Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^7} \frac{(z^2 + \frac{1}{4})^2}{1 - \cosh(\frac{\pi}{z})} \ .$$

I - (4 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Si calcoli l'integrale di $f(z)$ su un cammino circolare centrato nell'origine e di raggio $\frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Considera una funzione $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che ha la proprietà di essere proporzionale alla sua trasformata di Fourier, ovvero

$$G(x) = c\,\hat{G}(x) \ . \tag{1}$$

I - (3 punti) Usa la relazione (1) per dedurre il valore di $|c|$.

II - (6 punti) Considera il caso in cui G è una funzione reale e pari. Deduci che in questo caso c deve essere un numero reale.

[*Suggerimento:* Prendi il complesso coniugato di (1) e usa le proprietà di G per ottenere che $c^* = c$.]

Assumi ora che $G(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$ ed è continua in $x = 0$. Usa (1) per determinare $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, G(x)$ in funzione del valore $G(0)$. Infine deduci che in questo caso $\lim_{x\to\pm\infty} G(x) = 0$.

III -(6 punti) Considera una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che soddisfa l'equazione differenziale

$$\left(\frac{d}{dx} + ix\right) f(x) = G(x) \ . \tag{2}$$

Scrivi l'equazione soddisfatta dalla trasformata di Fourier $\hat{f}$. Dando per buono che la soluzione dell'equazione (2) che ammetta trasformata di Fourier sia unica, e assumendo che G e $\hat{G}$ siano funzioni reali, deduci che tale soluzione soddisfa $f(x) = c(\hat{f}(x))^*$.

[*Suggerimento:* Prendi il complesso coniugato dell'equazione per $\hat{f}$ e confrontala con l'equazione per f.]

Esercizio 3

I -(5 punti) Si calcoli l'espansione della funzione $f(x) = x$ nel sistema ortonormale completo

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\} ,$$

su $L^2([-\pi, \pi])$.

II -(3 punti) Si calcoli l'espansione trovata al punto precedente in $x = 1$ per determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(n)}{n}$, e poi in $x = \pi - 1$ per determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.