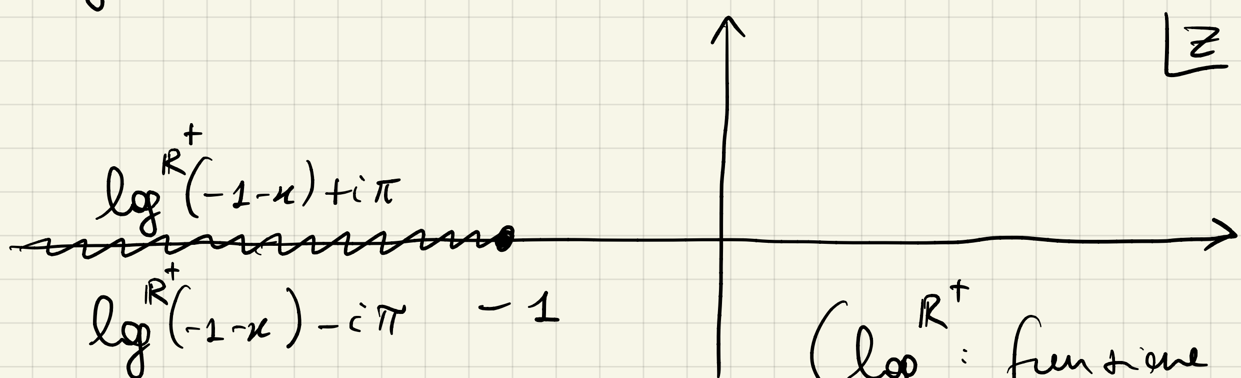
# ESERCIZIO 1

$$f(z) = \frac{\log(z+1) + \log(z-1)}{\sqrt{z-1}\,(z-2)}$$

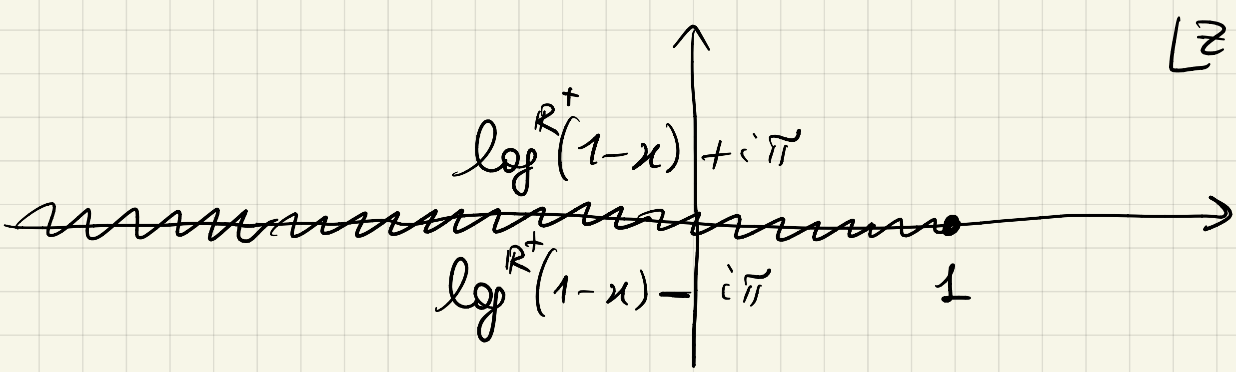
I) Le funzioni $\log(z+1)$, $\log(z-1)$ e $\dfrac{1}{\sqrt{z-1}}$ hanno dei tagli. Prendendo il ramo principale abbiamo:

