

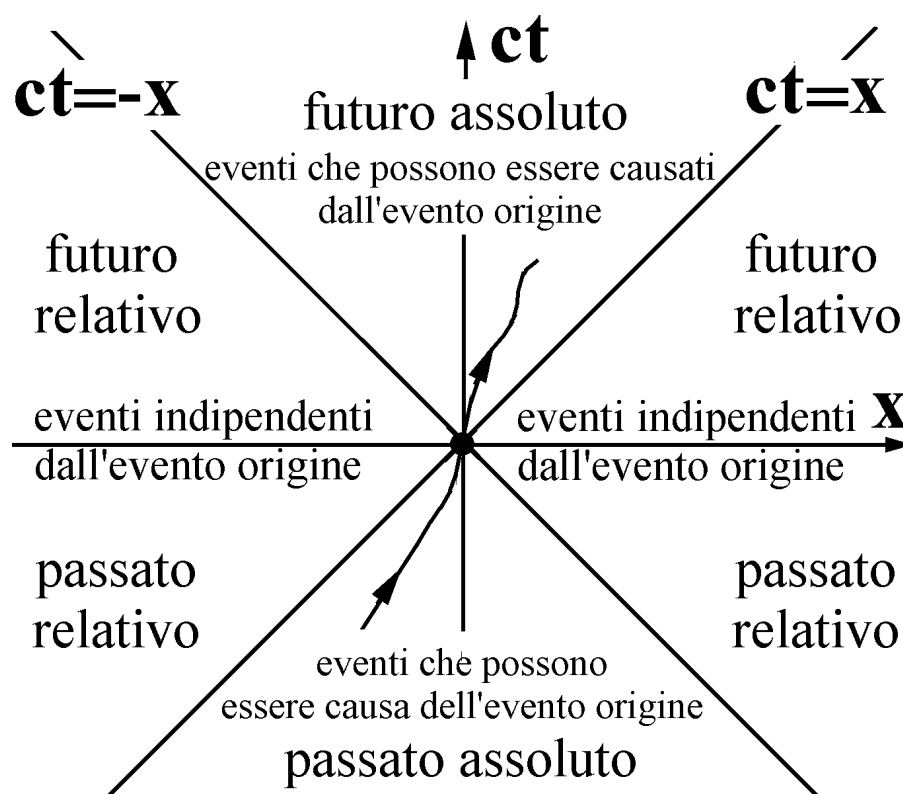
# Università degli Studi di Trieste

## Corso di Laurea in Fisica

Fernando Tommasini e Alberto Morgante

### Correnti, Radiazione e Quanti

Introduzione all'Elettromagnetismo,  
alla Relatività Ristretta  
e all'Ottica moderna



Terza edizione

Trieste, marzo 2007

## RELAZIONI MATEMATICHE

$$\nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{dV} \oint_{\delta S} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.1)$$

$$\oint_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.2)$$

$$\nabla f(t, \mathbf{r}) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x} f(t, \mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial y} f(t, \mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial z} f(t, \mathbf{r}) \right) \quad (M.3)$$

$$f(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - f(t, \mathbf{r}) = d\mathbf{s} \cdot \nabla f(t, \mathbf{r}) \quad (M.4)$$

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.5)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{2} \right) = \mathbf{a} \quad (M.6)$$

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (M.7)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{a}}{r} \right) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (M.8)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] = \frac{1}{dS} \oint_{\delta \gamma} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (M.9)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S dS \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] \quad (M.10)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] \quad (M.11)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] \quad (M.12)$$

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] = -\nabla^2 \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] \quad (M.13)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{G}(t, \mathbf{r})] = -\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.14)$$

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad , \quad \int_0^\infty \mathcal{L}(\omega) d\omega = 1 \quad (M.15)$$

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>VII</b>
<b>1 Cariche e correnti</b>	<b>1</b>
1.1 Legge di conservazione della carica elettrica . . . . .	1
1.2 Flusso e divergenza . . . . .	4
1.3 Operatore nabla, divergenza e gradiente . . . . .	6
1.4 Legge di conservazione locale della carica . . . . .	8
1.5 Densità di carica built-in . . . . .	10
1.6 Correnti “magnetiche” ed elettriche . . . . .	14
1.7 Correnti di conduzione e di polarizzazione, campo di polarizzazione $\mathbf{P}$ . . . . .	15
1.8 Densità di carica superficiale . . . . .	19
1.9 Circolazione e rotore, teorema del rotore . . . . .	21
1.10 Campo di magnetizzazione, correnti di mantello . . . . .	24
1.11 Riepilogo e commenti . . . . .	25
<b>2 Campo elettrostatico</b>	<b>27</b>
2.1 Campi elettrici di stimolo e di risposta, campo ELETTRICO . . . . .	27
2.2 Equazioni differenziali dell’elettrostatica . . . . .	30
2.3 Campi elettrostatici a simmetria sferica . . . . .	33
2.4 Campi elettrostatici a simmetria planare . . . . .	35
2.5 Campi elettrostatici a simmetria cilindrica . . . . .	39
2.6 Equazione di Poisson . . . . .	40
2.7 Campi elettrici di dipolo ideale e reale . . . . .	42
2.8 Molecole polari . . . . .	45
2.9 Energia potenziale carica-dipolo e dipolo-dipolo . . . . .	46
<b>3 Elettrostatica</b>	<b>49</b>
3.1 Pila di Volta, batterie, forza elettromotrice . . . . .	49
3.2 Tensione, potenza elettrica . . . . .	51
3.3 Legge di Gauss, legge di Ohm locale . . . . .	53
3.4 Gabbia di Faraday, massa . . . . .	56
3.5 Capacità di un conduttore, condensatori . . . . .	58

3.6	Campo di spostamento elettrico $\mathbf{D}$	61
3.7	Condensatori con dielettrici reali	65
3.8	Problema di Dirichlet	67
3.9	Interazione carica-carica indotta	69
3.10	Interazione dipolo-dipolo indotto	73
3.11	Interazione carica-dipolo indotto	75
3.12	Momento di dipolo indotto negli atomi	79
3.13	Forze di van der Waals	80
3.14	Polarizzazione di una sfera dielettrica	82
3.15	Campo elettrico di stimolo locale	84
3.16	Modello di Clausius-Mossotti	84
<b>4</b>	<b>Magnetostatica</b>	<b>87</b>
4.1	Magnetismo preamperiano, campo magnetico $\mathbf{B}$	87
4.2	Unificazione elettro-magnetica	89
4.3	Legge di Ampère-Maxwell, campo magnetico $\mathbf{H}$	92
4.4	Teorema di equivalenza di Ampère, sfera magnetizzata e solenoide sferico	93
4.5	Barre magnetizzate e solenoidi lineari	96
4.6	Dischi magnetizzati e spire circolari	99
4.7	Toroide magnetizzato e solenoide toroidale	100
4.8	Potenziale vettore di Ampère	101
4.9	Potenziale vettore di dipolo magnetico	102
4.10	Correnti con simmetria cilindrica e planare	104
4.11	Interazioni magnetiche	107
4.12	Misure di suscettività magnetica	110
<b>5</b>	<b>Energia elettrica</b>	<b>115</b>
5.1	Amperometri e voltmetri	115
5.2	Misure stazionarie di conducibilità	116
5.3	Modello a tempo di rilassamento	117
5.4	Misure Hall di densità, segno e mobilità dei portatori, misure di $\mathbf{B}$ con sonda Hall	119
5.5	Effetto Joule; regole di Kirchhof	121
5.6	Misure statiche della costante dielettrica	124
5.7	Densità di energia elettrica	125
5.8	Processi di succhiamento del dielettrico	128
<b>6</b>	<b>Introduzione all'elettrodinamica</b>	<b>133</b>
6.1	Forza di Lorentz	133
6.2	Relatività di campo elettrico e densità di carica	134
6.3	Legge di induzione	138
6.4	Ruoli delle leggi di forza e di induzione	140

