ESAME 16/11/2021

ESERCIZIO 1

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}, \quad n>1$$

I) Le singolarità sono in corrispondenza degli zeri del denominatore:

$$1+z^n = 0 \Rightarrow z^n = -1 \Rightarrow z = \omega_k = e^{\frac{i\pi}{n} + \frac{2\pi i k}{n}}$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

Sono n poli di ordine 1 negli n punti ω_k, $k=0,\dots,n-1$. Per vedere che l'ordine è 1 possiamo fattorizzare il polinomio al denominatore:

$$1+z^n = (z-\omega_0)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1})$$

$\Rightarrow$ tutti gli zeri al denominatore hanno molteplicità 1, quindi sono poli di ordine 1 per $f(z)$.

Per $z \to \infty$:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{1}{z^n}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right)$$

$\Rightarrow f$ è regolare all'infinito.

II) L'unica singolarità interna al cammino è ω_0. Quindi usando il teorema interno dei residui: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \, Res_f(\omega_0)$

Notiamo che:

$$Res_f(\omega_k) = \lim_{z\to\omega_k} \frac{z-\omega_k}{1+z^n} = \lim_{z\to\omega_k} \frac{z-\omega_k}{z^n-\omega_k^n}$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\lim_{z\to\omega_k} \frac{z^n-\omega_k^n}{z-\omega_k}} = \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^n)\big|_{z=\omega_k}} = \frac{1}{n\,\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n}$$

$$= -\,\omega_k/n \neq 0.$$

Quindi: $$\oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i\,\frac{\omega_0}{n} = -2\pi i\,\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}.$$

$\underline{III}$) Stimiamo l'integrale sull'arco:

$$\left|\int f(z)\,dz\right| \leq \frac{2\pi}{n} R \; \mathrm{Max}\,|f(z)|$$

$$\underset{R\to\infty}{=} \frac{2\pi}{n} R\, \frac{1}{R^n}\left(1+O\left(\frac{1}{R^n}\right)\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

$$\int f(z)\,dz = \int_R^0 dx\, e^{\frac{2\pi i}{n}} \frac{1}{1+(x e^{2\pi i/n})^n}$$

↳ parametrizzazione: $z = x e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $x \in [0,R]$

$$= -e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R dx \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} -e^{\frac{2\pi i}{n}} I_n$$

$$\int dz\, f(z) = \int_0^R dx \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} I_n .$$

↳ parametrizzazione: $z = x$, $x \in [0, R]$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \oint_\gamma f(z)\, dz = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) I_n$$

$$\Rightarrow \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) I_n = -2\pi i \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}$$

↳ dal punto precedente.

Quindi:

$$I_n = -\frac{\pi}{n} \frac{2i\, e^{\frac{\pi i}{n}}}{\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)}$$

$$= -\frac{\pi}{n} \frac{i}{e^{-\frac{\pi i}{n}} - e^{+\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \in \mathbb{R}, \ e > 0$$

come deve essere.

Esercizio 2

$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ a supporto compatto

I) Come da suggerimento consideriamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{izx}.$$ Usando che $\exists R$ tale che

$f(x)=0$ per $x \notin [-R, R]$, riscriviamo l'integrale come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{izx} = \int_{-R}^{+R} dx\, f(x) e^{izx}$$

Dunque:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{izx} \right| \leq \int_{-R}^{+R} dx \left| f(z) \right| e^{-\mathrm{Im}(z) x}$$

$$\leq e^{-|\mathrm{Im}(z)| R} \underbrace{\int_{-R}^{+R} dx\, |f(z)}_{< +\infty \text{ per } f \in L^2(\mathbb{R})} < +\infty$$

L'integrale converge per $\forall z \in \mathbb{C}$ e quindi definisce una funzione:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{izx}$$

Dalla definizione è chiaro che per $z = \omega \in \mathbb{R}$ $F(z)$ si riduce alla trasformata di Fourier di f:

$$F(z)\Big|_{z=\omega\in\mathbb{R}} = \hat{f}(\omega).$$

Mostriamo che F è una funzione analitica. Dobbiamo mostrare che ammette derivata in senso complesso:

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \frac{e^{izx}-e^{iz_0x}}{z-z_0}$$

$$= \int_{-R}^{+R} dx\, f(x)\, \frac{e^{izx}-e^{iz_0x}}{z-z_0}$$

Esiste il limite della funzione integranda $\forall x$ nell'intervallo di integrazione:

$$\lim_{z\to z_0} f(x)\, \frac{e^{izx}-e^{iz_0x}}{z-z_0} = f(x)\frac{d}{dz}e^{izx}\Big|_{z=z_0}$$

$$= ix\, f(x)\, e^{iz_0x}$$

Inoltre: $\left| f(x)\, \dfrac{e^{izx}-e^{iz_0x}}{z-z_0}\right|$

$$\leq |f(x)|\, \frac{|e^{-(\mathrm{Im}\, z)x}-e^{-(\mathrm{Im}\, z_0)x}|}{|z-z_0|}$$

$$\to \left|e^{izx}-e^{iz_0x}\right| \leq \left|\,|e^{izx}|-|e^{iz_0x}|\,\right|$$

$$\leq |f(x)| \left| \frac{e^{-(\mathrm{Im}\, z)x}-e^{-(\mathrm{Im}\, z_0)x}}{(\mathrm{Im}\, z)-(\mathrm{Im}\, z_0)} \right|$$

$$\to |z-z_0| \geq |\mathrm{Im}\, z - \mathrm{Im}\, z_0|$$

Prendendo $\mathrm{Im}\, z - \mathrm{Im}\, z_0 \in [-1,1]$, che è sufficiente per il limite $z\to z_0$, possiamo stimare:

$$\leq |f(x)| \max_{y\in[-1,1]} \left|\frac{d}{dy}e^{-yx}\right| = |f(x)|\, |x|\, e^{|x|}$$

