Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1+z^3} \ .$$

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (6 punti) Usa $f(z)$ per calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} \ .$$

Esercizio 2

Considera lo spazio $L^2((0,+\infty))$ delle funzioni a quadrato sommabile della variabile $x > 0$ reale positiva. Data $f(x) \in L^2((0,+\infty))$ definiamo la trasformata coseno $\hat{f}^c(k)$ e la trasformata seno $\hat{f}^s(k)$, entrambe funzioni di una variabile reale positiva $k > 0$, come segue

$$\begin{aligned} \hat{f}^c(k) &= \int_0^{+\infty} dx\, 2\cos(kx) f(x) \ , \\ \hat{f}^s(k) &= \int_0^{+\infty} dx\, 2\sin(kx) f(x) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

I - (6 punti) Sfrutta l'usuale trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R})$ per dimostrare che le formule (1) per $\hat{f}^c(k)$ e $\hat{f}^s(k)$ definiscono due funzioni in $L^2((0,+\infty))$ rispetto alla variabile $k > 0$ e che inoltre valgono le rispettive anti-trasformate

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, 2\cos(kx) \hat{f}^c(k) \ , \\ f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, 2\sin(kx) \hat{f}^s(k) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

[*Suggerimento:* Estendi $f(x)$ a una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ usando una legge pari $f^P(-x) = f^P(x)$ oppure una legge dispari $f^D(-x) = -f^D(x)$. Mostra che sia $f^P(x)$ che $f^D(x)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$ per cui ammettono una trasformata di Fourier, e quindi mostra che $\hat{f}^c(k) = \widehat{f^P}(k)$ e $\hat{f}^s(k) = -i\widehat{f^D}(k)$. Deduci da qui le altre proprietà richieste.]

II - (5 punti) Supponi che $f(x) \in L^2((0,+\infty))$ abbia derivata prima $\frac{df}{dx}(x)$ ancora in $L^2((0,+\infty))$. Partendo dalla definizione (1) mostra che

$$\widehat{\frac{df}{dx}}^s(k) = -k\hat{f}^c(k) \ , \quad \widehat{\frac{df}{dx}}^c(k) = k\hat{f}^s(k) - 2f(0) \ . \tag{3}$$

III - (5 punti) Calcola $\hat{f}^c(k)$ e $\hat{f}^s(k)$ per $f(x) = e^{-x}$ e quindi verifica le identità (3) in questo caso.

Esercizio 3

Un operatore T su uno spazio di Hilbert H si dice *antilineare* se

$$\begin{aligned}
&(1) \ \ \forall v, w \in H \ , \quad T[v+w] = T[v] + T[w] \ , \\
&(2) \ \ \forall v \in H \ , \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \ , \quad T[\alpha v] = \alpha^* T[v] \ ,
\end{aligned}$$

e si definisce l'aggiunto per un operatore antilineare come l'operatore $T^\dagger$ che soddisfa

$$\forall v, w \in H \ , \quad (w, T[v]) = (v, T^\dagger[w]) \ .$$

Infine, un operatore antilineare invertibile U si dice *antiunitario* se soddisfa

$$\forall v, w \in H \ , \quad (U[w], U[v]) = (v, w) \ .$$

I- (4 punti) Mostra che l'aggiunto $T^\dagger$ di un operatore antilineare è ancora un operatore antilineare e che dati T_1 e T_2 operatori antilineari la loro composizione T_1T_2 è un operatore lineare per il quale vale $(T_1T_2)^\dagger = T_2^\dagger T_1^\dagger$. Mostra che la condizione che U operatore antilineare sia antiunitario equivale a $U^\dagger = U^{-1}$, e che il prodotto U_1U_2 di due operatori antilineari antiunitari è un operatore lineare unitario.

II - (3 punti) Sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ è definita la mappa C che manda una funzione f nel suo complesso coniugato f^*. Dato un qualsiasi operatore U unitario su $L^2(\mathbb{R})$ mostra che UC è un operatore antiunitario.