6.5	Forze magnetodinamiche . . . . .	143
6.6	Alternatore monofase . . . . .	146
6.7	Approcci macroscopico e microscopico . . . . .	149
<b>7</b>	<b>Energia elettromagnetica</b>	<b>151</b>
7.1	Oscillografo . . . . .	151
7.2	Densità di energia magnetica . . . . .	153
7.3	Equazione di Poynting . . . . .	156
7.4	Energia di sistemi lineari stazionari . . . . .	158
7.5	Circuito RCL in serie in regime transitorio . . . . .	159
7.6	Trasferimenti di energia nel circuito RCL . . . . .	162
7.7	Circuito RCL in serie in regime armonico . . . . .	164
7.8	Curva di risonanza del circuito RCL . . . . .	166
<b>8</b>	<b>Circuiti magnetici</b>	<b>169</b>
8.1	Misure dei cicli di isteresi dei ferromagneti . . . . .	169
8.2	Magneti permanenti . . . . .	171
8.3	Campi MAGNETICI nei materiali lineari . . . . .	173
8.4	“Legge” di Hopkinson, circuiti magnetici . . . . .	175
8.5	Schermaggio magnetico . . . . .	180
8.6	Dissipazione nel ciclo di isteresi . . . . .	182
8.7	Trasformatore di tensione . . . . .	184
<b>9</b>	<b>Emissione di radiazione elettromagnetica</b>	<b>187</b>
9.1	Equazione di d’Alembert . . . . .	188
9.2	Potenziali vettore e scalare di Lorentz . . . . .	189
9.3	Campo magnetico di dipolo oscillante . . . . .	191
9.4	Campi di dipolo armonico nella regione vicina . . . . .	192
9.5	Radiazione di dipolo armonico . . . . .	194
9.6	Flusso d’energia della radiazione dipolare . . . . .	195
9.7	Polarizzazione lineare, ellittica e circolare . . . . .	197
9.8	Fattore di diffrazione . . . . .	199
9.9	Antenna dipolare, resistenza di radiazione . . . . .	201
9.10	Radiazione da cariche in moto armonico lento. . . . .	202
9.11	Significato della corrente di spostamento . . . . .	204
<b>10</b>	<b>Interazione di OPPMPL con elettroni liberi e legati</b>	<b>205</b>
10.1	Momento delle OPPM, pressione di radiazione . . . . .	205
10.2	Carica libera tenuta in moto da un’OPPMPL . . . . .	207
10.3	Forza di frenamento di Lorentz . . . . .	208
10.4	Effetto fotoelettrico, fotoni . . . . .	210
10.5	Scattering Thomson . . . . .	212
10.6	Interazione di OPPMPL con elettroni legati . . . . .	213

10.7	Sezioni d'urto di atomi rilassati . . . . .	215
10.8	Scattering Rayleigh . . . . .	218
<b>11</b>	<b>Interazione di OPPMPL con materiali LOI</b>	<b>221</b>
11.1	Funzione dielettrica . . . . .	221
11.2	Leggi cinematiche della riflessione . . . . .	224
11.3	Polarizzazione TE e TM . . . . .	227
11.4	Coefficienti di riflessione e trasmissione . . . . .	228
11.5	Rifrazione nei materiali trasparenti, onde evanescenti, riflessione totale . . . . .	231
11.6	Formule di Fresnel, angolo di Brewster . . . . .	232
11.7	Funzione dielettrica dei conduttori . . . . .	235
11.8	Interazione di radioonde e microonde con le superfici dei conduttori unipolari . . . . .	237
11.9	Modello collisionless plasma . . . . .	240
11.10	Onde stazionarie . . . . .	242
11.11	Suscettività dielettrica . . . . .	243
11.12	Velocità di fase e di gruppo . . . . .	247
<b>12</b>	<b>Principi di funzionamento di strumenti in riflessione</b>	<b>251</b>
12.1	Principio di Fermat . . . . .	251
12.2	Metodo di Huyghens-Fresnel, zone di Fresnel . . . . .	253
12.3	Lenti di Fresnel, diffrazione da palline e spigoli . . . . .	259
12.4	Diffrazione di Fraunhofer . . . . .	262
12.5	Lobo di diffrazione per un'apertura circolare . . . . .	267
12.6	Pettini di nastri riflettenti o di fenditure . . . . .	268
12.7	Specchi parabolici . . . . .	274
12.8	Specchi sferici . . . . .	276
12.9	Spettrometro Czerney-Turner . . . . .	279
12.10	Reticoli bibidimensionali . . . . .	282
<b>13</b>	<b>Elementi ottici a rifrazione, interferometri</b>	<b>283</b>
13.1	Diottro sferico . . . . .	284
13.2	Matrice ABCD e proprietà delle lenti. . . . .	288
13.3	Lamina dielettrica . . . . .	290
13.4	Strato dielettrico confinato tra dielettrici diversi . . . . .	295
13.5	Riflettività dei multistrati dielettrici . . . . .	296
13.6	Ricoprimenti antiriflesso . . . . .	297
13.7	Specchi a multistrati dielettrici . . . . .	299
13.8	Polarizzatore a multistrati dielettrici . . . . .	301
13.9	Spettrometro di Fabry-Perot . . . . .	302
13.10	Interferometro FP, filtri interferenziali . . . . .	305
13.11	Interferometri di Michelson e di Sagnac . . . . .	308

<b>14 Elettromagnetismo e spazio-tempo</b>	<b>311</b>
14.1 Il nostro ruolo di osservatori . . . . .	312
14.2 Dilatazione dei periodi e contrazione dei volumi . . . . .	315
14.3 Effetto Doppler longitudinale e trasverso . . . . .	317
14.4 Confronto tra gli effetti Doppler sonoro ed EM . . . . .	322
14.5 Leggi di trasformazione di Lorentz . . . . .	323
14.6 Cono luce dell'evento origine . . . . .	326
14.7 Quadrispostamento di due eventi . . . . .	327
14.8 Geometria pseudo-euclidea dello spazio-tempo, quadrivettori associati ad una particella . . . . .	328
14.9 Leggi di trasformazioni del fattore di dilatazione . . . . .	330
14.10 Moto con accelerazione propria costante . . . . .	331
14.11 Potenziali e campi di Liènard-Wiechert . . . . .	332
<b>15 Elementi di elettrodinamica</b>	<b>339</b>
15.1 Quadridensità di corrente e quadrinabla . . . . .	339
15.2 Scrittura invariante a vista delle leggi EM . . . . .	341
15.3 Corrente uniforme in un cavo rettilineo . . . . .	343
15.4 Trasformazioni del campo EM e delle forze . . . . .	344
15.5 Campi creati da una carica in moto uniforme . . . . .	345
15.6 Quadrivettore d'onda, aberrazione stellare, trasformazione delle intensità di OPPM . . . . .	348
15.7 Quadrimomento, massa invariante . . . . .	350
15.8 Dinamica di particelle in campi uniformi . . . . .	353
15.9 Scattering Compton . . . . .	357
<b>16 Cavità risonanti, corpo nero, coefficienti di Einstein</b>	<b>361</b>
16.1 Guide d'onda . . . . .	361
16.2 Modi di oscillazione del campo EM nelle cavità . . . . .	366
16.3 Il problema del corpo nero . . . . .	368
16.4 Livelli energetici e stati quantici . . . . .	372
16.5 Emissione spontanea e stimolata . . . . .	376
16.6 Principio del bilancio dettagliato . . . . .	378
16.7 Coefficienti $A$ e $B$ di Einstein . . . . .	380
16.8 Allargamento Doppler e collisionale . . . . .	382
16.9 Cavità ottiche, legge ABCD . . . . .	383
16.10 Principio di funzionamento di un Laser . . . . .	386

## Valori approssimati di alcune costanti generali

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$$

$$\mu_0 = 12.57 \cdot 10^{-7} H/m$$

$$c = 3 \cdot 10^8 m/s$$

$$Z_0 = c\mu_0 = 1/c\epsilon_0 = 377 \Omega$$

$$N_A = 6 \cdot 10^{23}$$

$$k_B = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23} J = 8.6 \cdot 10^{-5} eV$$

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} Js = 6.6 \cdot 10^{-16} eVs$$

## Grandezze caratteristiche dell'elettrone

$$m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$$

$$mc^2 = 511 keV$$

$$\text{Momento magnetico} = 9.28 \cdot 10^{-24} J/T$$

$$\mathcal{T} = 6.3 \cdot 10^{-24} s$$

$$\sigma_T = 6.7 \cdot 10^{-29} m^2$$

$$\Lambda_C = 2.42 \cdot 10^{-12} m$$

$$\text{Momento magnetico del neutrone} = 9.66 \cdot 10^{-27} J/T$$

$$\text{Momento magnetico del protone} = 1.41 \cdot 10^{-26} J/T$$

$$\text{Rapporto masse protone/elettrone} = 1836$$

$$\text{Rapporto masse neutrone/elettrone} = 1838$$



# Prefazione

Questo testo è calibrato per il secondo anno dei corsi di laurea scientifici e tecnologici e fornisce una prima visione dell'Elettromagnetismo, della Relatività ristretta e dell'Ottica moderna con un linguaggio relativamente semplice ed aggiornato e con un approccio un po' diverso da quello tradizionale, inteso a mettere in evidenza che le leggi dell'elettromagnetismo classico valgono indipendentemente dai dettagli microscopici e sono pienamente consistenti con la natura quantistica della materia e della radiazione, proprio come le leggi della termodinamica. La Relatività ristretta viene introdotta come naturale sviluppo dell'Elettromagnetismo e del principio di relatività di Galileo, ed i primi elementi dell'Ottica moderna vengono presentati a partire dallo studio dell'interazione di onde elettromagnetiche con cariche libere e legate.

