Soluzione Esercizio 1

I La funzione ha un polo di ordine 3 in $z = 0$. Inoltre il denominatore si annulla in $z = \pm\frac{i}{2}$. Notiamo però che il numeratore si annulla in questi punti, perché $\cosh\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Quindi $z = \pm\frac{i}{2}$ sono singolarità rimuovibili. Infine notiamo che nello sviluppo in serie di Taylor-Laurent in $z = \infty$ ci sono infinite potenze positive di z a causa del $\cosh(z)$ al numeratore, dunque $z = \infty$ è una singolarità essenziale.

II Dall'analisi al punto precedente, l'unica singolarità interna al cammino è il polo di ordine 3 in $z = 0$. Dunque per il teorema dei residui, detto γ il cerchio unitario orientato in senso antiorario, abbiamo

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \,\mathrm{Res}_f(z=0) \ .$$

Calcoliamo il residuo usando la formula per un residuo a un polo di ordine 3

$$\mathrm{Res}_f(z=0) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\cosh(\pi z)}{z^2+\frac{1}{4}}\right)\Bigg|_{z=0} = 2\pi^2 - 16 \ .$$

Pertanto

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i\,(2\pi^2 - 16) \ .$$

III Possiamo calcolare lo stesso integrale usando il teorema esterno dei residui. Visto che la funzione non ha alcuna singolarità esterna al cammino di integrazione, troviamo

$$2\pi i\,(2\pi^2-16) = \oint_\gamma dz\, f(z) = -2\pi i\,\mathrm{Res}_f(z=\infty) \ ,$$

da cui segue

$$\mathrm{Res}_f(z=\infty) = -(2\pi^2-16) \ .$$

D'altra parte il residuo della funzione a infinito è l'opposto del coefficiente c_{-1} di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo in serie di Taylor-Laurent della funzione $f(z)$ centrato in $z = \infty$. Dunque otteniamo

$$c_{-1} = 2\pi^2 - 16 \ .$$

Soluzione Esercizio 2

I Notiamo che la funzione $G(x)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ e di conseguenza la sua trasformata di Fourier $\widehat{G}(k)$ deve essere anche in $L^2(\mathbb{R})$. Pertanto anch'essa ammette trasformata di Fourier $\widehat{\widehat{G}}(x) = 2\pi G(-x) = -2\pi G(x)$. Se $\widehat{G}(k)$ fosse in $L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata sarebbe una funzione continua. D'altra parte $G(x)$ ha una discontinuità in $x = 0$ dovuta al $\text{sign}(x)$, pertanto $\widehat{G}(k)$ non può essere in $L^1(\mathbb{R})$.

Calcoliamo $\widehat{G}(k)$ usando la definizione

$$
\begin{aligned}
\widehat{G}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \text{sign}(x)\, e^{-|x|} e^{ikx} \\
&= \int_{0}^{+\infty} dx\ e^{-(1-ik)x} - \int_{-\infty}^{0} dx\ e^{(1+ik)x} \\
&= \int_{0}^{+\infty} dx\ e^{-(1-ik)x} - \int_{0}^{+\infty} dx\ e^{-(1+ik)x} \\
&= \frac{1}{1-ik} - \frac{1}{1+ik} = \frac{2ik}{1+k^2}\ .
\end{aligned}
$$

Notiamo che $\hat{G}(k)$ è limitata su tutto $\mathbb{R}$ e va a 0 per $|k| \to +\infty$ come $\mathcal{O}(|k|^{-1})$, dunque non abbastanza velocemente per essere in $L^1(\mathbb{R})$, ma abbastanza per essere in $L^2(\mathbb{R})$, come anticipato dall'argomento precedente.

II Metodo (1): Sostituendo $G(x)$ nell'equazione dobbiamo calcolare

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} G(x) &= \frac{d}{dx}(e^{-|x|} \frac{d}{dx}\text{sign}(x) - e^{-|x|}(\text{sign}(x))^2) \\
&= \frac{d}{dx}(2e^{-|x|}\delta(x) - e^{-|x|}) \\
&= 2\delta'(x) + e^{-|x|}\text{sign}(x) \\
&= 2\delta'(x) + G(x)\ .
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi verificato che $G(x)$ soddisfa l'equazione data. Nei passaggi intermedi abbiamo usato che $2e^{-|x|}\delta(x) = 2\delta(x)$ perché grazie alla delta di Dirac possiamo calcolare la funzione $e^{-|x|}$ in $x = 0$, e abbiamo usato che $\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x)$ e $\frac{d}{dx}\text{sign}(x) = \delta(x)$.

