Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

0. NOZIONI PRELIMINARI

L'obiettivo di questo capitolo è di richiamare alcune nozioni basilari e fissare alcune notazioni.

1 Insiemi

Nel seguito per **insieme** intendiamo una "collezione di elementi". Gli insiemi possono essere **finiti** oppure **infiniti**. Un insieme finito può essere specificato elencando gli elementi che gli appartengono,

$$X := \{x_1, \ldots, x_n\},$$

dove il simbolo := significa che il lato destro definisce il lato sinistro. (Analogamente il simbolo =: significa che il lato sinistro definisce quello destro.) Non si richiede che gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ siano tutti distinti. Se $x_i \neq x_j$, per ogni $i \neq j$, allora si dice che X ha **cardinalità** n.

Esistono insiemi infiniti, in tal caso la cardinalità è infinita. Un esempio è dato dall'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Un insieme può essere specificato dalle proprietà che devono soddisfare i suoi elementi, si scrive quindi

$$X := \{x : x \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \mathcal{P}\},$$

o anche

$$X := \{x \,|\, x \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \mathcal{P}\}.$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} X &:= \{n : n \quad \text{è un numero naturale maggiore di 1 e minore di 10}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 10\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} Y &:= \{n : n \quad \text{è un numero naturale pari}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in \mathbb{N}\, \text{t.c.}\, n = 2m\}, \end{aligned}$$

(“t.c.” significa “tale che”).

Notazione: se x è un elemento di X, allora scriviamo $x \in X$. In caso contrario, si scrive $x \notin X$.

L'**insieme vuoto** è quell'insieme che non contiene alcun elemento e si denota con $\emptyset$.

Un insieme Y è detto **sottoinsieme** dell'insieme X, si scrive $Y \subseteq X$, se ogni elemento di Y appartiene ad X, in simboli:

$$y \in Y \Rightarrow y \in X \,.$$

Per ogni insieme X si ha che $\emptyset \subseteq X$. Per ogni Y si ha:

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)\,.$$

Dati due insieme X_1, X_2, la loro **unione** è l'insieme

$$X_1 \cup X_2 := \{x \,:\, (x \in X_1) \vee (x \in X_2)\}\,.$$

Analogamente si definisce l'unione di n insiemi $X_1, \ldots, X_n$,

$$X_1 \cup \ldots \cup X_n := \{x \,:\, \exists\, i = 1, \ldots, n \,\text{t.c.}\, x \in X_i\}\,.$$

L'**intersezione** di $X_1, \ldots, X_n$ è l'insieme definito come segue:

$$X_1 \cap \ldots \cap X_n := \{x \,:\, x \in X_i\,,\, \forall\, i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Dato un sottoinsieme $Y \subseteq X$, il **complementare** di Y in X è l'insieme

$$X \setminus Y := \{x \in X \,:\, x \notin Y\}\,.$$

Siano dati n insiemi $X_1, \ldots, X_n$, una n-upla ordinata di elementi di $X_1, \ldots, X_n$ è l'elemento $x = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Due n-uple ordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ed $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ sono uguali, se e solo se $x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$. Il **prodotto cartesiano** di $X_1, \ldots, X_n$ si definisce come l'insieme delle n-uple ordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_i \in X_i$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, e si denota con $X_1 \times \ldots \times X_n$. Nel caso in cui $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, allora scriveremo

$$X^n \quad \text{al posto di} \quad \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n-\text{volte}}\,.$$

Ricordiamo ora il concetto di relazione di equivalenza. Una **relazione binaria** su un insieme X è un sottoinsieme $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Si dice che l'elemento $x_1 \in X$ è in relazione con $x_2 \in X$, se $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$.

Esempio 1. 1. $X = \{\text{studenti iscritti ad UniTS nell'A.A. 2016/17}\}$,

$$\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) \in X^2 \,|\, x_1 \text{ ed } x_2 \text{ sono iscritti allo stesso CdS}\}\,.$$

2. $X = \mathbb{N}$, l'insieme dei numeri naturali, $\mathcal{R} := \{(m,n) \mid m \leq n\}$.
3. $X = \{\text{vettori applicati di uno spazio affine}\}$, $\mathcal{R} = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono equipollenti}\}$.
4. X è l'insieme di tutte le persone, $\mathcal{R} \subseteq X^2$ è il sottoinsieme formato dalle coppie di persone (x_1, x_2), tali che x_1 conosce x_2.
5. Sia $X = \mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi, e sia $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definiamo $\mathcal{R}$ come l'insieme delle coppie di numeri interi $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, tali che m divide $x - y$ (o equivalentemente t.c. $x - y$ è multiplo intero di m), in simboli $m \mid x - y$.
6. X è l'insieme di tutte le persone, $\mathcal{R} \subseteq X^2$ è il sottoinsieme formato dalle coppie di persone (x_1, x_2), tali che x_1 ed x_2 hanno la stessa altezza.