Il testo è corredato di oltre trecento esercizi, in gran parte semplici, intesi a fornire elementi di autovalutazione dei progressi di apprendimento. Alcuni problemi più impegnativi sono accompagnati da suggerimenti che ne facilitano la soluzione.

Il carico di lavoro per l'intero corso corrisponde ad almeno 20 crediti di formazione universitaria, pari ad un terzo di anno accademico. Crediamo che tale carico sia giustificato dall'importanza dell'argomento per la formazione di scienziati e tecnologi che sappiano porsi alla guida dei processi di innovazione tecnologica.

Il lavoro di aggiornamento del testo ha tratto vantaggio dalla continua interazione con i bravissimi studenti di Fisica di Trieste, che hanno segnalato esplicitamente o implicitamente gli argomenti non sufficientemente chiari. In particolare lo studente Pierluigi Costantini ha rivisto la seconda edizione con grande disponibilità ed estrema cura.

Il collega prof. Gianrossano Giannini ha adottato il testo sin dalla prima edizione e con entusiasmo, generosità e profondità di visione ha dato contributi preziosi al miglioramento dell'esposizione.

La stesura della prima edizione è stata incoraggiata anche dal compianto prof. Paolo Poropat. Lo ricordiamo sempre con affetto e gratitudine.

Trieste 25 Agosto 2006

Fernando Tommasini e Alberto Morgante

# Bibliografia

Segnaliamo alcuni testi che abbiamo consultato frequentemente.

- 1) Feynman, Leighton e Sands, La fisica di Feynman [volume 2], Zanichelli (2001).  
(Forse è più adatto come libro di lettura che come testo didattico, ma è un capolavoro, chi non lo ha letto deve leggerlo, prima o poi).
- 2) Dobbs, E.R., Electricity and Magnetism, Student Physics Series, Routledge and Kegan Paul, (1984)
- 3) Dobbs, E.R., Electromagnetic Waves, Student Physics Series, Routledge and Kegan Paul (1985)  
(I testi di Dobbs sono concisi, ma molto stimolanti.)
- 4) Griffith, D. J., Introduction to Electrodynamics, 3rd. edition, Prentice Hall (1998).
- 5) Bekefi G, Barret A.H., Vibrazioni elettromagnetiche, onde e radiazione. Zanichelli 1981  
(Questo testo, come il precedente, concilia bene accuratezza e semplicità).
- 6) A. Akhiezer, L. Akhiezer, Electromagnetisme et ondes electromagnetique, Edition MIR (1988)
- 7) Landau e Lifšits, Teoria dei Campi, Editori Riuniti(1976)  
(Testo di livello avanzato, è un riferimento fondamentale per le teorie della Relatività ristretta e della Relatività generale.)
- 8) Landau e Lifšits, Elettrodinamica dei mezzi continui, Editori Riuniti(1986)  
(Testo estremamente accurato e molto profondo, ma di difficile lettura anche a causa delle notazioni inconsuete).
- 9) Jackson J.D., Elettrodinamica Classica- Seconda edizione italiana condotta sulla terza edizione americana- Zanichelli (2001)  
(Riferimento fondamentale di livello avanzato per l'elettromagnetismo nel vuoto, meno convincente per l'elettromagnetismo nella materia.)

# Capitolo 1

## Cariche e correnti

Le attuali conoscenze sui fenomeni elettromagnetici e sulle leggi che li governano sono frutto di ricerche condotte con metodo galileiano: misurando, avanzando ipotesi e tornando a misurare con strumenti via via più raffinati. Molte ipotesi sono cadute lungo il percorso storico, ma alcune sono risultate in pieno accordo con i fatti sperimentali e hanno acquisito il ruolo di leggi fisiche fondamentali. Tra queste, per anzianità ed importanza, spicca la legge di conservazione della carica elettrica, intuuta da Benjamin Franklin nella seconda metà del 1700. In questo capitolo la studiamo in dettaglio e la scegliamo come guida per introdurre i linguaggi matematico e fisico che useremo nel seguito del corso.

### 1.1 Legge di conservazione della carica elettrica

Ai tempi di Franklin l'elettrologia, il magnetismo e l'ottica erano campi di studio non correlati e venivano considerati elettrici solo i fenomeni provocati da strofinii. La **teoria dei due fluidi**, proposta da du Fay nel 1733, sosteneva che la materia è permeata da due fluidi elettrici continui di segno opposto ed attribuiva i fenomeni elettrici ad eccessi o difetti del fluido positivo rispetto al negativo. Con visione moderna possiamo identificare i fluidi negativo e positivo di du Fay con nuvole di elettroni e nuvole di ioni positivi, compenstrate le une nelle altre tanto intimamente da apparire quasi sempre come nuvole neutre. Franklin non nega l'esistenza dei due fluidi elettrici di segno opposto, ma concentra l'attenzione sulla loro sovrapposizione e, con la **teoria del fluido elettrico bipolare**, introduce implicitamente la **legge di conservazione locale della carica elettrica**. Prima di enunciarla con approccio moderno la presentiamo con un linguaggio non molto diverso da quello di Franklin.

- In assenza di stimoli la densità del fluido elettrico bipolare è ovunque nulla: le nuvole di carica positiva e negativa sono perfettamente sovrapposte e si compensano esattamente.
- In presenza di stimoli le nuvole di carica positiva possono spostarsi rispet-

to a quelle di carica negativa e la densità del fluido elettrico bipolare può diventare positiva in alcune regioni e negativa in altre.

- Le nuvole di carica negativa e positiva si attraggono e, cessati gli stimoli, tendono a ricongiungersi in modo da ripristinare ovunque le condizioni di neutralità del fluido elettrico bipolare.
- Correnti elettriche più o meno intense si manifestano sia durante i processi di stimolo, sia durante i processi di rilassamento del fluido elettrico bipolare.

Fig. 1.1

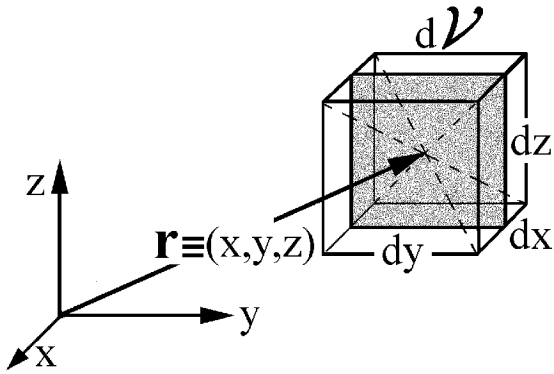
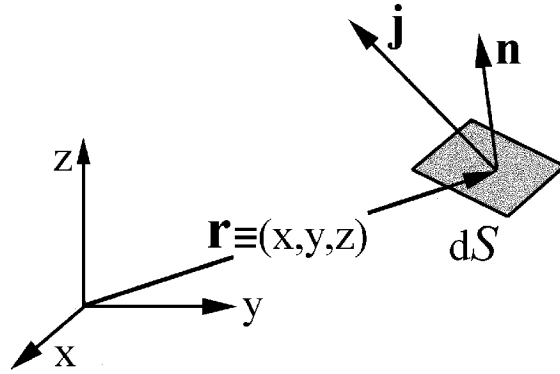


