Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera i due integrali

$$I_\pm = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{1-\rho\, e^{\pm ix}} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x-2i} \right) \, ,$$

dove ρ è un parametro reale con $0 < \rho < 1$.

I - (6 punti) Per calcolarli, sostituisci l'espansione in serie geometrica

$$\frac{1}{1-\rho\, e^{\pm ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n e^{\pm inx} \, .$$

Puoi assumere che la somma infinita si possa scambiare con l'integrale. Calcola quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{\pm inx} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x-2i} \right) \, ,$$

e usa il risultato per ottenere il valore di I_+ e mostrare che $I_- = 0$.

II -(6 punti) Determina le singolarità nel piano complesso delle due funzioni

$$f_\pm(z) = \frac{1}{1-\rho\, e^{\pm iz}} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-2i} \right) \, .$$

Nota che per f_-, e non per f_+, tutte le singolarità si trovano nello stesso semipiano del piano complesso. Usa questa osservazione per dimostrare in un altro modo che $I_- = 0$.

Esercizio 2

La funzione di variabile reale $F(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ha trasformata di Fourier data da

$$\hat{F}(\omega) = \frac{\omega^2}{\sinh(\omega T)} \, .$$

I - (5 punti) Deduci dalle proprietà di $\hat{F}(\omega)$ che sia la derivata k-esima di $F(t)$ che la moltiplicazione per potenza della variabile $t^k F(t)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$, per qualsiasi intero positivo k.

II - (4 punti) Usa la conoscenza di $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \sin(t) F(t)$.

III - (5 punti) Considera una primitiva della funzione $F(t)$, ovvero una funzione $G(t)$ tale che $G'(t) = F(t)$. Tale primitiva è definita a meno di una costante arbitraria, ma spiega perché questa costante è fissata se richiediamo che $G(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Usa la conoscenza di $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, G(t)$.

[*Suggerimento*: usa $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\hat{G}(\omega)$, quindi...]

Esercizio 3

Si consideri il s.o.c. dei seni su $L^2([0,1])$

$$\{\sqrt{2}\sin(n\pi t)\}_{n\geq 1}$$

I - (3 punti) Si calcoli la serie di Fourier in questo sistema della funzione $f(t) = 1$.

II - (4 punti) Si utilizzi il risultato precedente per calcolare la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \ .$$