Es 1

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \tan(\pi z)}$$

I) $\tan(\pi z) = 0 \Rightarrow \sin(\pi z) = 0, \quad z = k \in \mathbb{Z}$

Per $k \neq 0$ polo di ordine 1, infatti:

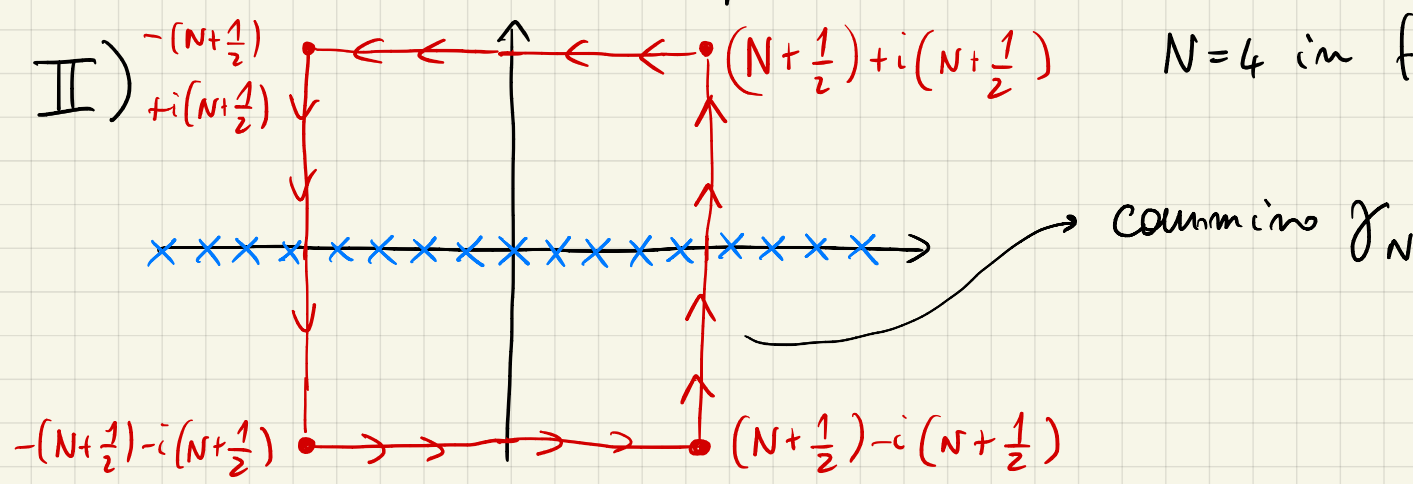
$$\lim_{z \to k} (z-k) \frac{1}{z^2 \tan(\pi z)} = \lim_{z \to k} \frac{1}{z^2} \frac{1}{\frac{\tan(\pi z)}{z-k}}$$

$$= \frac{1}{k^2} \frac{1}{\frac{d}{dz} \tan(\pi z)\Big|_{z=k}} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\pi \frac{1}{(\cos(\pi k))^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2}$$

Per $k=0$, ovvero $z=0$, è un polo di ordine 3 perché ci sono due potenze di z in più al denominatore per via di $1/z^2$.

$f(z)$ non ha altre singolarità per z finito. Visto che la successione $z = k \in \mathbb{Z}$ si accumula a $z = \infty$, $z = \infty$ non è una singolarità isolata ma piuttosto un punto di accumulazione di poli.

II)



$N = 4$ in figura

$$\oint_{\gamma_N} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ sing.} \\ \text{isolate interne}}} \mathrm{Res}_f(z_i)$$

$$= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_f(k) + \sum_{k=-N}^{-1} \mathrm{Res}_f(k) + \mathrm{Res}_f(z=0) \right]$$

Come abbiamo visto con il calcolo al punto precedente:

$$\mathrm{Res}_f(k) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2}$$

quindi:

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{N}}_{\text{rinomino } k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=-N}^{-1}}_{\text{rinomino } k=-n} \frac{1}{k^2} + \mathrm{Res}_f(z=0) \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \mathrm{Res}_f(z=0) \right]$$