Fig. 1.2



Per tradurre le idee di Franklin in linguaggio moderno introduciamo due grandezze dipendenti dal tempo  $t$  e dalla posizione  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ : il campo scalare **densità di carica elettrica**  $\rho(t, \mathbf{r})$  ed il campo vettoriale **densità di corrente elettrica**  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ . Pensiamo di scomporre lo spazio in cubetti contigui arbitrariamente piccoli e fermi, come quello mostrato in figura 1, e senza porre condizioni sullo stato di aggregazione o sullo stato di moto della materia distribuita nello spazio, definiamo la densità di carica in modo tale che  $\rho(t, \mathbf{r})d\mathcal{V}$  sia la carica elettrica contenuta al tempo  $t$  nel cubetto di volume  $d\mathcal{V} = dx dy dz$  centrato nel punto  $\mathbf{r}$ . Poi consideriamo l'areola ombreggiata in figura 1 e definiamo la componente  $x$  della densità di corrente in modo che  $j_x(t, \mathbf{r})dydzdt$  sia la carica elettrica che attraversa l'areola nell'intervallo di tempo compreso tra  $t$  e  $t + dt$ . Si intende che danno contributi positivi a tale grandezza sia le nuvole di carica positiva che attraversano l'areola con componente della velocità  $v_x$  positiva, sia le nuvole di carica negativa che l'attraversano con  $v_x$  negativa. Analogamente definiamo le componenti  $y$  e  $z$  della densità di corrente in modo che  $j_y(t, \mathbf{r})dxdzdt$  e  $j_z(t, \mathbf{r})dxdydt$  siano le cariche elettriche che, nell'intervallo di tempo compreso tra  $t$  e  $t + dt$ , attraversano le altre due areole mediane del cubetto centrato in  $\mathbf{r}$ , orientate con normali nei versi positivi degli assi  $y$  e  $z$ . Poi, con riferimento alla figura 2, consideriamo un'areola  $d\mathcal{S}$ , centrata in  $\mathbf{r}$  ed orientata con versore normale  $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$ . Le proiezioni di tale areola sui piani ortogonali agli assi sono  $n_x d\mathcal{S}$ ,  $n_y d\mathcal{S}$  ed  $n_z d\mathcal{S}$ , quindi la carica elettrica che attraversa l'areola nel dato intervallo di tempo vale

$$j_x(t, \mathbf{r})n_x d\mathcal{S}dt + j_y(t, \mathbf{r})n_y d\mathcal{S}dt + j_z(t, \mathbf{r})n_z d\mathcal{S}dt = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r})d\mathcal{S}dt$$

Si noti che la densità di carica  $\rho$  è una densità in senso stretto, con dimensione di “carica diviso volume”, mentre la densità di corrente  $\mathbf{j}$  è una densità superficiale di flusso di carica con dimensione di “carica diviso area e tempo”.

Fig. 1.3

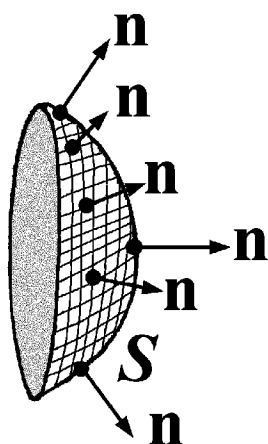
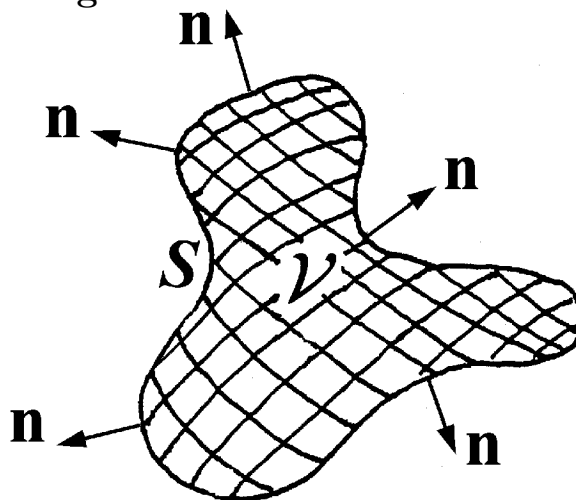


Fig. 1.4



Ammessi di conoscere  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ , possiamo calcolare il flusso di carica attraverso la superficie fissa  $S$  mostrata in figura 3 come somma dei flussi di carica attraverso tutti gli elementi  $dS$  che “mattonellano” la superficie, ovvero possiamo scrivere

$$I(t) = \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \quad (1.1)$$

dove il versore normale  $\mathbf{n}$  dipende dalla “mattonella”. Il flusso di carica  $I(t)$  prende il nome di **corrente elettrica** e gioca un ruolo importantissimo perché è una delle poche grandezze fisiche misurabili direttamente, vedremo come a partire dal capitolo 5.

Ora indichiamo con  $Q(t)$  la carica contenuta al tempo  $t$  nel volume  $\mathcal{V}$  fermo, racchiuso dalla superficie immateriale  $S$  mostrata in figura 4, e scriviamo la **legge di conservazione della carica elettrica**

$$\frac{dQ(t)}{dt} = - \oint_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \quad (1.2)$$

Il circoletto sul segno di integrale sta a ricordare che  $S$  è una superficie chiusa, il segno meno ha origine dalla convenzione che il versore  $\mathbf{n}$  sia orientato in ogni punto ad uscire dal volume, come in figura 4. L’esperienza insegna che l’equazione 2) vale anche quando il volume è sede di reazioni chimiche o nucleari tra particelle, e vale qualunque sia lo stato di moto delle particelle. Insomma: **in un qualunque volume fermo, piccolissimo o grandissimo che sia, e qualunque cosa avvenga all’interno o all’esterno, la derivata temporale della carica è uguale al flusso di carica che ENTRA nel volume attraverso la frontiera.**

Si noti che la legge di conservazione consente che in un volumetto neutro si materializzino due cariche opposte o anche una moltitudine di particelle

con carica totale nulla, però esclude che la carica totale del volumetto possa cambiare senza che entri o esca carica, ed esclude che due cariche opposte si materializzino in volumetti diversi: devono apparire sovrapposte e poi spostarsi in volumetti diversi. Analogamente due cariche opposte non possono scomparire dalla scena quando sono a distanza finita, possono scomparire solo quando si sovrappongono esattamente. Sappiamo che ciò vale almeno fino alle distanze di  $10^{-19} m$  esplorate dagli esperimenti di collisione tra particelle condotti con le attuali macchine acceleratrici.

## ESERCIZI

1) Nel Sistema Internazionale (SI) di unità di misura la carica elettrica viene misurata in coulomb ( $C$ ). Quali grandezze vengono misurate in:  $C/m^3$ ,  $C/(m^2 s)$  e  $C/s$ ?

2) Il quanto di carica vale  $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} C$ , quindi  $1 C \approx 6 \cdot 10^{18} e$ . a) Quanto vale la carica di tutti gli elettroni contenuti in una mole di molecole d'idrogeno? b) Quale carica ha una mole di ioni  $Cu^{++}$ ?

3) Il  $C/s$  è l'unità di misura SI della corrente e prende il nome di ampere ( $A$ ). a) Quale corrente corrisponde a  $10^7 e/s$ ? b) Quale carica corrisponde a  $50 Ah$  (amperora)?

4) Le norme antincendio impongono che la densità di corrente nei conduttori di rame degli impianti domestici non superi  $3 A/mm^2$ . Quanto tempo occorre per far passare  $50 Ah$  in un filo di rame di sezione  $1.5 mm^2$  rispettando le norme?

5) In un volume inizialmente neutro entrano 100 elettroni al secondo e 80 positroni al secondo, ed escono 60 elettroni al secondo e 55 positroni al secondo. Nel volume avvengono processi di annichilazione-creazione di coppie elettrone-positrone. a) Si conserva il numero di elettroni? b) Calcolare la carica presente nel volume dopo 10 secondi.

## 1.2 Flusso e divergenza

L'equazione 1) definisce la corrente elettrica  $I(t)$  come flusso del campo vettoriale  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  attraverso la superficie fissa  $S$ , senza far riferimento esplicito alla carica elettrica ed all'intervallo di tempo. In modo analogo definiamo il flusso del generico campo vettoriale  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  attraverso la superficie fissa  $S$  con l'operazione

$$\Phi(t) = \int_S d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$$

Nel caso che la superficie  $S$  sia chiusa, diciamo che  $\oint_S d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  è il flusso del campo  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  uscente al tempo  $t$  dal volume  $\mathcal{V}$  racchiuso da  $S$ .

Ora pensiamo che il volume fisso  $\mathcal{V}$  sia scomposto in volumetti infinitesimi  $d\mathcal{V}$  come mostrato in figura 5. Indichiamo con  $\delta S$  la frontiera del volumetto

$dV$  e definiamo la **divergenza** del campo vettoriale  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  con l'operazione

$$\operatorname{div} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{dV} \oint_{\delta S} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$$

Poi dimostriamo che vale il **teorema della divergenza**

$$\oint_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$$

In parole: **il flusso di un campo vettoriale uscente dalla superficie chiusa  $S$  è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso al volume  $V$  racchiuso da  $S$** . Per dimostrare che è davvero così basta iterare indefinitamente la procedura illustrata in figura 6: scomponiamo il volume  $V$  nei volumi  $V_1$  e  $V_2$ , notiamo che il flusso attraverso la parete che separa i due volumi cambia segno quando il versore normale  $\mathbf{n}$  cambia verso e concludiamo che il flusso uscente dal volume  $V$  è la somma dei flussi uscenti dai volumi  $V_1$  e  $V_2$ .

