Lezione 27 settembre 2023

mercoledì 27 settembre 2023 11:06

PRELIMINARI:

La Matematica si basa su un SISTEMA ASSIOMATICO e usa il linguaggio della LOGICA FORMALE.

Un SISTEMA ASSIOMATICO (o TEORIA ASSIOMATICA) è un insieme di oggetti che non vengono definiti, chiamati ELEMENTI PRIMITIVI, con un insieme di ASSIOMI, cioè di affermazioni che sono assunte come vere.

Concetti in queste teorie:

LEMMA
PROPOSIZIONE
TEOREMA

$\Big\}$ è una AFFERMAZIONE ovvero un ENUNCIATO

DIMOSTRAZIONE: è un testo formale che parte da un assioma opp. da un'altra affermazione già dimostrata, seguendo le regole della teoria logico-deduttiva

Def.: Una teoria assiomatica si dice CONSISTENTE (COERENTE) se non contiene Proposizioni che sono allo stesso tempo vere e false.

Def.: Una teoria assiomatica si dice COMPLETA se al suo interno non ci sono Proposizioni INDECIDIBILI.

Def: Se A è una Proposizione, la sua NEGAZIONE si indica con $\neg A$ (non A)

SIMBOLI DELLA LOGICA FORMALE

① $\vee$ (vel) (oppure, o)

$A \vee B$ è vera se è vera A oppure è vera B

② $\wedge$ e

$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$

è vera se sono entrambe vere

③ $\Rightarrow$ implicazione

$A \Rightarrow B$ (A implica B)

$= \neg A \vee B$

Si legge: A vera : IPOTESI
$A \Rightarrow B$ vera
Allora B è vera : TESI

DIMOSTRAZIONI

① DIMOSTRAZIONE DIRETTA

PROPOSIZIONE : $A \Rightarrow B$

Dimostrazione diretta: possiamo usare delle proposizioni intermedie;

la linea della dimostrazione sarà del tipo

$A \Rightarrow B_1 \quad , \quad B_1 \Rightarrow B_2 \quad \dots$

$B_{n-1} \Rightarrow B_n \quad , \quad B_n \Rightarrow B$

② DIMOSTRAZIONE PER CONTRAPPOSIZIONE

Prop. $A \Rightarrow B$

Invece dimostro: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Per verificare che se $\neg B \Rightarrow \neg A$ è vera, allora anche $A \Rightarrow B$ è vera, scrivere le tabelline di verità.

Esempio: $A = n^2$ è pari $(n \in \mathbb{N})$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$B = n$ è pari

Vogliamo dimostrare $A \Rightarrow B$

Dimostro che $\neg B \Rightarrow \neg A$

$\neg B = n$ è dispari

$n = 2k+1 \quad , \quad k \in \mathbb{N}$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{=h} + 1$

$= 2h + 1$

cioè n^2 è un numero dispari $= \neg A$

③ DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO:

Sia P una proposizione, ad esempio

$P = (A \Rightarrow B)$ e supp. che sia falsa. Trovo una contraddizione all'interno della teoria.

Esempio: $R = \sqrt{2}$ è IRRAZIONALE

cioè $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Vedere il Corso di Analisi 1.

SIMBOLI :

$\Leftrightarrow$ equivalenza logica

$A \Leftrightarrow B$ (A vera se e solo se (sse) B vera)

$(A \Rightarrow B \ \wedge \ B \Rightarrow A)$

$\exists$ esiste ; $\exists!$ esiste ed è unico

$\forall$ per ogni

Regole di negazione

$\neg(\forall x, A(x)) = (\exists x, \neg A(x))$

$\neg(\exists x, B(x)) = (\forall x, \neg B(x))$

Notazioni: $\in$ APPARTIENE

$x \in X \quad , \quad X \ni x$ (X contiene x come elemento)

$\subseteq \qquad A \subseteq B$ inclusione

$\subsetneq$ opp. $\subset$ inclusione stretta : $A \subsetneq B$

$=$ $\qquad A \neq B$

E insieme, $\mathcal{P}(E)$ INSIEME DELLE PARTI DI E

= insieme di tutti i sottoinsiemi di E

$\mathcal{P}(E) \ni \emptyset \quad , \quad \mathcal{P}(E) \ni E$

$\cup$ unione

$\cap$ intersezione

$E \subseteq X \ : \ E^c$ = SOTTOINSIEME COMPLEMENTARE

$\emptyset$ insieme vuoto

E, F insiemi: $E \times F$ prodotto cartesiano

$E \times F = \{(e, f) : e \in E, f \in F\}$