Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi z)}{(z^2 + \frac{1}{4})z^3} \ .$$

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Calcola l'integrale di $f(z)$ su un cammino dato dal cerchio unitario orientato in senso antiorario.

III -(4 punti) Usa l'integrale calcolato al punto precedente per calcolare il coefficiente della potenza $\frac{1}{z}$ nella serie di Taylor-Laurent della funzione $f(z)$ centrata in $z = \infty$.

Esercizio 2

Considera la funzione di variabile reale

$$G(x) = \mathrm{sign}(x) e^{-|x|} \ .$$

I - (5 punti) Deduci dalle proprietà di $G(x)$ se la trasformata di Fourier $\hat{G}(k)$ si trovi in $L^2(\mathbb{R})$. e/o in $L^1(\mathbb{R})$, senza calcolare $\hat{G}(k)$. Poi calcola $\hat{G}(k)$ e verifica quanto dedotto prima.

II - (5 punti) Mostra che la funzione $G(x)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x) - G(x) = 2\delta'(x) \ ,$$

dove $\delta'(x)$ denota la derivata della delta di Dirac centrata in $x = 0$, in due modi diversi: (1) Sostituendo direttamente la funzione $G(x)$ nell'equazione; (2) Applicando la trasformata di Fourier all'equazione e mostrando che l'equazione risultante è soddisfatta da $\hat{G}(k)$.

Esercizio 3

Dato un operatore limitato T su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, con $||T|| < 1$, considera l'operatore

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} (-i)^k T^k \ .$$

Qui la scrittura T^k indica la composizione di T con sè stesso k volte, e con T^0 si intende l'operatore identità $\mathbb{1}$.

I -(5 punti) Nota che

$$(\mathbb{1} + iT)S_N = \mathbb{1} - (-i)^{N+1}T^{N+1} \ . \tag{1}$$

[*Suggerimento:* Ad esempio puoi procedere per induzione su N, usando che $S_0 = \mathbb{1}$ e $S_{N+1} = S_N + (-i)^{N+1}T^{N+1}$.]

Deduci quindi che per qualsiasi $v \in \mathcal{H}$ vale

$$\lim_{N\to\infty} ((\mathbb{1} + iT)S_N)v = v \ .$$

[*Suggerimento:* Applica l'equazione (1) a v e scrivila come $((\mathbb{1} + iT)S_N)v - v = -(-i)^{N+1}T^{N+1}v$. Quindi usa le ipotesi su T per mostrare che il vettore al membro destro tende a 0 per $N \to \infty$.]

Ottieni quindi che

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k T^k \equiv \lim_{N\to\infty} S_N = (\mathbb{1} + iT)^{-1} \ .$$

II -(4 punti) Nota che per qualsiasi N vale che $S_N T = T S_N$ e deduci usando il punto precedente che $(\mathbb{1} + iT)^{-1}T = T(\mathbb{1} + iT)^{-1}$ e quindi anche $(\mathbb{1} + iT)^{-1}(\mathbb{1} - iT) = (\mathbb{1} - iT)(\mathbb{1} + iT)^{-1}$.

Usando questa relazione mostra che se T è un operatore autoaggiunto, allora l'operatore

$$U = (\mathbb{1} - iT)(\mathbb{1} + iT)^{-1} \ ,$$

è un operatore unitario.