Riassumendo, $\forall z$ nella striscia $\mathrm{Im}\, z \in [\mathrm{Im}\, z_0 - 1, \mathrm{Im}\, z_0 + 1]$ possiamo stimare:

$$\left| f(x) \, \frac{e^{izx} - e^{iz_0 x}}{z - z_0} \right| \leq \underbrace{|f(x)| \, |x| \, e^{|x|}}_{\text{funzione integrabile su } [-R, R]}$$

Quindi per il teorema della convergenza dominata

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_{-R}^{+R} dx \; ix \, f(x) e^{iz_0 x}$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{dF}{dz}(z_0)}$$

Quindi F è derivabile in senso complesso e quindi è analitica su tutto $\mathbb{C}$, ovvero è intera.

Se aggiungiamo anche l'ipotesi che $F(z)$ sia limitata per $z \to \infty$, allora per il teorema di Liouville $F(z)$ è una costante. In particolare per $z = \omega$ F è costante e quindi:

$$\hat{f}(\omega) = C \quad \text{costante.}$$

Ma visto che $f \in L^2(\mathbb{R})$ anche $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. L'unica funzione costante e quadrato sommabile è $C = 0$, la funzione nulla. Dunque in questo caso $\hat{f}(\omega) = 0$, che applicando l'anti-trasformata implica $f(x) = 0$.

II) $$f(x) = x\,\underbrace{\theta\left(\frac{1}{2} - \left|x - \frac{3}{2}\right|\right)}_{= \begin{cases} 1, & \text{per } x \in [1,2] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}} + x\,\underbrace{\theta\left(\frac{1}{2} - \left|x + \frac{3}{2}\right|\right)}_{= \begin{cases} 1, & \text{per } x \in [-2,-1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-2}^{-1} dx\, x\, e^{i\omega x} + \int_{1}^{2} dx\, x\, e^{i\omega x}$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx\, x\, \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dx} e^{i\omega x} + \int_{1}^{2} dx\, x\, \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dx} e^{i\omega x}$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left(x e^{i\omega x} \Big|_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} dx\, e^{i\omega x} + x e^{i\omega x} \Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} dx\, e^{i\omega x} \right)$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left(-e^{-i\omega} + 2e^{-2i\omega} - \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega} + \frac{1}{i\omega} e^{-2i\omega} + 2e^{2i\omega} - e^{i\omega} - \frac{1}{i\omega} e^{2i\omega} + \frac{1}{i\omega} e^{i\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left(4\cos(2\omega) - 2\cos(\omega) - 2\frac{\sin(2\omega)}{\omega} + 2\frac{\sin\omega}{\omega} \right)$$

Controlliamo che è restrizione all'asse reale di una funzione analitica:

$$F(z) = \frac{1}{iz}\left(4\cos(2z) - 2\cos(z) - 2\frac{\sin(2z)}{z} + 2\frac{\sin z}{z}\right)$$

unica potenziale singolarità: $z=0$. Controlliamo l'espansione di Laurent:

$$F(z) \underset{z\to 0}{=} \frac{1}{iz}\Big(4\left(1+O(z^2)\right) - 2\left(1+O(z^2)\right) - \frac{2}{z}\left(2z+O(z^3)\right) + \frac{2}{z}\left(z+O(z^3)\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{iz}\left(\cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{4} + \cancel{2} + O(z^2)\right) = O(z)$$

dunque la singolarità in $z=0$ è rimovibile e F è in effetti una funzione intera.

ESERCIZIO 3

T operatore, $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ s.o.c. di autovettori

$$T(e^{(n)}) = \lambda_n e^{(n)}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n$$

$$v : \mathbb{R}_+ \to H, \quad t \mapsto v(t), \qquad \dot{v}(t) = -T(v(t)), \quad v(0) = v_0 \in H.$$

I) $v_0 = a_n e^{(n)}$, $a_n \in \mathbb{C}$

$$v(t) = \alpha_n(t) e^{(n)}$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) = \dot{\alpha}_n(t) e^{(n)}$$

$$T(v(t)) = \alpha_n(t) T(e^{(n)}) = \lambda_n \alpha_n(t) e^{(n)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_n(t) e^{(n)} = -\lambda_n \alpha_n(t) e^{(n)}, \\ \alpha_n(t=0) e^{(n)} = a_n e^{(n)}. \end{cases}$$

Prendendo il prodotto scalare con $e^{(n)}$ otteniamo l'equazione scalare:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_n(t) = -\lambda_n \alpha_n(t) \\ \alpha_n(t=0) = a_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t}.$$

II) $v_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(n)}$, $a_n \in \mathbb{C}$

Ansatz : $v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(t) e^{(n)}$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{\alpha}_n(t) e^{(n)}$$

$$T(v(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \alpha_n(t) e^{(n)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{\alpha}_n(t) e^{(n)} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \alpha_n(t) e^{(n)} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(t=0) e^{(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(n)} \end{cases}$$

Prendendo il prodotto scalare con $e^{(k)}$ troviamo:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_k(t) = -\lambda_k \alpha_k(t) \\ \alpha_k(t=0) = a_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 1, \quad \alpha_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t}, \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n t} e^{(n)}$$

Visto che $\lambda_n > 0 \ \forall n > 1$, $e^{-\lambda_n t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, $\forall n > 2$.

Quindi:

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = a_1 e^{(1)} = (e^{(1)}, v_0) e^{(1)}.$$