Lezione 28 settembre 2023

giovedì 28 settembre 2023 11:24

PRELIMINARI DI ALGEBRA

Def.: PRODOTTO CARTESIANO di 2 insiemi:

A, B insiemi

tali che

$$A \times B \boxed{:=} \underbrace{\{ (a,b) \boxed{|} a \in A, b \in B \}}$$

per definizione è uguale a

cioè è l'insieme delle COPPIE ORDINATE di elementi di A e B.

ESEMPI:

① $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$

$$A \times B = \{ (1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y) \}$$

② $$\boxed{\mathbb{R}} \times \boxed{\mathbb{R}} = \{ (r, s) \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} \}$$

numeri reali $\quad =: \mathbb{R}^2$

es: $(1,2)$; le coppie sono ordinate

$\Rightarrow$ $(1,2) \neq (2,1)$

③ $$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$= \{ (r, s, p) \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R} \}$$

④ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \}$$

n-uple ordinate di numeri reali

Un tipico esempio di sottoinsieme del prodotto cartesiano è dato dal seguente:

ESEMPIO: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione posso considerare il suo GRAFICO

$$G_f \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$G_f = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} y = f(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Def: In generale, se $f : A \to B$ funzione il GRAFICO DI f è:

$$G_f = \{(a,b) \mid b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

OPERAZIONI INTERNE in un INSIEME

Def.: Sia S insieme non vuoto: $S \neq \emptyset$

Un' OP. INT. di S è una funzione $*$:

$$* : S \times S \to S$$

scriveremo $*((s,p)) =: s * p$

Altre possibili notazioni: $+$, $\cdot$, $\times$, $\circ$, ecc.

Esempi: ① $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$+((a,b)) =: a + b$$

la somma di numeri interi come è stata definita a scuola (ovvero in Algebra 1)

② $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$\cdot((a,b)) =: a \cdot b$$

③ $S = \mathcal{F} = \{f : X \to X \mid f \text{ funzione}\}$

X = insieme fissato

Come operazione interna cons. la COMPOSIZIONE DI FUNZIONI : $\circ$

$f : X \to X$, $\quad g : X \to X$

$f \circ g : X \to X$ è la funzione tale che $\forall p \in X$

$(f \circ g)(p) := f(g(p))$

$\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$

oss.: $\mathcal{F} \neq \emptyset$ perché $id_X : X \longrightarrow X$

FUNZIONE IDENTITÀ DI X : $id_X(p) := p$

$id_X \in \mathcal{F}$

④ in particolare $\mathcal{G} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funzione} \}$

$\mathcal{G} \neq \emptyset$; $\mathcal{G} \ni id_{\mathbb{R}}$; $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}}(r) = r$

oltre alla composizione, posso definire l'operazione interna di SOMMA DI FUNZIONI

$+ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$

$+((f,g)) = f+g$ ed è la funzione

data da: $\forall p \in \mathbb{R}$, $(f+g)(p) := f(p) + g(p)$

posso considerare anche il PRODOTTO DI FUNZIONI:

$\cdot : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$

$\cdot((f,g)) = f \cdot g$ è la funzione tale che

$\forall p \in \mathbb{R}$, $(f \cdot_{\mathcal{G}} g)(p) := f(p) \cdot_{\mathbb{R}} g(p)$

GRUPPI

Def.: Cons. un insieme $G \neq \emptyset$ con $*$ operazione interna; scriveremo anche $(G, *)$ e leggeremo "G con l'operazione interna $*$".

G si dice GRUPPO se $*$ soddisfa:

(G1) $*$ è ASSOCIATIVA

$(\forall a,b,c \in G$ si ha $(a*b)*c = a*(b*c))$

G2 ∃ un elemento NEUTRO e per $*$;

cioè è tale che:

$$\forall a \in G, \text{ si ha: } a * e = e * a = a$$

oss.: Se per $*$ uso la notazione $+$, il neutro verrà chiamato anche ZERO di G, e si indicherà con 0_G

oss.: Se per $*$ uso la notazione $\cdot$, il neutro verrà chiamato anche UNO oppure UNITA' di G, e indicato 1_G

G3 $\forall a \in G$, ∃ il RECIPROCO di a, verrà indicato con a^*, ed è tale che

$$\boxed{a * a^* = a^* * a = e}$$

oss: Se $* = +$, invece di a^* scriveremo

$-a$, chiamato OPPOSTO DI a

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_G$$

oss.: Se $* = \cdot$, invece di a^* scriveremo

a^{-1}, chiameremo INVERSO di a

Def.: Se in $(G, *)$ gruppo l'operazione $*$ verifica anche COMMUTATIVITA', allora G è detto GRUPPO COMMUTATIVO o GRUPPO ABELIANO.

