Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(A + e^{iz})(z^2 + 1)} \ ,$$

dove A è un parametro reale con $A > 1$.

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (2 punti) Mostra che, per qualsiasi z nel semipiano superiore, vale la disuguaglianza

$$\left| \frac{1}{A + e^{iz}} \right| \leq \frac{1}{A - 1} \ . \tag{1}$$

[*Suggerimento:* Parti dalla disuguaglianza triangolare $|A + e^{iz}| \geq A - |e^{iz}|$.]

III -(6 punti) Calcola l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(A + e^{ix})(x^2 + 1)} \ ,$$

avvalendoti della disuguaglianza (1) per chiudere il cammino con un opportuno arco a infinito. Prendi quindi la parte reale e immaginaria del risultato per ottenere due integrali reali.

Esercizio 2

Dato un parametro reale a con, $0 < a < 1$, considera la funzione di variabile reale

$$G(t) = \begin{cases} 0 \ , & |t| > 1 \ , \\ \frac{t+1}{1-a} \ , & -1 \leq t \leq -a \ , \\ 1 \ , & |t| < a \ , \\ \frac{1-t}{1-a} \ , & a \leq t \leq 1 \ . \end{cases} \ .$$

I - (5 punti) Senza calcolare la trasformata di Fourier $\hat{G}(\omega)$, deduci dalle proprietà di $G(t)$ che $\hat{G}(\omega)$ è una funzione in $L^2(\mathbb{R})$, derivabile infinite volte con tutte le derivate in $L^2(\mathbb{R})$, e che $\omega\, \hat{G}(\omega)$ è ancora in $L^2(\mathbb{R})$ ma $\omega^2\, \hat{G}(\omega)$ non lo è.

II - (5 punti) Mostra che nel limite $a \to 1$ la funzione $G(t)$ tende in norma $L^2(\mathbb{R})$ alla funzione $\theta(1-|t|)$, dove θ è la funzione theta di Heaviside. Usa questo fatto per dedurre che il limite $a \to 1$ di $\hat{G}(\omega)$ in norma $L^2(\mathbb{R})$ è $\frac{2\sin\omega}{\omega}$, senza calcolare $\hat{G}(\omega)$.

III - (5 punti) Calcola la trasformata di Fourier $\hat{G}(\omega)$. Verifica le proprietà dedotte nei punti precedenti.

[*Suggerimento:* Per calcolare gli integrali $\int_{-1}^{-a} dt \frac{1+t}{1-a} e^{i\omega t}$ e $\int_a^1 dt \frac{1-t}{1-a} e^{i\omega t}$ sostituisci $e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dt} e^{i\omega t}$ e integra per parti.]

Esercizio 3

Sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ sono dati due sistemi ortonormali completi $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ e $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$. Considera l'operatore $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definito da

$$T[e^{(n)}] = \begin{cases} f^{(n)} \text{ , per } n \text{ dispari} \\ 0 \text{ , per } n \text{ pari} \end{cases} .$$

I -(3 punti) Mostra che T è limitato e calcola la sua norma.

II -(3 punti) Calcola l'operatore aggiunto $T^\dagger$.

[*Suggerimento:* Considera v e w vettori generici di $\mathcal{H}$, espandi nei s.o.c. come segue: $v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$, $w = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f^{(n)}$ e calcola il prodotto scalare $(w, T[v])$. Quindi, definisci $T^\dagger$ determinando il suo valore sul s.o.c. $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$, ovvero $T^\dagger[f^{(n)}] = \ldots$.]