- $\log(z+1)$: taglio per $z = x \in \mathbb{R}$, con $x < -1$

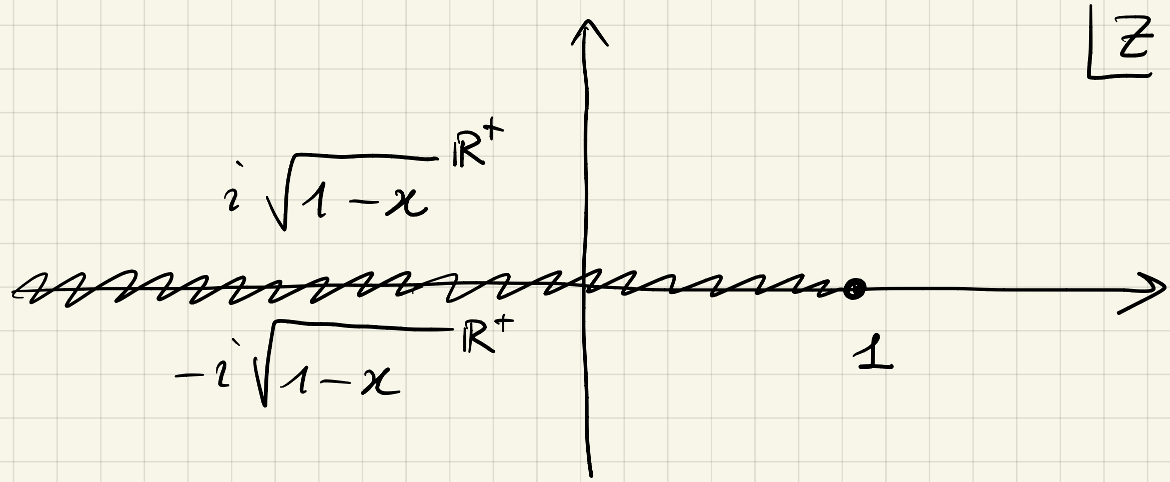



($\log^{\mathbb{R}^+}$: funzione log definita su $\mathbb{R}^+$)

- $\log(z-1)$: taglio per $z = x \in \mathbb{R}$, con $x < 1$



⊙ $\sqrt{z-1}$ : taglio per $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 1$




($\sqrt{\cdot}^{\,\mathbb{R}^+}$ : funzione radice quadrata su $\mathbb{R}^+$)

Mettendo insieme abbiamo che $f(z)$ ha un taglio per $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ e che i valori sopra e sotto il taglio sono (omettiamo $\mathbb{R}^+$ per brevità):

⊙ per $-1 < x < 1$ :

$$\begin{cases} f^{sopra}(x) = \dfrac{\log(x+1) + \log(1-x) + i\pi}{i\sqrt{1-x}\,(x-2)} = -i\,\dfrac{\log(1-x^2) + i\pi}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} \\[2ex] f^{sotto}(x) = \dfrac{\log(x+1) + \log(1-x) - i\pi}{-i\sqrt{1-x}\,(x-2)} = +i\,\dfrac{\log(1-x^2) - i\pi}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} \end{cases}$$