Fig. 1.5

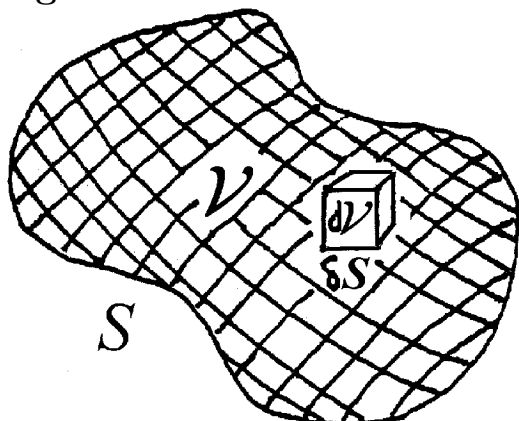
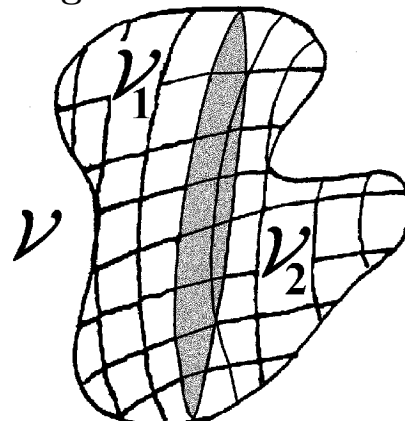


Fig. 1.6



## ESERCIZI

1) A partire dalla definizione di divergenza e scelto il volumetto  $dV$  come mostrato in figura 7, calcolare la divergenza dei seguenti campi a simmetria sferica in punti diversi dall'origine:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}/r^n$ ,  $\mathbf{r}e^{-\lambda r}$ . Poi dire quale dei campi considerati ha divergenza nulla ovunque tranne che nell'origine?

Fig. 1.7

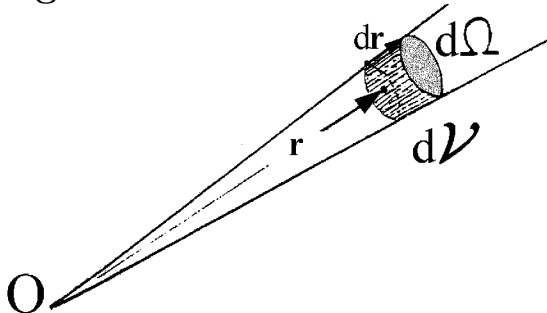
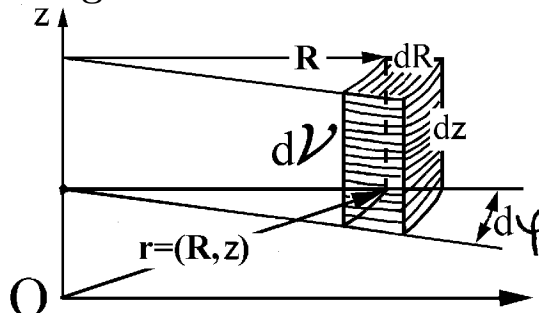


Fig. 1.8



2) Posto  $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{R}, z)$  e scelto il volumetto  $dV$  come mostrato in figura 8, calcolare la divergenza dei seguenti campi a simmetria cilindrica:  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}/R^n$ ,

$\mathbf{R}e^{-\lambda R}$ . Poi dire quale dei campi considerati ha divergenza nulla ovunque tranne che sulla retta  $\mathbf{R} = 0$ .

3) Scelto come volumetto  $d\mathcal{V}$  un cilindretto retto con asse parallelo al vettore fisso  $\mathbf{k}$ , calcolare la divergenza del campo  $(\mathbf{k}/k)e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ .

### 1.3 Operatore nabla, divergenza e gradiente

In generale possiamo calcolare la divergenza del campo vettoriale  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  procedendo come mostrato in figura 9. Nel generico punto  $\mathbf{r}$  centriamo un cubetto di volume  $d\mathcal{V} = dx dy dz$  con lati orientati come gli assi cartesiani e cominciamo a calcolare il contributo alla divergenza dovuto ai flussi attraverso le due facce perpendicolari all'asse  $y$ . Dalla figura 9 si vede che tale contributo vale

$$\frac{C_y(t, x, y + dy/2, z) dx dz - C_y(t, x, y - dy/2, z) dx dz}{dx dy dz} = \frac{\partial C_y(t, x, y, z)}{\partial y}$$

Risultati analoghi si ottengono per le altre due coppie di facce, quindi si può

Fig. 1.9

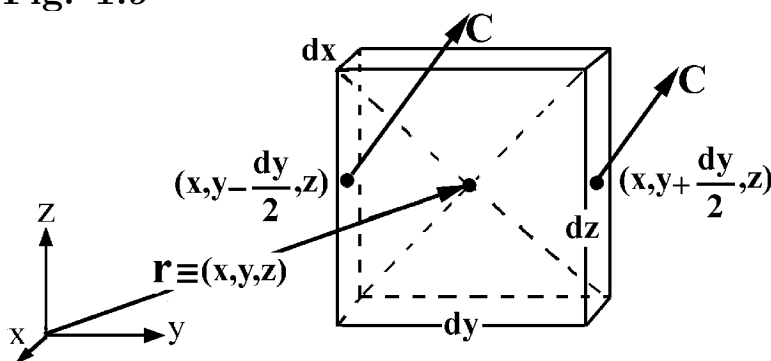
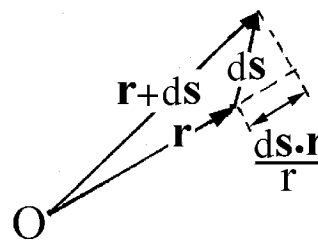


Fig. 1.10



concludere che

$$\text{div } \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial C_x(t, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial C_y(t, \mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial C_z(t, \mathbf{r})}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$$

La prima eguaglianza è una regola per calcolare la divergenza a partire dalle componenti del campo su assi cartesiani ortogonali, la seconda è una regola mnemonica: pensando che il simbolo  $\nabla$  (leggi nabla) rappresenti un “vettore” con componenti

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

la divergenza di  $\mathbf{C}$  diventa il “prodotto scalare”  $\nabla \cdot \mathbf{C}$ . Naturalmente la regola non deve essere presa alla lettera perché il prodotto scalare  $\nabla \cdot \mathbf{C}$  non è commutativo. Tuttavia la regola è tanto utile che, nella letteratura corrente, la scrittura  $\nabla \cdot \mathbf{C}$  viene usata con significato equivalente a  $\text{div } \mathbf{C}$  e si scrive

$$\nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{d\mathcal{V}} \oint_{\delta S} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.1)$$



Le equazioni che indichiamo con la lettera  $M$ , come l'equazione  $M.1$ ), sono relazioni matematiche generali e sono riassunte all'inizio ed alla fine del testo. Facendo uso della relazione  $M.1$ ), il teorema della divergenza viene scritto nella forma

$$\oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.2)$$

Ora consideriamo un generico campo scalare  $f(t, \mathbf{r})$  e definiamo il suo **gradiente** con l'equazione

$$f(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - f(t, \mathbf{r}) = d\mathbf{s} \cdot \text{grad } f(t, \mathbf{r})$$

riservandoci di verificare che  $\text{grad } f(t, \mathbf{r})$  è un campo vettoriale. Ad esempio per calcolare il gradiente della distanza dall'origine basta osservare la figura 10 e notare che  $|\mathbf{r} + d\mathbf{s}| - r = d\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/r$ , quindi  $\text{grad } r$  è il campo  $\mathbf{r}/r$ . È anche facile convincersi che  $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ , infatti

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + d\mathbf{s}|} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r + d\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/r} - \frac{1}{r} = \frac{r - d\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/r}{r^2} - \frac{1}{r} = -\frac{d\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

In generale il calcolo differenziale consente di scrivere

$$f(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - f(t, \mathbf{r}) = ds_x \frac{\partial f(t, \mathbf{r})}{\partial x} + ds_y \frac{\partial f(t, \mathbf{r})}{\partial y} + ds_z \frac{\partial f(t, \mathbf{r})}{\partial z}$$

quindi le componenti del gradiente su assi cartesiani ortogonali sono

$$\text{grad } f(t, \mathbf{r}) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x} f(t, \mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial y} f(t, \mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial z} f(t, \mathbf{r}) \right) \equiv \nabla f(t, \mathbf{r}) \quad (M.3)$$

e la definizione di gradiente può essere scritta nella forma

$$f(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - f(t, \mathbf{r}) = d\mathbf{s} \cdot \nabla f(t, \mathbf{r}) \quad (M.4)$$

**Insomma: il gradiente di un campo scalare è il campo vettoriale che, moltiplicato scalarmente per  $ds$ , fornisce la variazione del campo scalare nel passare dal punto  $\mathbf{r}$  al punto  $\mathbf{r} + d\mathbf{s}$ .**

Infine consideriamo la variazione del campo vettoriale  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  nel passare dal punto  $\mathbf{r}$  al punto  $\mathbf{r} + d\mathbf{s}$ . Per la componente  $C_x$  il calcolo differenziale consente di scrivere

$$C_x(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - C_x(t, \mathbf{r}) = ds_x \frac{\partial C_x}{\partial x} + ds_y \frac{\partial C_x}{\partial y} + ds_z \frac{\partial C_x}{\partial z} = d\mathbf{s} \cdot \nabla C_x(t, \mathbf{r})$$

Ma in questo caso dobbiamo leggere “nabla di  $C_x$ ” non gradiente di  $C_x$ : la dizione “gradiente” è appropriata solo nel caso che il nabla sia applicato ad un campo scalare. Comunque possiamo scrivere

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.5)$$

intendendo che questa equazione riassume tre equazioni, una per ciascuna delle componenti di  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$ .

