Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^4} \ .$$

I - (4 punti) Si discutano le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono singolarità isolate, e incluso eventualmente il punto all'infinito.

II - (5 punti) Si consideri l'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso γ, orientato in senso antiorario, dato da: l'intervallo sull'asse reale da 0 a R, l'arco di raggio R e angolo $\frac{\pi}{2}$ tra il punto R e il punto iR, e infine l'intervallo sull'asse immaginario da iR a 0. Si prenda il limite $R \to \infty$ dell'integrale e si mostri che

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\cos x}{1+x^4} + i \int_0^\infty dx \, \frac{\sin x - e^{-x}}{1+x^4} = 2\pi i \, \mathrm{Res}_f \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \ . \tag{1}$$

III - (5 punti) Si calcoli il residuo $\mathrm{Res}_f \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)$. Quindi si usi l'equazione (1) per calcolare i due integrali $\int_0^\infty dx \, \frac{\cos x}{1+x^4}$ e $\int_0^\infty dx \, \frac{\sin x - e^{-x}}{1+x^4}$.

Esercizio 2

Si consideri $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tale che la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ è diversa da zero solo nell'intervallo $\omega \in [-A, A]$ dove A è un numero reale positivo.

I - (5 punti) Si mostri che la derivata k-esima $f^{(k)}(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ per ogni $k \geq 1$.

II -(5 punti) Si mostri che

$$|(f^{(k)}, f^{(h)})| \leq A^{h+k} ||f||^2 \ .$$

[*Suggerimento:* si usi l'identità di Parseval generalizzata per riscrivere il prodotto scalare.]

Esercizio 3

Si consideri l'operatore di dilatazione $D_{\lambda,p} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$D_{\lambda,p}[f](x) = \lambda^p f(\lambda x) \ ,$$

dove λ e p sono parametri reali e $\lambda > 0$.

I - (5 punti) Si mostri che $D_{\lambda,p}$ è un operatore limitato, si calcoli il suo aggiunto e si determini il valore p^* della variabile p per cui $D_{\lambda,p}$ è un operatore unitario.

II -(4 punti) Si mostri $D_{\lambda,p}\mathcal{F} = \mathcal{F}D_{1/\lambda,1-p}$, dove $\mathcal{F}$ è la trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R})$.