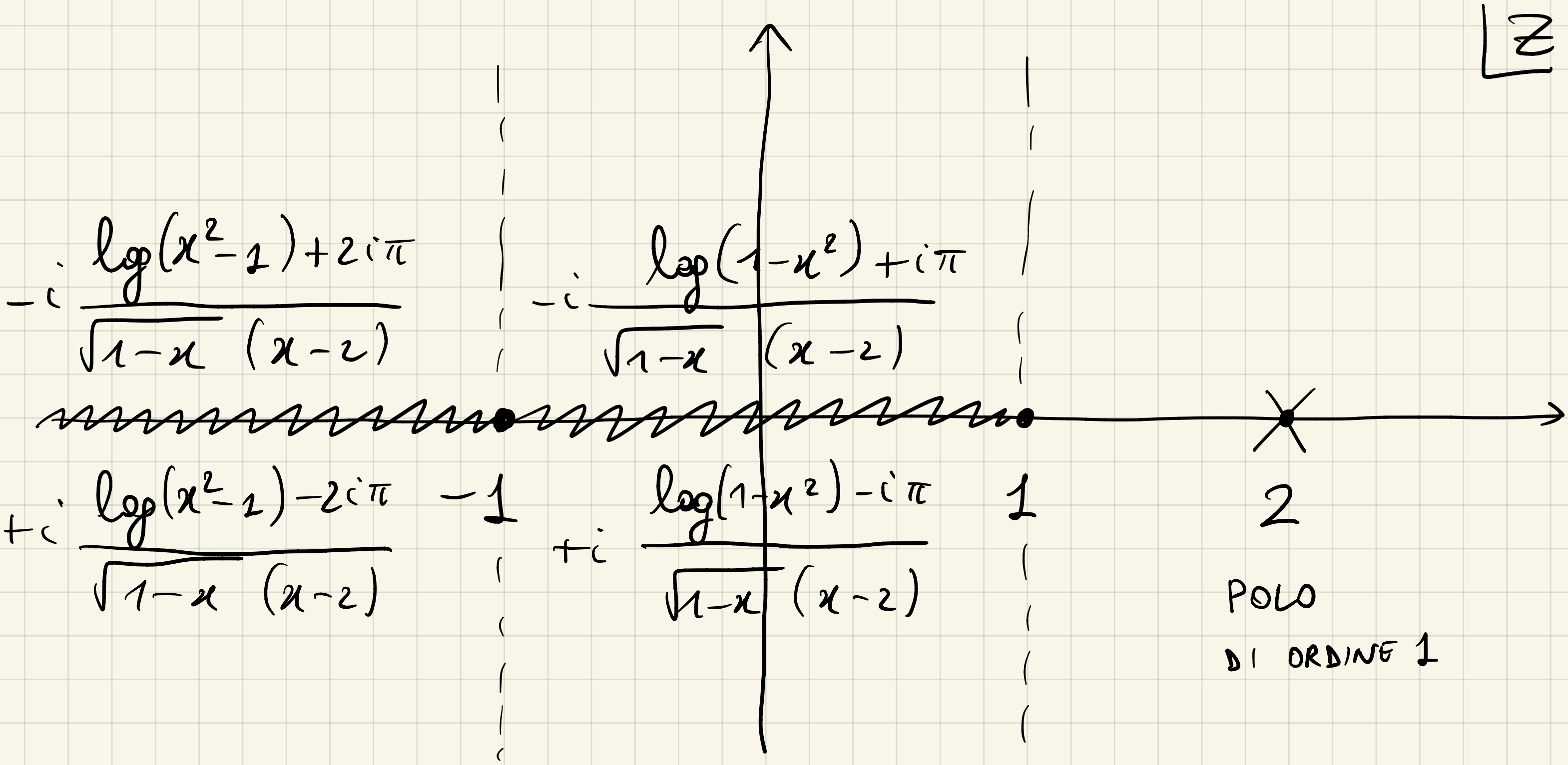
⊙ per $x < -1$ :

$$\begin{cases} f^{sopra}(x) = \dfrac{\log(-1-x) + \log(1-x) + 2i\pi}{i\sqrt{1-x}\,(x-2)} = -i\,\dfrac{\log(x^2-1) + 2i\pi}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} \\[2ex] f^{sotto}(x) = \dfrac{\log(-1-x) + \log(1-x) - 2i\pi}{-i\sqrt{1-x}\,(x-2)} = +i\,\dfrac{\log(x^2-1) + 2i\pi}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} \end{cases}$$