Nel paragrafo 9 vedremo il significato fisico dell'operatore  $\nabla \times$ , qui ci limitiamo a proporre esercizi di calcolo intesi a prendere confidenza con le notazioni ed a stabilire alcune relazioni che saranno utili più avanti.

## ESERCIZI

1) Partendo dalla definizione  $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ , e per analogia con le regole del calcolo vettoriale ordinario, verificare che:

$$\text{a) } \nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^4}\right) = -\frac{1}{r^4}$$

$$\text{b) } \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla r^n = n\mathbf{r}r^{n-2}, \quad \nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla \left(\frac{1}{r^n}\right) = -\frac{n\mathbf{r}}{r^{n+2}}$$

$$\text{c) } \nabla \times \mathbf{r} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^n}\right) = 0, \quad \nabla \times (\mathbf{r}f(r)) = 0 \quad \text{qualunque sia } f(r)$$

2) Verificare che, qualunque sia il vettore fisso  $\mathbf{a}$ , valgono le relazioni

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n}\right) = \frac{\mathbf{a}}{r^n} - n\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^{n+2}}\mathbf{r}, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^n}\right) = (2-n)\frac{\mathbf{a}}{r^n} + n\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^{n+2}}\mathbf{r}$$

3) In particolare, verificare che

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{2}\right) = \mathbf{a} \tag{M.6}$$

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3}\right) \tag{M.7}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{a}}{r}\right) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{M.8}$$

## 1.4 Legge di conservazione locale della carica

Armati della definizione di divergenza (M.1) e del teorema della divergenza (M.2), possiamo riscrivere la legge di conservazione della carica come relazione locale tra i campi  $\rho$  e  $\mathbf{j}$ . Allo scopo, notiamo che il primo membro dell'equazione 2) può essere scritto come

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{r}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} d\mathcal{V}$$

Infatti possiamo scambiare l'ordine delle operazioni di derivazione rispetto al tempo e di integrazione sul volume pur di ricordare che la derivata temporale di  $\rho$  deve essere presa ad  $\mathbf{r}$  fisso, come indicato dal simbolo di derivata parziale. Poi notiamo che il secondo membro dell'equazione 2) è uguale all'integrale esteso a  $\mathcal{V}$  della divergenza di  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  cambiata di segno, quindi

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) d\mathcal{V}$$

Poichè questa relazione deve valere anche quando il volume  $\mathcal{V}$  tende a zero,  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  devono essere legate dalla relazione

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \quad (1.3)$$

Questa equazione è la **legge di conservazione locale** della carica elettrica. In parole dice che, **in qualunque punto ed a qualunque istante, la derivata temporale della densità di carica è uguale alla divergenza della densità di corrente cambiata di segno.**

Nei prossimi paragrafi vedremo che la visione di Franklin non è completa perché non considera le distribuzioni di carica built-in (costruite-dentro) e le correnti elettriche responsabili del magnetismo spontaneo. Tuttavia **l'idea che  $\rho$ ,  $j_x$ ,  $j_y$  e  $j_z$  siano descritte da funzioni continue legate dalla legge di conservazione locale della carica rimane valida in ogni situazione esplorata sino ad oggi ed è alla base della fisica moderna.** Ciò non proibisce di pensare a distribuzioni di carica puntuali, lineari o superficiali: lo faremo spesso per dichiarare la nostra ignoranza dei dettagli oppure per semplificare i calcoli.

## ESERCIZI

- 1) Quale proprietà ha  $\rho(t, \mathbf{r})$  quando  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  ha divergenza nulla?
- 2) Ad un certo istante la densità di corrente in una regione intorno all'origine ha componenti  $j_x = ax + bz^2$ ,  $j_y = ax + az$ ,  $j_z = cz$ , dove  $a = 10 \text{ A/m}^3$ ,  $b = 5 \text{ A/m}^4$ ,  $c = -12 \text{ A/m}^3$ . A tale istante calcolare: a) la derivata temporale della densità di carica, b) la corrente attraverso un quadrato centrato nell'origine, con lati di lunghezza  $10 \text{ cm}$  paralleli agli assi  $x$  ed  $y$ , c) come b) ma per un quadrato centrato nel punto  $(0, 0, 10 \text{ cm})$ , d) la derivata temporale della carica contenuta in un cubo di  $1 \text{ dm}^3$  centrato nell'origine e con spigoli paralleli agli assi.

Fig. 1.11

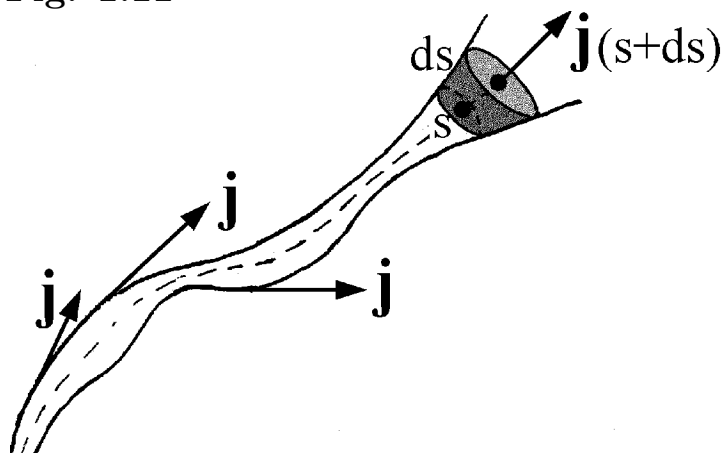
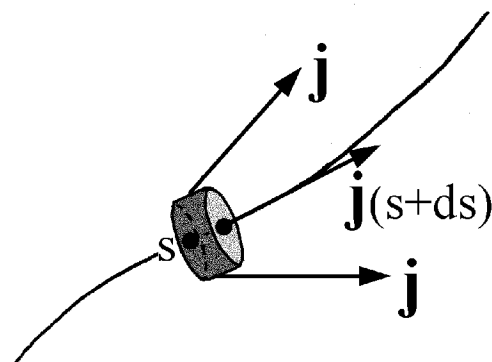


Fig. 1.12



- 3) Il sottilissimo tubo di flusso mostrato in figura 11 ha densità di corrente  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  che tende ad essere tangente alle parete quando  $\mathbf{r}$  tende ad un punto della parete. Indicare con  $s$  la coordinata curvilinea misurata sull'asse del

tubo e considerare le seguenti grandezze: corrente  $I(t, s)$  attraverso sezioni del tubo normali all'asse, densità lineare di carica  $\lambda(t, s)$ , tale che  $\lambda(t, s)ds$  sia la carica contenuta al tempo  $t$  tra le sezioni in  $s$  ed  $s + ds$  del tubo di flusso. a) Scrivere una relazione tra  $I(t, s)$  e  $\lambda(t, s)$ . b) Dire quale proprietà ha  $I(t, s)$  quando  $\lambda(s)$  non dipende dal tempo.

4) Entro un certo materiale neutro considerare una linea di flusso di  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , individuare i suoi punti mediante la coordinata curvilinea  $s$  ed indicare con  $j(s)$  la densità di corrente sulla linea di flusso. Poi considerare un cilindretto di volume  $\mathcal{V}$  con asse sulla linea di flusso, come in figura 12, e legare il flusso di  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  uscente dalla parete laterale del cilindretto alla derivata di  $j(s)$ .

5) Considerare l'energia  $U$ , definire la densità di energia  $u(t, \mathbf{r})$ , la densità di flusso di energia  $\mathbf{j}_U(t, \mathbf{r})$  e legare tali grandezze con la legge di conservazione locale dell'energia.