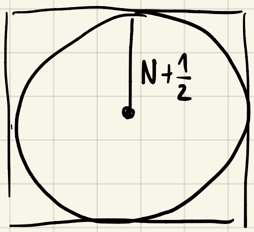
III) Prendiamo il limite $N \to \infty$:

$$\left| \oint_{\gamma_N} f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{4 \times (2N+1)}_{\text{lunghezza del cammino}} \times \operatorname*{Max}_{\gamma_N} |f(z)|$$

Usando il fatto (che si poteva dare per buono) che $\frac{1}{\tan(\pi z)}$ è limitata su γ_N per $N \to \infty$, ovvero:

$$\max_{\gamma_N} \frac{1}{|\tan(\pi z)|} \leq C \quad \text{indipendente da } N$$

$$\Rightarrow \left| \oint_{\gamma_N} f(z)\,dz \right| \leq 4 \times (2N+1) \times C \times \max_{\gamma_N} \frac{1}{|z|^2}$$



$$|z| \geq N + \frac{1}{2} \quad \text{su } \gamma_N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|^2} \leq \frac{1}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{su } \gamma_N$$

$$\Rightarrow \left| \oint_{\gamma_N} f(z)\,dz \right| \leq 4 \times (2N+1) \times C \times \frac{1}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Dunque: $$\oint_{\gamma_N} f(z)\,dz \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

e otteniamo: $$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\mathrm{Res}_f(z=0)$$

Rimane da calcolare il residuo in $z=0$.
Un modo possibile è usare le serie di Taylor date nel suggerimento:

$$\frac{1}{z^2 \tan(\pi z)} \underset{z\to 0}{=} \frac{1}{z^2\left(\pi z + \frac{\pi^3}{3} z^3 + O(z^5)\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi z^3\left(1 + \frac{\pi^2}{3} z^2 + O(z^4)\right)} = \frac{1}{\pi z^3}\left(1 - \frac{\pi^2}{3} z^2 + O(z^4)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi z^3} - \frac{\pi}{3}\frac{1}{z} + O(z^1) \Rightarrow \mathrm{Res}_f(z=0) = -\frac{\pi}{3}$$

Alternativamente possiamo calcolare con la formula per il residuo in polo di ordine 3:

$$\mathrm{Res}_f(z=0) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\cancel{z^3}^{\,z}\frac{1}{\cancel{z^2}\tan(\pi z)}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(-\frac{z}{(\tan(\pi z))^2}\frac{\pi}{(\cos(\pi z))^2} + \frac{1}{\tan(\pi z)}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(-\pi\frac{z}{(\sin(\pi z))^2} + \frac{1}{\tan(\pi z)}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\pi\frac{1}{(\sin(\pi z))^2} + \pi\frac{2z}{(\sin(\pi z))^3}\pi\cos\pi z - \frac{1}{(\tan\pi z)^2}\frac{\pi}{(\cos\pi z)^2}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}\left[-\frac{2}{(\sin(\pi z))^2} + \frac{2\pi z\cos\pi z}{(\sin(\pi z))^3}\right]$$

$$= -\pi\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{(\sin(\pi z))^2}\left(1 - \frac{\pi z}{\tan\pi z}\right)\right]$$

$$= -\pi\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{\pi^2 z^2 + O(z^4)}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{3}z^2 + O(z^4)}}_{\text{qui ho usato sviluppo di } \tan(\pi z)}\right)\right]$$

$$= -\pi\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{\pi^2 z^2}(1+O(z^2))\left(1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{3}z^2 + O(z^4)\right)\right)\right]$$

$$= -\pi\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{\cancel{\pi^2 z^2}}(1+O(z^2))\frac{\cancel{\pi^2}}{3}\cancel{z^2}(1+O(z^2))\right] = -\frac{\pi}{3}$$

Quindi otteniamo: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) = +\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Es 2

$$f_1(x) = \theta(R-|x|), \quad f_2(x) = e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