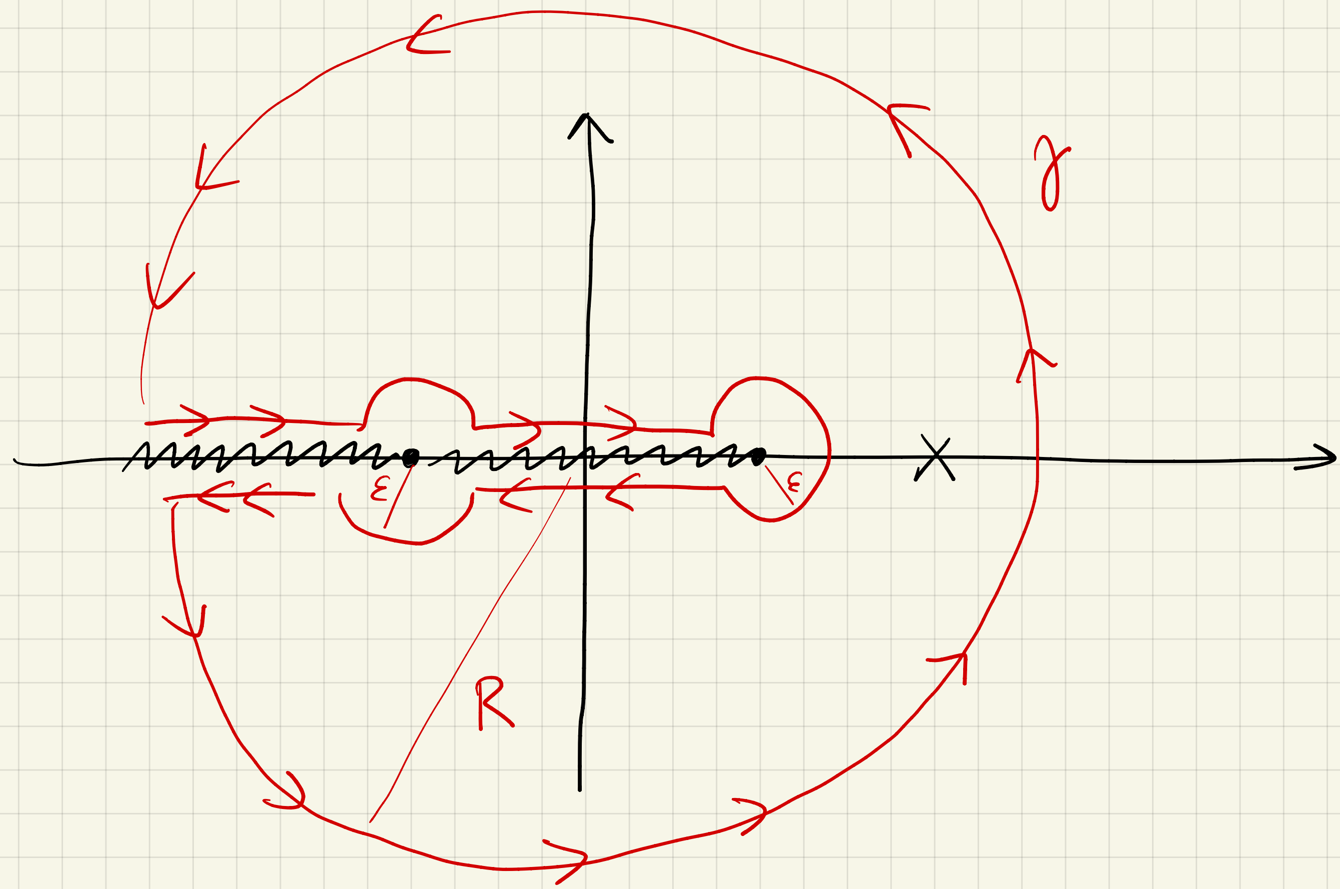
Inoltre a causa del fattore $z-2$ al denominatore, $f$ ha un polo di ordine 1 in $z=2$.

$z=\infty$ non è una singolarità isolata perché il taglio arriva fino a $\infty$, infatti è un punto di diramazione per $f$.

Riassumendo in figura, abbiamo:



II) Consideriamo il cammino:




Da una parte abbiamo:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}_f (z=2)$$

$\downarrow$ teorema interno dei residui

$$= 2\pi i \ \frac{\log(3) + \log(1)}{\sqrt{1}} = 2\pi i \log(3)$$

(Trattandosi del ramo principale, quando valutiamo sull'asse reale positivo abbiamo le usuali funzioni definite su $\mathbb{R}^+$).

D'altra parte dividendo il cammino nelle sue varie componenti troviamo:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}_{\substack{\text{cerchio di}\\ \text{raggio } R \text{ centrato}\\ \text{in } z=0}} + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} dx \left( f^{\text{sopra}}(x) - f^{\text{sotto}}(x) \right)$$

$$+ \underbrace{\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)\,dz}_{\substack{\text{cerchio di raggio}\\ \varepsilon \text{ centrato in}\\ z=-1}} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} dx \left( f^{\text{sopra}}(x) - f^{\text{sotto}}(x) \right)$$

$$+ \underbrace{\int_{\gamma_{+1,\varepsilon}} f(z)\,dz}_{\substack{\text{cerchio di raggio } \varepsilon\\ \text{centrato in } z=+1}}$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \underset{R\to\infty}{\leqslant} 2\pi R\,\frac{2\log(R)}{R^3}\left(1+O\left(\frac{1}{\log(R)}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

$$\left|\int_{\gamma_{+1,\varepsilon}} f(z)\,dz\right| \underset{\varepsilon\to0^+}{\leqslant} 2\pi\varepsilon\,\frac{\log\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\varepsilon}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} 0.$$

$$\left|\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)\,dz\right| \underset{\varepsilon\to0^+}{\leqslant} 2\pi\varepsilon\,\frac{\log\varepsilon}{3\sqrt{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\varepsilon}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} 0.$$