6) Per l'entropia  $S$ , oltre alla densità di entropia  $s(t, \mathbf{r})$  ed alla densità di flusso di entropia  $\mathbf{j}_S(t, \mathbf{r})$ , definire il **tasso di creazione di entropia**  $\Gamma_S(t, \mathbf{r})$ , tale che  $\Gamma_S(t, \mathbf{r})d\mathcal{V}dt$  sia l'entropia creata nell'intervallo di tempo compreso tra  $t$  e  $t + dt$  entro il volumetto  $d\mathcal{V}$  centrato nel punto  $\mathbf{r}$ . Poi: a) scrivere la legge di bilancio locale dell'entropia; b) enunciare la legge di aumento dell'entropia in forma locale.

## 1.5 Densità di carica built-in

Abbiamo detto che la visione di Franklin non è completa: Volta, per primo, ha mostrato che esistono distribuzioni di carica che rimangono non neutre localmente anche in assenza di stimoli, ed Ampère ha insegnato che, nei magneti, possono circolare correnti permanenti anche quando non interveniamo per provarle. Questi fenomeni non sono prevedibili nell'ambito della meccanica **classica**, ma sono ben descritti dalle leggi dell'elettromagnetismo **classico**, come vedremo via via. Come primo esempio consideriamo due dischi piani paralleli, uno di rame, l'altro di zinco, posti nel vuoto e collegati da un filo metallico. Volta ha osservato che la distribuzione di carica dei dischi ha le caratteristiche schematizzate in figura 13. In prossimità delle superfici affacciate sono presenti cariche di segno opposto, negative nel rame e positive nello zinco. Le regioni cariche hanno spessori  $h$  piccolissimi e hanno densità di carica  $\rho$  grandissime, ma queste grandezze sono difficilmente misurabili singolarmente. Per tale ragione conviene pensare che  $h$  sia infinitesima e  $\rho$  infinita, ma tali che il prodotto  $\rho h = \sigma$  abbia un valore finito. Precisamente, la **densità di carica superficiale**  $\sigma$  è definita in modo tale che  $\sigma d\mathcal{S}$  sia la carica distribuita in prossimità dell'elemento di superficie  $d\mathcal{S}$ . In questo modo rinunciamo a descrivere i dettagli ed introduciamo singolarità fittizie sulle due superfici affacciate.

Fig. 1.13

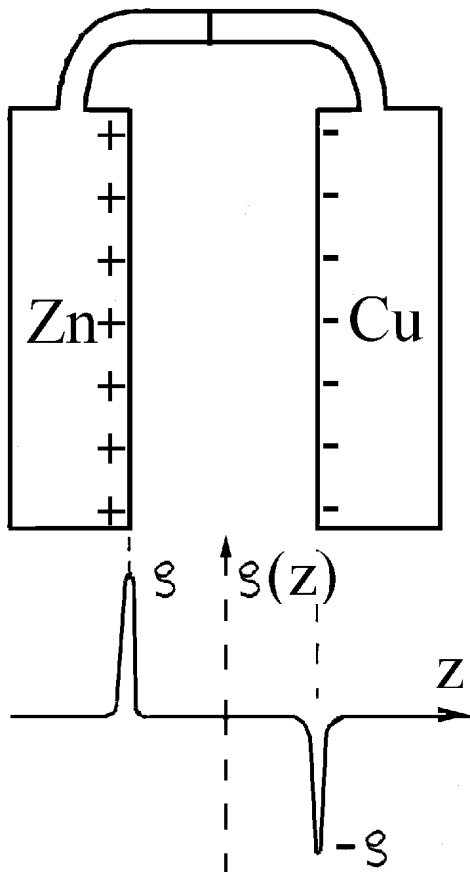
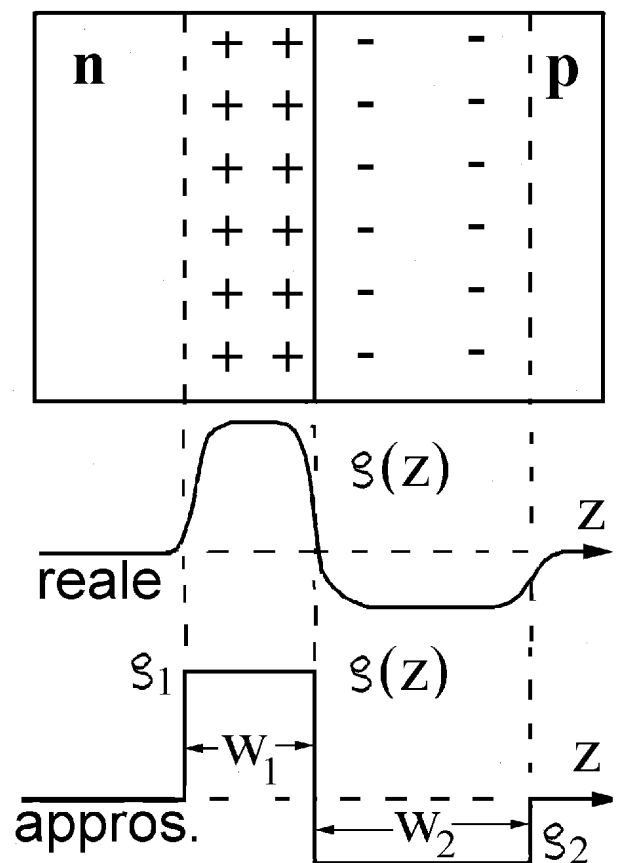


Fig. 1.14



In figura 14 descriviamo la densità di carica di una giunzione p-n, elemento base di un gran numero di dispositivi elettronici moderni. Il piano di giunzione separa due regioni con densità di carica di segno opposto. Contrariamente a quanto suggerito dalle lettere *p* ed *n*, la densità di carica è negativa nella regione *p* e positiva nella regione *n*. Complessivamente la giunzione è neutra, quindi gli spessori  $w_1$  e  $w_2$  sono legati alle densità di carica  $\rho_1$  e  $\rho_2$  dalla relazione  $w_1\rho_1 = -w_2\rho_2$ . Naturalmente il profilo di densità di carica delle giunzioni reali non varia bruscamente, ma l'approssimazione considerata in figura è un eccellente punto di partenza per lo studio dei dispositivi a semiconduttore. Le due regioni cariche hanno spessori dell'ordine di alcuni  $\mu m$  o frazioni di  $\mu m$  e densità di carica che possono superare  $\pm 1 C/cm^3$ .

Torneremo sulle densità di carica di tipo voltaico e di giunzione in più riprese, per ora diciamo che sono importanti soprattutto in prossimità delle interfacce che separano materiali diversi per composizione o per struttura. Le moderne tecniche di deposizione di strati atomici in ultra alto vuoto e di manipolazione degli atomi con microscopi a scansione consentono di produrre architetture di carica built-in adatte alle applicazioni più varie.

Passiamo a considerare le distribuzioni di carica degli atomi cominciando da quella dell'atomo di idrogeno nello stato di minima energia, mostrata in figura 15. La distribuzione di carica positiva, concentrata nell'origine, descrive il protone, la nuvola di carica negativa a simmetria sferica descrive l'elettrone. Precisamente la densità di carica dell'atomo di idrogeno nello

Fig. 1.15

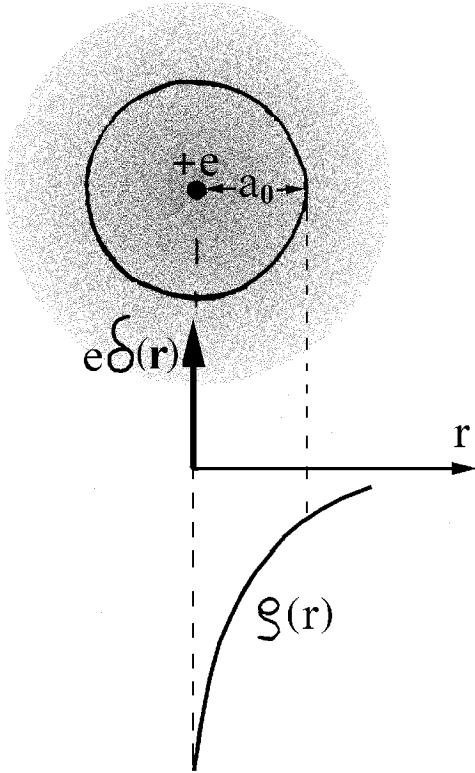
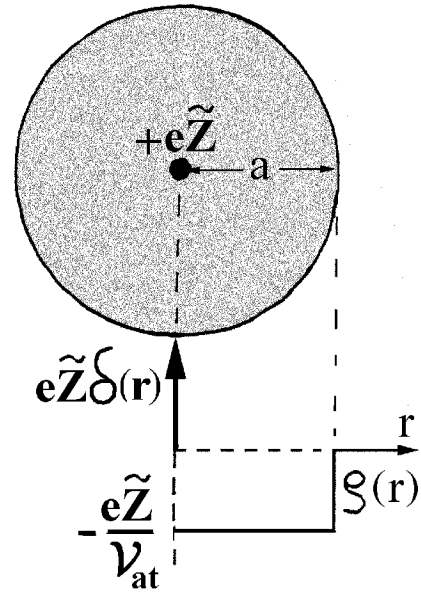


Fig. 1.16



stato di energia minima vale

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} \quad (1.4)$$

dove  $a_0 \approx 0.53 \text{ \AA}$  è una lunghezza che prende il nome di raggio di Bohr. La notazione  $e\delta(\mathbf{r})$ , introdotta da Dirac, è una stenografia per intendere che una carica di valore  $e$ , il protone nel caso presente, è contenuta in un volume infinitesimo centrato nell'origine. In sostanza scrivendo  $e\delta(\mathbf{r})$  esprimiamo la nostra ignoranza o il nostro disinteresse per i dettagli della distribuzione di carica del protone, affermiamo solo che l'integrale della densità di carica, esteso ad un qualunque volume che contenga l'origine, vale  $e$ . Integrando l'equazione 4) su tutto lo spazio si vede che la carica totale dell'atomo è nulla, ma le deviazioni dalle condizioni di neutralità del fluido elettrico sono evidenti, e non sono prevedibili a partire dalle leggi della meccanica classica!