I) $$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \underbrace{\theta(R-|x-x'|)}_{\substack{=1 \text{ se } |x-x'|<R \Rightarrow x-R<x'<x+R \\ e =0 \text{ altrimenti}}} e^{-\frac{x'^2}{L^2}}$$

$$= \int_{x-R}^{x+R} dx' \, e^{-\frac{x'^2}{L^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(f_1 * f_2)(x) \underset{\downarrow}{=} e^{-\frac{(x+R)^2}{L^2}} - e^{-\frac{(x-R)^2}{L^2}}$$

derivata rispetto
e estremo dell'integrale

II) $$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}(f_1 * f_2)\right](k) = -ik\,\mathcal{F}[f_1 * f_2](k)$$

$$= -ik\,\mathcal{F}[f_1](k)\,\mathcal{F}[f_2](k)$$

$$\mathcal{F}[f_1](k) = \frac{2\sin(Rk)}{k}$$

$$\mathcal{F}[f_2](k) = L\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}(f_1 * f_2)\right](k) = -2iL\sqrt{\pi}\,\sin(Rk)\, e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}$$

$$= L\sqrt{\pi}\left(e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}e^{-ikR} - e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}e^{+ikR}\right)$$

↳ riscrivendo $\sin(kR)$ con formule di Eulero

$$\mathcal{F}^{-1}\left[L\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}L^2k^2} e^{\pm ikR}\right](x)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[L\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}\right](x \mp R) = e^{-\frac{(x\mp R)^2}{L^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(f_1 * f_2)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[L\sqrt{\pi}\left(e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}e^{-ikR} - e^{-\frac{1}{4}L^2k^2}e^{+ikR}\right)\right]$$

$$= e^{-\frac{(x+R)^2}{L^2}} - e^{-\frac{(x-R)^2}{L^2}}$$ come al punto I).

Es 3:

$$T_L : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$T_L[f] = \frac{1}{x+i} f(x+L)$$

I) Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora vale:

$$\|T_L[f]\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{1+x^2}|f(x+L)|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x+L)|^2$$

$$= \|f\|^2 < +\infty \Rightarrow T_L[f] \in L^2(\mathbb{R}).$$

↓ cambio di variabile $x \mapsto x' = x + L$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{L\to+\infty} \|T_L[f]\|^2 = \lim_{L\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{1+x^2} |f(x+L)|^2$$

$$= \lim_{L\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \underbrace{\frac{1}{1+(y-L)^2} |f(y)|^2}$$

(suggerimento)

* Funzione integranda tende a 0 per $L \to +\infty$
* è dominata da: $|f(y)|^2$ che è integrabile perché $f \in L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ per il teorema della convergenza dominata il limite si può portare dentro e: $\lim_{L\to+\infty} \|T_L[f]\|^2 = 0$.

II) Abbiamo già visto che per $\forall f \in L^2$ vale:

$$\|T_L[f]\| \leq \|f\| \quad \text{dunque} \quad \|T_L\| \leq 1.$$

Ora usiamo il suggerimento e calcoliamo:

$$\|T_L[f_n]\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{1+x^2} \underbrace{\left(\Theta\left(\tfrac{1}{n} - |x-\cancel{L}+\cancel{L}|\right)\right)^2}$$

siccome la funzione è $=0$ oppure 1 possiamo togliere il quadrato

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{1+x^2} \Theta\left(\tfrac{1}{n} - |x|\right) = \int_{-1/n}^{+1/n} dx \, \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{atan}\left(\tfrac{1}{n}\right) - \operatorname{atan}\left(-\tfrac{1}{n}\right)$$

$= 2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{n}\right).$

Confrontiamo con: $\|f_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\Theta\left(\frac{1}{n} - |x-L|\right)\right)^2$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \Theta\left(\frac{1}{n} - |x-L|\right) = \int_{L-\frac{1}{n}}^{L+1/n} dx \cdot 1 = \frac{2}{n}.$$

Dunque: $$\frac{\|T_L[f_n]\|^2}{\|f_n\|^2} = \frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

e pertanto: $\|T_L\| \geq 1$ che insieme all'altra disuguaglianza dà: $\|T_L\| = 1, \ \forall L.$