Una relazione binaria $\mathcal{R} \subseteq X^2$ è detta **relazione di equivalenza**, se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- riflessiva: $\forall\, x \in X$, $(x,x) \in \mathcal{R}$, cioè ogni elemento x è in relazione con sè stesso;
- simmetrica: $\forall\, x_1, x_2 \in X$, se $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ allora $(x_2, x_1) \in \mathcal{R}$;
- transitiva: $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in X$, se $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ ed $(x_2, x_3) \in \mathcal{R}$, allora $(x_1, x_3) \in \mathcal{R}$.

In seguito si userà spesso la seguente notazione per indicare che due elementi x_1 ed x_2 sono in relazione di equivalenza (cioè $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$): $x_1 \sim x_2$, o anche $x_1 \equiv x_2$.

Esempio 2. 1. Le relazioni binarie 1. (supponendo che non ci si possa iscrivere a più di un CdS), 3., 5. e 6. in Esempi 1 sono esempi di relazioni di equivalenza, 2. e 4. non lo sono (perché?).
2. $\mathcal{R} = X^2$ è un esempio (banale) di relazione di equivalenza sull'insieme X, in questo caso ogni coppia di elementi è in relazione.
3. $\mathcal{R} = \{(x,x) \mid x \in X\}$ è una relazione di equivalenza, in questo caso ogni $x \in X$ è in relazione solo con sè stesso.

Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme non vuoto X, che denoteremo con $\sim$. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è una **classe di equivalenza** relativamente ad $\mathcal{R}$, se valgono le seguenti proprietà:

- $C \neq \emptyset$;
- $x, y \in C \Rightarrow x \sim y$;
- per ogni $x \in C$, $y \in X$, se $x \sim y$ allora $y \in C$.

Proposizione 1. *Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme non vuoto X. Allora ogni elemento $x \in X$ appartiene ad una ed una sola classe di equivalenza. In particolare, date due classi di equivalenza C, C', si ha che $C = C'$, oppure $C \cap C' = \emptyset$.*

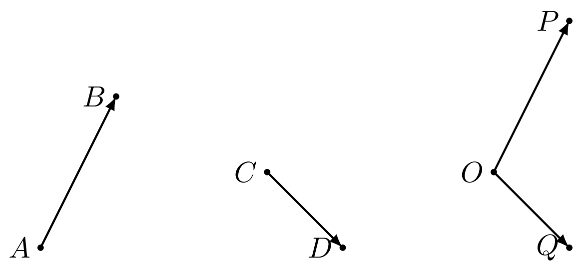
Dim. Sia $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$, l'insieme di tutti gli elementi di X equivalenti ad x. Osserviamo che $[x]$ è una classe di equivalenza in X e che $x \in [x]$.

Siano ora C e C' due classi di equivalenza in X che contengono entrambe x, $x \in C \cap C'$. Vogliamo provare che $C = C'$. Sia $y \in C$, allora $y \sim x$, ma siccome $x \in C'$, per la terza proprietà che definisce una classe di equivalenza, segue che $y \in C'$. Quindi si ha che $C \subseteq C'$. In maniera analoga si dimostra che $C' \subseteq C$, quindi $C = C'$. $\square$

Dalla precedente proposizione segue che una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in X definisce una partizione di X in classi di equivalenza. Per ogni $x \in X$, la classe di x si denota con $[x]$. Per ogni classe di equivalenza $C \subseteq X$ e per ogni $x \in C$, si ha che $[x] = C$, in tal caso l'elemento x viene detto **rappresentante** di C.

L'**insieme quoziente** di X per la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ è l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza relative a $\mathcal{R}$, esso si denota $X/\mathcal{R}$, oppure $X/\sim$, se $\mathcal{R}$ viene denotata con $\sim$.

Esempio 3. 1. Consideriamo la relazione di equivalenza dell'Esempio 1.3., cioè la relazione tale per cui due vettori applicati sono equivalenti se e solo se sono equipollenti (cioè se hanno stessa direzione, intensità e verso). Fissato un punto O dello spazio affine che stiamo considerando (retta, piano o spazio), per ogni classe di equipollenza v, esiste un unico vettore $\overrightarrow{OP}$ applicato in O che è un rappresentante di v.



Nella figura di cui sopra, vediamo che il vettore $\overrightarrow{AB}$ è equipollente ad $\overrightarrow{OP}$, mentre $\overrightarrow{CD}$ è equipollente ad $\overrightarrow{OQ}$, e non ci sono altri vettori applicati in O equipollenti ad $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{CD}$.

2. Consideriamo ora l'Esempio 1.5.. Per ogni numero intero $n \in \mathbb{Z}$, dal teorema del quoziente e resto, si ha che esistono e sono unici due numeri interi q ed r (il quoziente ed il resto rispettivamente della divisione di n per m), tali che:

- $n = mq + r$;
- $0 \leq r < m$.