Esempi: $(\mathbb{Z}, +)$ gruppo abeliano

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ NON è un gruppo

(manca la (G3))

$(\mathbb{Q}, +)$ gruppo abeliano

$(\underbrace{\mathbb{Q}\setminus\{0\}}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

differenza di insiemi

$= \mathbb{Q}$ senza il numero 0

$(=: \mathbb{Q}^*)$

Esempio: $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} := \{f : X \to X \mid f \text{ biiettiva}\}$

e cons. $\circ$

$(\mathcal{B}, \circ)$ è un gruppo?

(G1) $\forall f, g, h \in \mathcal{B}$

$$(f \circ g) \circ h \overset{?}{=} f \circ (g \circ h)$$

$(f \circ g) \circ h : X \to X$, $p \in X$

$$(\underbrace{(f \circ g)}_{k} \circ h)(p) = (f \circ g)(\underbrace{h(p)}_{\in X}) = f(g(h(p)))$$

$$(k \circ h)(p) = k(h(p))$$

$$(f \circ (g \circ h))(p) = f(\underbrace{(g \circ h)(p)}_{\in X}) = f(g(h(p)))$$

$=$

$=$ $\Rightarrow$ vale (G1) associatività

(G2) Il neutro è $\mathrm{id}_X \in \mathcal{B}$

$$f \circ id_X = id_X \circ f = f$$

G3 $\forall f \in B$, $\exists f^{-1} : X \to X$ ed è la FUNZIONE INVERSA

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_X$$

OSS.: In generale B non è abeliano (ci sono esempi in cui $f \circ g \neq g \circ f$, vedere Wooclap)

PROPOSIZIONE: Sia $(G, *)$ gruppo.
Allora:

① il neutro è unico

② ogni elemento ha un unico reciproco.

Dim. ① Sia e neutro, e supp. e' un altro neutro

$\forall g \in G$: $g * e = e * g = g$

$g * e' = e' * g = g$

perché e' è un neutro

in particolare: $e * e' \overset{\downarrow}{=} e$

$e * e' = e'$

↓ perché e è un neutro

② Sia $g \in G$, e supp. che abbia 2 reciproci:
g' e g'':

$$g * g' = \boxed{g' * g = e}$$

$$\boxed{g * g''} = g'' * g = \boxed{e}$$

$$\boxed{g'} = g' * e \overset{}{=} g' * (g * g'') \overset{G1}{=} (g' * g) * g''$$

$$= e * g'' = \boxed{g''}$$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme

Def.: R è una RELAZIONE se

$$R \subseteq X \times X$$

Se $(x,y) \in R$, scriveremo xRy.

R è **REL. DI EQUIVALENZA** se verifica:

RE1 RIFLESSIVA: $\forall x \in X : (x,x) \in R$, cioè

$$xRx$$

RE2 SIMMETRICA: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, cioè

$$xRy \Rightarrow yRx$$

RE3 TRANSITIVA: $(x,y) \in R,\ (y,z) \in R$

$$\Rightarrow (x,z) \in R$$

$$xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$$

NOTAZIONE: Se R è di equivalenza, si usa spesso il simbolo $\sim$: $xRy \rightsquigarrow x\sim y$

CLASSI DI EQUIVALENZA:

Sia X insieme, $\sim$ relaz. di equiv.

per ogni $x \in X$, definiamo

$$[x] := \{ y \in X \mid x \sim y \} \subseteq X$$

CLASSE DI EQUIV. DI x

x si chiama RAPPRESENTANTE di $[x]$

Def: INSIEME QUOZIENTE:

$X/_\sim$:= insieme di tutte le classi di equivalenza

Es: $X = \mathbb{Z}$

$x \sim y \iff x-y=2k$ per opportuno $k \in \mathbb{Z}$

allora $[1] = \{$tutti i numeri dispari$\}$

$[2] = \{$tutti i numeri pari$\}$