Durata: 5 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sqrt{z-1}\sqrt{z}}{z+i} \ .$$

I - (3 punti) Elenca le singolarità isolate e i punti di diramazione di f (anche eventualmente a $z = \infty$), e se le singolarità sono isolate descrivine il tipo.

II - (3 punti) Scegli un taglio per la funzione f e un cammino di integrazione γ tali che, prendendo la parte reale a immaginaria di $\int_\gamma dz\, f(z)$, si possano ottenere gli integrali reali

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{x\sqrt{x-x^2}}{1+x^2} \ , \quad I_2 = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{x-x^2}}{1+x^2} \ .$$

III - (5 punti) I_1 e I_2 si possono scrivere nella forma

$$I_1 = \pi \left(a_1 + b_1\, 2^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \ , \quad I_2 = \pi \left(a_2 + b_2\, 2^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \ ,$$

dove a_1, a_2, b_1, b_2 sono numeri razionali. Calcola $\int_\gamma dz\, f(z)$ e ottieni a_1, a_2, b_1, b_2.

Esercizio 2

Considera la seguente equazione differenziale per la funzione $f(t)$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \beta \frac{df(t)}{dt} = F(t) \ ,$$

dove $F(t)$ è una forza esterna assegnata, e β è un parametro complesso con $\mathrm{Re}(\beta) \neq 0$. La soluzione del problema si può scrivere come

$$f(t) = (G * F)(t) \ ,$$

dove $G(t)$ è la *funzione di Green* dell'equazione, che è la soluzione di

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \beta \frac{dG(t)}{dt} = \delta(t) \ .$$

I - (4 punti) Usa la trasformata di Fourier per ottenere che

$$\hat{G}(\omega) = -\frac{1}{\omega + i\beta}\,\mathcal{P}\frac{1}{\omega} + A\,\delta(\omega)\ ,$$

dove $\mathcal{P}$ indica la parte principale, δ è la delta di Dirac e A è una costante arbitraria. Mostra che l'ambiguità nella costante A corrisponde alla possibilità di aggiungere a $G(t)$ una certa soluzione dell'equazione omogenea $\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \beta\frac{dG(t)}{dt} = 0$.

II - (4 punti) Assumendo $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, ottieni $G(t)$ calcolando l'anti-trasformata di $\hat{G}(\omega)$. Fissa la costante A in modo che la funzione di Green sia *causale*, ovvero che $G(t) = 0$ per $t < 0$.

[*Suggerimento*: usa il Lemma di Jordan. Per ottenere un cammino chiuso, aggiungi all'integrale regolarizzato tramite la parte principale un arco infinitesimo attorno all'origine, e calcola a parte il contributo di questo arco.]

III - (4 punti) Ripeti nel caso di $\mathrm{Re}(\beta) < 0$. Mostra che in questo caso la funzione di Green così ottenuta non è causale per nessuna scelta di A, ma che si può rendere causale aggiungendo anche una soluzione dell'omogenea della forma

$$G_0(t) = Be^{-\beta t}\ ,$$

che non ammette trasformata di Fourier e pertanto non è stata ottenuta con il metodo precedente.

Esercizio 3

I *Polinomi di Legendre* sono la seguente famiglia di polinomi definiti per $x \in [-1, 1]$

$$P^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}\,(\rho(x))^n\quad,\quad \rho(x) \equiv x^2 - 1\ .$$

dove l'indice n corre sui naturali (incluso $n = 0$ nel qual caso l'espressione va interpretata come $P^{(0)}(x) = 1$). Nota che $P^{(n)}(x)$, essendo la derivata n-esima di un polinomio di grado $2n$, ha grado n.

I - (2 punti) Data una funzione $f(x) \in L^2([-1, 1])$ che è derivabile (almeno) n volte, e con $\frac{d^nf}{dx^n} \in L^2([-1, 1])$, mostra che

$$(P^{(n)}, f) = \frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\left(\rho^n, \frac{d^nf}{dx^n}\right)\ , \tag{1}$$

dove $(\cdot,\cdot)$ indica il prodotto scalare in $L^2([-1,1])$. Usa questo per dedurre che $P^{(n)}$ è ortogonale a x^m, per ogni $m < n$, e dunque che i polinomi di Legendre sono una famiglia ortogonale, ovvero vale

$$(P^{(n)}, P^{(m)}) = C_n \delta_{nm} \ .$$

[*Suggerimento*: integra per parti per mostrare (1).]

II - (3 punti) Usa (1) e la seguente identità

$$\int_{-1}^{+1} dx\, (x^2-1)^n = \frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}\, (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \ ,$$

per ottenere

$$C_n = \frac{2}{2n+1} \ .$$

III - (5 punti) Dato che i polinomi sono un sottoinsieme denso in $L^2([-1,1])$, e che qualsiasi polinomio di grado k può essere scritto come combinazione lineare dei primi k polinomi di Legendre, l'insieme

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{C_n}} P^{(n)}(x) \right\}_{n\in\mathbb{N}} \ , \tag{2}$$

è un sistema ortonormale completo su $L^2([-1,1])$. Usa questa informazione per dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{A_n}{2^n\, n!} \right)^2 = \sinh(2) \ ,$$

dove la successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definita da

$$A_n \equiv \int_{-1}^{+1} dx\, (x^2-1)^n e^x \ .$$

[*Suggerimento*: Usa l'identità di Parseval per la serie di Fourier della funzione e^x nel sistema completo (2), e sfrutta anche l'identità (1).]