Osserviamo che $n \sim r$ e che r è l'unico numero intero compreso tra 0 e $m - 1$ equivalente ad n. Quindi ogni classe di equivalenza è rappresentata da un'unico numero intero $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Di conseguenza l'insieme quoziente è formato da m elementi:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}.$$

2 Funzioni

Siano X ed Y due insiemi, una **funzione** da X ad Y è una corrispondenza che permette di associare ad ogni elemento $x \in X$ un (ed un solo) elemento $y \in Y$, in simboli si scrive $y = f(x)$, o anche $x \mapsto y = f(x)$. In tal caso X è il **dominio** di f, Y il **codominio** di f. Una funzione è specificata dal suo dominio X, il codominio Y e dalla corrispondenza f, in simboli si scrive $f\colon X \to Y$. Due funzioni $f, g\colon X \to Y$ sono uguali, se $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in X$.

Esempio 4. 1) (**Funzione identità**.)Per ogni insieme X, è definita la funzione identità $\mathrm{Id_X}\colon X \to X$ come segue: $\mathrm{Id_X}(x) = x$, per ogni $x \in X$.
2) (**Funzione costante**.) Siano X ed Y due insiemi con $Y \neq \emptyset$, sia $y \in Y$ un elemento fissato. La funzione costante $c_y\colon X \to Y$ associa ad ogni $x \in X$ l'elemento y, $c_y(x) = y$, $\forall x \in X$.
3) $X = Y = \mathbb{R}$ (l'insieme dei numeri reali), allora possiamo considerare le funzioni $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $g(x) = x^2$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un numero reale fissato.
4) Sia $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$, la radice quadrata di $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sqrt{x}$, è l'unico numero reale $y \geq 0$, tale che $y^2 = x$. Resta così definita una funzione $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Sia $f\colon X \to Y$ una funzione, e sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme di X. La **restrizione** di $f\colon X \to Y$ a Z è quella funzione che ha come dominio Z, codominio Y ed associa ad ogni $z \in Z$ l'elemento $f(z)$. La restrizione di f a Z si denota con $f_{|Z}\colon Z \to Y$.

Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice **iniettiva**, se fa corrispondere elementi distinti ad elementi distinti. In altre parole, $f\colon X \to Y$ è iniettiva, se: per ogni $x, y \in X$, con $x \neq y$, segue che $f(x) \neq f(y)$.

Una funzione $f\colon X \to Y$ è **suriettiva**, se: per ogni $y \in Y$, esiste $x \in X$, tale che $y = f(x)$.

Una funzione $f\colon X \to Y$ è **biettiva**, se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempio 5. 1. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, è iniettiva ma non suriettiva. Se invece definiamo $Y := \{m \in \mathbb{N} \,|\, m > 0\}$ e consideriamo la funzione $g\colon \mathbb{N} \to Y$, $g(n) = n + 1$, allora g è biettiva.
2. La funzione $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = n + 1$, è biettiva.
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, non è né iniettiva né suriettiva. Per la suriettività si osservi che, se $y < 0$, non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$, tale che $f(x) = y$. Per l'iniettività basta osservare che $f(x) = f(-x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
4. Sia $a \in \mathbb{R}$, e si consideri la funzione $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax$. Allora $f_0 = c_0$, la funzione costante 0; $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$; f_a è biettiva, se e solo se $a \neq 0$.

Sia $f\colon X \to Y$ una funzione, sia $M \subseteq X$ un sottoinsieme. L'**immagine** di M secondo f è il sottoinsieme di Y

$$f(M) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in M\,,\ \text{t.c.}\ f(x) = y\}\,.$$

Se $N \subseteq Y$, la **pre-immagine** di N secondo f è il sottoinsieme di X

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}\,.$$

Quando $N = \{y\}$ è costituito da un solo elemento, $f^{-1}(\{y\})$ si scrive anche $f^{-1}(y)$, anche se in generale f^{-1} non è una funzione. Ad esempio, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, allora $f^{-1}(y) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$, se $y \geq 0$, altrimenti $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Proposizione 2. *Sia $f\colon X \to Y$ una funzione biettiva. Allora per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è costituito da un solo elemento x. La funzione con dominio Y e codominio X, che associa ad ogni $y \in Y$ l'elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$, si chiama* **(funzione) inversa** *di f e si denota con $f^{-1}\colon Y \to X$.*

Esercizio 1. Sia X un insieme finito. Sia $f\colon X \to X$ una funzione. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

i) f è iniettiva.

ii) f è suriettiva.

iii) f è biettiva.

Siano dati tre insiemi X, Y e Z. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$. La **composizione** di f e g è la funzione $g \circ f\colon X \to Z$ che associa ad ogni $x \in X$ l'elemento $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Si osservi che, in generale, $f \circ g$ non è definita, se il codominio di g non coincide col dominio di f.

Si osservi che la composizione di funzioni è una operazione associativa: se $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, ed $h\colon Z \to W$, allora

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\,.$$

Tuttavia la composizione non è commutativa, in generale. Si consideri ad esempio $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come segue: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$; allora $f \circ g \neq g \circ f$.