Quindi: $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{-1} dx\,(-2i)\,\frac{\log(x^2-1)}{\sqrt{1-x}\,(x-2)}$$

$$+\int_{-1}^{+1} dx\,(-2i)\,\frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-x}\,(x-2)}$$

espressioni che si ottengono calcolando $f^{\text{sopra}} - f^{\text{sotto}}$

$$\Rightarrow (-2i)\left(\int_{-\infty}^{-1} dx \, \frac{\log(x^2-1)}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} + \int_{-1}^{+1} dx \, \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-x}\,(x-2)}\right) = 2\pi i \log(3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{-1} dx \, \frac{\log(x^2-1)}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} + \int_{-1}^{+1} dx \, \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-x}\,(x-2)} = -\pi \log(3)}$$

## ESERCIZIO 2

$$\frac{d}{dx} G(x) = G(x+1) + F(x)$$

I) $$\underbrace{-ik\,\hat{G}(k)}_{\substack{\text{proprietà della}\\ \text{trasformata della}\\ \text{derivata}}} = \underbrace{e^{-ik}\,\hat{G}(k)}_{\substack{\text{proprietà della}\\ \text{trasformata della}\\ \text{funzione traslata } (*)}} + \hat{F}(k)$$

$$(*):\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{ikx}\, G(x+1) \underset{y=x+1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{ik(y-1)}\, G(y)$$

$$= e^{-ik} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{iky} G(y) = e^{-ik}\,\hat{G}(k).$$

$$\Rightarrow \left(-ik - e^{-ik}\right)\hat{G}(k) = \hat{F}(k)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{G}(k) = \frac{\hat{F}(k)}{-i(k-i e^{-ik})} = i \frac{\hat{F}(k)}{k-ie^{-ik}}$$

Verifichiamo che il denominatore non si annulla mai per $K \in \mathbb{R}$:

$K - i e^{-ik} = 0 \rightsquigarrow$ esiste soluzione $K \in \mathbb{R}$?

$K = i e^{-ik}$ prendendo il modulo di entrambi i membri:

$|K| = 1 \Rightarrow K = \pm 1$

Ma nessuno di questi due valori soddisfa l'equazione:

$$+1 \neq i e^{-i}$$

$$-1 \neq i e^{+i}$$

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni per $K \in \mathbb{R}$.

II) $$|\hat{G}(k)| = \frac{|\hat{F}(k)|}{|k - ie^{-ik}|}$$

Abbiamo verificato al punto precedente che il numeratore non si annulla mai.

Quindi dividere per $|k - i e^{-ik}|$ non introduce nessuna divergenza per $k$ finito, e se $|\hat{F}(k)|^2$ è integrabile in tutti i $k$ al finito, anche $|\hat{G}(k)|^2$ lo è.

Rimane da verificare il comportamento per $|k| \to +\infty$. In questo limite:

$$|\hat{G}(k)| \underset{|k|\to+\infty}{=} \frac{|\hat{F}(k)|}{|k| \left|1 - i\frac{e^{-ik}}{k}\right|}$$

$$\leq \frac{|\hat{F}(k)|}{|k|}\left(1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)\right)$$

[ Più in dettaglio: $\left|1 - i\frac{e^{-ik}}{k}\right|$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{\sin k}{k}\right)^2 + \frac{\cos k^2}{k^2}} \underset{\substack{\sin k < 1 \\ \cos k < 1}}{\leq} \sqrt{1 + \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)$$ ]

Pertanto se l'integrale di $|\hat{F}(k)|^2$ converge per $|k| \to +\infty$, anche quello di $|\hat{G}(k)|^2$ converge perché va a 0 più velocemente.

Dunque: $\hat{F}(k) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{G}(k) \in L^2(\mathbb{R})$.

Con lo stesso argomento vediamo che anche la funzione $-ik\hat{G}(k) \in L^2(\mathbb{R})$: rispetto a $\hat{F}(k)$ non ha altre divergenze per $k$ finito, $|k\hat{G}(k)|^2$ per $|k| \to +\infty$ decresce come $|\hat{F}(k)|$.

