Prendendo la parte reale e immaginaria dell'integrale della funzione $f(z)$ sul cammino chiuso in figura 1, nel limite in cui $R \to +\infty$ e $\epsilon \to 0^+$, ottieni l'identità

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin(\sqrt{x})\log(x) - \pi\cos(\sqrt{x})}{1+x} = 0\ ,$$

e calcola il valore dell'integrale $\int_0^\infty dx \frac{\sin(\sqrt{x})}{1+x}$. Per svolgere questo punto puoi assumere che il contributo dell'arco di raggio R vada a zero nel limite $R \to +\infty$.

III - (3 punti) Spiega perché nel punto precedente il contributo dell'arco di raggio R va a zero nel limite $R \to +\infty$.

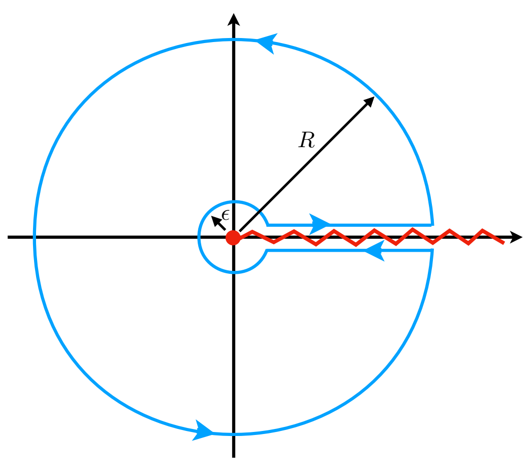

Figure 1

Esercizio 2

La funzione $G(x)$ della variabile reale x ha trasformata di Fourier

$$\hat{G}(k) = \frac{e^{-|k|} - 1}{k} \ .$$

I - (5 punti) Deduci dalle proprietà di $\hat{G}(k)$ che $G(x)$ è una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$, che è una funzione dispari e puramente immaginaria, e che la sua derivata prima non è in $L^2(\mathbb{R})$.

II - (5 punti) Mostra che la derivata di $G(x)$ nel senso delle distribuzioni è

$$G'(x) = -\frac{i}{\pi}\frac{1}{1+x^2} + i\,\delta(x) \ ,$$

dove δ è la distribuzione delta di Dirac.

Esercizio 3

Considera lo spazio di Hilbert $L^2([-L, L])$ con il sistema ortonormale completo dato dalle funzioni

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \ , \quad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ , \quad s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ ,$$

dove n è un intero ≥ 1. Su questo spazio definiamo l'operatore lineare T assegnando la sua azione sugli elementi del s.o.c., data da

$$\begin{aligned} T[c_0](x) &= A_0\, c_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m\, c_m(x) + B_m\, s_m(x)\right) \ , \\ T[c_n](x) &= s_n(x) \ , \quad T[s_n](x) = c_n(x) \ , \quad \forall n \geq 1 \ . \end{aligned}$$

dove A_0 è un numero complesso e $\{A_m, B_m\}_{m\geq 1}$ sono due successioni di numeri complessi a quadrato sommabile.

I -(6 punti) Calcola l'operatore aggiunto $T^\dagger$. Determina la condizione sui coefficienti A_0 e $\{A_m, B_m\}_{m\geq 1}$ affinché l'operatore T sia hermitiano.

II -(4 punti) Scrivi l'equazione agli autovalori $T(f) = \lambda f$ espandendo la funzione f nel sistema ortonormale completo. Mostra che se $(c_0, f) = 0$ allora $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ sono autovalori. Quindi determina il valore possibile di λ nel caso in cui $(c_0, f) \neq 0$.