Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log(z+1) + \log(z-1)}{\sqrt{z-1}\,(z-2)} \ ,$$

in cui la funzione logaritmo e radice quadrata sono definite come il ramo principale, con taglio per valori reali negativi dell'argomento.

I - (6 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$. Scrivi l'espressione della funzione sopra e sotto il taglio in termini di funzioni di variabile reale.

II - (6 punti) Usa $f(z)$ per calcolare la seguente somma di integrali

$$\int_{-\infty}^{-1} dx \, \frac{\log(x^2-1)}{\sqrt{1-x}(x-2)} + \int_{-1}^{+1} dx \, \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-x}(x-2)} \ .$$

Esercizio 2

La funzione di variabile reale $G(x)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{d}{dx} G(x) = G(x+1) + F(x) \ , \tag{1}$$

dove $F(x)$ è una funzione data.

I - (5 punti) Prendendo la trasformata di Fourier dell'equazione, ottieni la trasformata di Fourier $\hat{G}(k)$ di $G(x)$ in funzione della trasformata $\hat{F}(k)$ di $F(x)$.

II - (4 punti) Deduci dalla relazione tra $\hat{G}(k)$ e $\hat{F}(k)$ che se $F(x)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ allora anche $G(x)$ e $\frac{d}{dx}G(x)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$.

III - (4 punti) Assumi che $F(x)$ e $G(x)$ siano in $L^1(\mathbb{R})$. Usa la relazione tra $\hat{G}(k)$ e $\hat{F}(k)$ per mostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, G(x)$. Verifica questa relazione anche partendo direttamente dall'equazione (1).

Esercizio 3

I -(3 punti) Mostra che l'unica funzione in $L^2(\mathbb{R})$ che è periodica (ovvero $f(x) = f(x+a)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) è la funzione nulla.

[*Suggerimento*: Nota che la restrizione $f_{\text{rest}}(x)$ di $f(x)$ all'intervallo $[0, a]$ è un elemento di $L^2([0, a])$. Quindi considera l'integrale di $|f(x)|^2$ tra $-na$ e $+\, na$, con n intero positivo, e nota che è uguale a $2n||f_{\text{rest}}||^2_{L^2([0,a])}$. Considera il limite $n \to \infty$ e imponi che $f(x)$ sia in $L^2(\mathbb{R})$ per dedurre che l'unica possibilità è $||f_{\text{rest}}||_{L^2([0,a])} = 0$. Usa questo per dedurre che f è la funzione nulla.]

II -(5 punti) Usa il risultato del punto precedente per dimostrare che se $\{e_n(x)\}_{n\geq 1}$ è un sistema completo su $L^2(\mathbb{R})$, allora per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ anche $\{e_n(x) - e_n(x-a)\}_{n\geq 1}$ è un sistema completo.