Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{e^{-\frac{1}{z^2}} - 1} \ .$$

I - (5 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Calcolare l'integrale di $f(z)$ sul cerchio unitario, orientato in senso antiorario.

Esercizio 2

La funzione di variabile reale $F(t)$ ha la seguente trasformata di Fourier

$$\hat{F}(\omega) = \frac{\sinh(\omega)}{\cosh(\omega)^2} \ .$$

I - (5 punti) Usa le proprietà di $\hat{F}(\omega)$ per dedurre che $F(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ ed è continua e limitata, e che questo vale anche per tutte le funzioni $t^k F(t)$ e $\frac{d^k}{dt^k} F(t)$ per qualsiasi k intero positivo.

II - (5 punti) Sfrutta la conoscenza di $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\int_0^{+\infty} dt\, t F(t)$.

[*Suggerimento*: Nota che $F(t)$ è una funzione dispari, quindi...]

II - (4 punti) Usando il fatto che l'antitrasformata di $\frac{1}{\cosh(\omega)}$ è $\frac{1}{2\cosh(\frac{\pi t}{2})}$, calcola $F(t)$.

[*Suggerimento*: Nota che $\hat{F}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \frac{1}{\cosh(\omega)}$.]

Esercizio 3

Data una funzione $\mu(x)$ misurabile di variabile reale, con $\mu(x) \geq 0$, considera lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})_\mu$ dato dalle funzioni su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con la proprietà che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x)\, |f(x)|^2 < +\infty \ ,$$

con il prodotto scalare definito da

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R})_\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mu(x)\, f(x)^* g(x) \ .$$

I- (3 punti) Mostra che l'operatore lineare

$$U[f](x) = \sqrt{\mu(x)} f(x) \ ,$$

è un operatore che manda $L^2(\mathbb{R})_\mu$ nell'usuale $L^2(\mathbb{R})$ (i.e. con $\mu(x) = 1$), conservando il prodotto scalare. Trova la condizione sulla funzione $\mu(x)$ affinché U sia invertibile.

II - (5 punti) Assumi ora che U definito al punto precedente sia invertibile. Considera l'operatore su $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$T[f](x) = F(x) f(x) \ ,$$

che moltiplica per una funzione $F(x)$ continua e limitata. Mostra che è un operatore limitato. Quindi calcola l'operatore $U^{-1}TU : L^2(\mathbb{R})_\mu \to L^2(\mathbb{R})_\mu$ e verifica che è anche un operatore limitato su $L^2(\mathbb{R})_\mu$. Infine considera l'operatore derivata

$$\mathcal{D}[f](x) = \frac{df}{dx}(x) \ ,$$

definito sull'opportuno dominio in $L^2(\mathbb{R})$. Calcola l'operatore $U^{-1}\mathcal{D}U$ e trova il dominio in $L^2(\mathbb{R})_\mu$ su cui è definito.