Quindi vale anche: $\hat{F}(k) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow -ik\hat{G}(k) \in L^2(\mathbb{R})$

Pertanto:

$$F(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{F}(k) \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \hat{G}(k),\ -ik\hat{G}(k) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow G(x),\ \frac{dG}{dx}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

la trasformata è mappa invertibile da $L^2$ a $L^2$.

III) Per $G(x), F(x) \in L^1(\mathbb{R})$ le trasformate sono funzioni continue e limitate.

Vale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, G(x) = \hat{G}(0) = \lim_{k \to 0} \hat{G}(k)$$

perché funzione continua

$$= \lim_{k \to 0} \frac{i \hat{F}(k)}{k - i e^{-ik}}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{i}{-i} \hat{F}(k) = -\hat{F}(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F(x).$$

Dall'equazione: $\frac{d}{dx} G(x) = G(x+1) + F(x)$

segue che se $G$ e $F$ sono in $L^1(\mathbb{R})$, allora anche $\frac{d}{dx} G(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$. Per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ con derivata in $L^1(\mathbb{R})$ vale che:

$$\lim_{|x| \to \infty} G(x) = 0.$$

Pertanto integrando l'equazione in $dx$ da $-\infty$ a $+\infty$ troviamo:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{d}{dx} G(x)}_{\substack{G(+\infty) - G(-\infty) \\ = 0}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, G(x+1)}_{= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, G(x)} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, F(x)$$

$x+1 = x'$

$\Rightarrow$ troviamo di nuovo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, G(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, F(x).$

# ESERCIZIO 3

I) Seguiamo il suggerimento.

Se $|f(x)|^2$ è integrabile su tutta la retta allora l'integrale su $[0, a]$ è finito, quindi $f_{rest} \in L^2([0,a])$.

$$\int_{-na}^{+na} dx \, |f(x)|^2 = \int_{-na}^{-(n-1)a} dx \, |f(x)|^2 + \int_{-(n-1)a}^{-(n-2)a} dx \, |f(x)|^2 + \ldots + \int_{(n-1)a}^{na} |f(x)|^2 dx$$

$$\int_{ka}^{(k+1)a} dx\, |f(x)|^2 \underset{\downarrow}{=} \int_0^a dy\, |f(y+ka)|^2$$

cambio di variabile

$$x = y + ka \quad , \; y \in [0,a]$$

$$\underset{\downarrow}{=} \int_0^a dy\, |f(y)|^2 = \| f_{rest} \|^2_{L^2([0,a])} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$f(y+ka)$
$= f(y)$ per la assunzione di periodicità

$$\Rightarrow \int_{-na}^{+na} dx\, |f(x)|^2 = \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{ka}^{(k+1)a} dx\, |f(x)|^2$$

$$= \sum_{k=-n}^{n-1} \| f_{rest} \|^2_{L^2([0,a])} = 2n \| f_{rest} \|^2_{L^2([0,a])}$$

Affinché questo limite sia finito per $n \to +\infty$ deve essere necessariamente $\| f_{rest} \|^2_{L^2([0,a])} = 0$.

In questo caso troviamo quindi che:

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

$\Rightarrow$ essendo la norma $L^2(\mathbb{R})$ nulla, $f$ è la funzione nulla.

II) Supponiamo che esiste $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\forall n \geq 1 \quad \left(e_n(x) - e_n(x-a), f(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(e_n^*(x) - e_n^*(x-a)\right) f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e_n^*(x) f(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e_n^*(x-a) f(x)$$

$\hookrightarrow x - a = y$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e_n^*(x) f(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; e_n^*(y) f(y+a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e_n^*(x) \left(f(x) - f(x+a)\right), \quad \forall n \geq 1$$

Siccome $\{e_n\}_{n \geq 1}$ è un sistema completo, questo implica che: $f(x) - f(x+a) = 0$.

Ma dunque $f$ è in $L^2$ ed è anche una funzio=

ne periodica. Per il risultato del punto precedente l'unica possibilità è che $f=0$.

$$\Rightarrow \quad \{e_n(x) - e_n(x-a)\}_{n\geq 1} \text{ è un sistema completo.}$$