Metodo (2): Applicando la trasformata all'equazione, e usando che $\widehat{\delta'(x)}(k) = -ik\widehat{\delta(x)}(k) = -ik$ e $\widehat{\frac{d^2}{dx^2}G(x)}(k) = -k^2\widehat{G}(k)$, troviamo

$$
(-k^2 - 1)\widehat{G}(k) = -2ik\ ,
$$

e notiamo che $\widehat{G}(k)$ calcolata al punto precedente in effetti soddisfa questa equazione.

Soluzione Esercizio 3

I Come suggerito usiamo induzione su N. Per $N = 0$ l'identità diventa $(\mathbb{1} + iT)S_0 = \mathbb{1} + iT$ che è vera perché $S_0 = \mathbb{1}$. Assumendo che sia vera per N, abbiamo

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} + iT)S_{N+1} &= (\mathbb{1} + iT)S_N + (\mathbb{1} + iT)(-i)^{N+1}T^{N+1} \\ &= \mathbb{1} - (-i)^{N+1}T^{N+1} + (-i)^{N+1}T^{N+1} - (-i)^{N+2}T^{N+2} \\ &= \mathbb{1} - (-i)^{N+2}T^{N+2} \ ,\end{aligned}$$

dunque l'identità è valida anche per $N + 1$ ed è dimostrata per ogni N.

Seguendo il suggerimento, consideriamo quindi

$$||((\mathbb{1} + iT)S_N)v - v|| = ||T^{N+1}v|| \leq ||T||^{N+1}||v|| \ .$$

L'ultima disuguaglianza si ottiene iterando $N+1$ volte la disuguaglianza $||Tw|| \leq ||T||\,||w||$, oppure usando che $||T^{N+1}|| = ||T||^{N+1}$. Infine siccome $||T|| < 1$ vale che $||T||^{N+1}||v|| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Pertanto anche il vettore nella norma a sinistra tende a 0 nel limite, ovvero

$$\lim_{N\to\infty} ((\mathbb{1} + iT)S_N)v = v \ .$$

Visto che questa identità è vera per qualsiasi $v \in \mathcal{H}$, e che $\mathbb{1} + iT$ è un operatore continuo e dunque commuta con il limite, deduciamo che

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k T^k = (\mathbb{1} + iT)^{-1} \ .$$

II Per una qualsiasi potenza vale $(-i)^k T^k\, T = (-i)^k T^{k+1} = T\,(-i)^k T^k$, e dunque per linearità $S_N T = T S_N$. Prendendo il limite $N \to \infty$ e usando la continuità di T otteniamo che $(\mathbb{1}+iT)^{-1}T = T(\mathbb{1}+iT)^{-1}$ e di conseguenza anche $(\mathbb{1}+iT)^{-1}(\mathbb{1}-iT) = (\mathbb{1}-iT)(\mathbb{1}+iT)^{-1}$.

Calcoliamo

$$\begin{aligned}U^\dagger &= ((\mathbb{1} + iT)^{-1})^\dagger(\mathbb{1} - iT)^\dagger \\ &= ((\mathbb{1} + iT)^\dagger)^{-1}(\mathbb{1} + iT^\dagger) \\ &= (\mathbb{1} - iT^\dagger)^{-1}(\mathbb{1} + iT^\dagger) \\ &= (\mathbb{1} - iT)^{-1}(\mathbb{1} + iT) \\ &= (\mathbb{1} + iT)(\mathbb{1} - iT)^{-1} \ .\end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato che $(T_1T_2)^\dagger = T_2^\dagger T_1^\dagger$, che $(T^{-1})^\dagger = (T^\dagger)^{-1}$, che $(iT)^\dagger = -iT^\dagger$, e l'assunzione che T sia autoaggiunto, ovvero $T^\dagger = T$. Infine nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'identità mostrata sopra che ci permette di scambiare l'ordine dei due fattori. L'espressione finale ottenuta per $U^\dagger$ è uguale a U^{-1}, dunque abbiamo mostrato che $U^\dagger = U^{-1}$ e l'operatore è unitario.