Nel seguito descriveremo un generico atomo nello stato di minima energia con il modello rozzo, ma molto utile, mostrato in figura 16: un nocciolo puntiforme di carica  $e\tilde{Z}$  circondato da una nuvola elettronica sferica di densità uniforme contenente  $\tilde{Z}$  elettroni nel volume  $\mathcal{V}_{at}$ . Il nocciolo, detto **core atomico**, è composto dal nucleo e dagli elettroni più interni e si comporta come una carica puntiforme fino a quando non lo eccitiamo con raggi X o particelle di alta energia. Invece la nuvola elettronica esterna risponde anche a stimoli lentamente variabili o stazionari spostandosi un po' rispetto al core, come vedremo nel paragrafo 3.12. Non si confonda  $\tilde{Z}$  con il numero atomico  $Z$ : i valori tipici di  $\tilde{Z}$  sono poco diversi dall'unità anche per atomi con  $Z$

grande. Il merito del modello in figura 16 sta nel fatto che il volume  $\mathcal{V}_{at}$  può essere misurato con il metodo semplice che descriveremo nel paragrafo 3.16.

Per le molecole la situazione è più complicata perché viene a mancare la simmetria sferica, ma per molecole come  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $NO$  e  $CO$  le nuvole elettroniche avvolgono i due core e hanno forma poco diversa da quella sferica. Torneremo sull'argomento nel paragrafo 2.8, per ora sottolineiamo che **qualunque sistema fisico rilassato è caratterizzato da una densità di carica built-in.**

A questo punto è opportuno introdurre un linguaggio che useremo in tutto il corso. Diremo che **un sistema fisico è rilassato quando è in equilibrio e non è soggetto a stimoli prodotti da altri sistemi.** Altrimenti diremo che il sistema è **STIMOLATO** e distingueremo tra stimoli **STAZIONARI, TRANSITORI ed ARMONICI.** I primi non dipendono dal tempo mentre gli ultimi ne dipendono con legge di tipo  $\sin(\omega t)$ , dove  $\omega$  è la frequenza dello stimolo. Dicendo frequenza intenderemo **frequenza angolare**  $\omega$ , oppure **frequenza ciclica**  $\nu$ , affidando al simbolo ed al nome dell'unità di misura il compito di distinguere tra le due. Ad esempio diremo che la frequenza della rete elettrica è  $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$  oppure  $\nu = 50 \text{ Hz}$  (hertz). Il "sistema fisico" è ciò su cui fissiamo l'attenzione, ad esempio un atomo di argon fermo nell'origine, il gas argon contenuto in un'ampolla di vetro, una soluzione contenuta in un bicchiere, un pezzo di metallo, un magnete o qualunque altra cosa ci interessi. Quasi sempre **ammetteremo che il sistema sia rilassato nel lontano passato e penseremo che gli stimoli insorgano a partire dal tempo zero e raggiungano il regime stazionario oppure il regime armonico al termine di una fase transitoria più o meno lunga.** Con tale convenzione la densità di carica iniziale  $\rho_0(\mathbf{r})$  assume il significato di densità di carica (built-in) del sistema rilassato, mentre la differenza

$$\rho_e(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r}) - \rho_0(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

diviene la densità di carica prodotta dagli stimoli ed è univocamente determinata dalla storia della densità di corrente. Per dimostrarlo integriamo dal tempo 0 al tempo  $t$  la legge di conservazione della carica 3) e notiamo che

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) - \int_0^t dt' \nabla \cdot \mathbf{j}(t', \mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \int_0^t dt' \mathbf{j}(t', \mathbf{r})$$

L'ultimo passaggio è consentito perché l'operatore nabla e l'integrazione sul tempo agiscono rispetto a variabili diverse. Il confronto con l'equazione 5) mostra che **la densità di carica elettrica al tempo  $t$  vale**

$$\rho_e(t, \mathbf{r}) = -\nabla \cdot \int_0^t dt' \mathbf{j}(t', \mathbf{r}) \quad (1.6)$$

**ed è univocamente determinata dalla storia delle correnti che hanno agito a partire dall'istante di accensione degli stimoli.**

Concludiamo con una breve descrizione di un esperimento inteso a stabilire un limite superiore per la carica degli atomi e delle molecole. Lasciamo uscire il gas da una comune bombola da 50 litri di argon ( $Ar$ ) o di azoto ( $N_2$ ), inizialmente piena alla pressione di 200 bar. Stiamo ben attenti ad impedire l'uscita di ioni ed elettroni e misuriamo la variazione di carica della bombola durante lo svuotamento. Con strumenti moderni riusciamo a verificare che non varia più di  $0.5 pC$ . Che cosa possiamo concludere? Che le molecole sono davvero neutre, a meno di  $10^{-20}$  parti della carica elementare. Infatti escono dalla bombola circa  $3 \cdot 10^{26}$  molecole e, complessivamente, sottraggono o cedono non più di  $3 \cdot 10^6$  cariche elettriche elementari. Inoltre, sapendo che le particelle cariche degli atomi sono elettroni e protoni con velocità ben diverse e fortemente dipendenti dal numero atomico, possiamo stabilire margini d'errore estremamente piccoli per le seguenti affermazioni.

- **La carica dell'elettrone è opposta a quella del protone.**
- **La carica delle particelle non dipende dalla velocità.**

## ESERCIZI

- 1) Valutare le densità medie di elettroni nell'acqua e nell'aria.
- 2) Quale carica avrebbe la Terra se la carica del protone fosse maggiore di quella dell'elettrone di una parte per miliardo?

## 1.6 Correnti “magnetiche” ed elettriche

Detto della densità di carica, passiamo a considerare la densità di corrente in condizioni rilassate. La indichiamo con  $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$ , con l'indice  $m$  a ricordare che, in condizioni rilassate, la densità di corrente è diversa da zero solo in materiali che presentano proprietà magnetiche particolari. L'idea che tali proprietà derivino dalla presenza di correnti elettriche risale al 1822, anno dell'unificazione elettro-magnetica. Ampère, pioniere nel sostenere l'ipotesi atomica-molecolare, propone l'idea che il comportamento dei magneti sia originato da correnti elettriche confinate entro gli atomi o le molecole dei materiali e pensa che l'ambiente atomico protegga tali correnti dagli attriti, così da renderle permanenti anche in condizioni rilassate. Nel seguito diremo **correnti “magnetiche”** per intendere **correnti elettriche amperiane**. Le virgolette sono usate a ricordare che **le correnti “magnetiche” sono tipi particolari di correnti elettriche non descrivibili con modelli microscopici classici**. Una caratteristica molto importante delle correnti “magnetiche” è che, anche quando variano nel tempo, non producono variazioni della densità di carica elettrica dei corpi. Ad esempio **i magneti non manifestano variazioni del loro stato di elettrizzazione quando vengono magnetizzati o smagnetizzati**. Questo fatto, abbinato alla legge di conservazione della carica, consente di affermare che **la densità di corrente “magnetica”  $\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r})$  ha divergenza nulla in qualunque condizione**.



A questo punto lasciamo agli esperimenti il compito di studiare il campo vettoriale  $\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r})$  e scriviamo la densità di corrente in un generico materiale come somma di due contributi,

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_e(t, \mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) \quad (1.7)$$

riservando la qualifica di elettriche per le correnti descritte da  $\mathbf{j}_e$ , correnti dovute ai moti di oscillazione e traslazione delle particelle cariche del sistema. Ad esempio, ad un certo punto del corso fisseremo l'attenzione su un atomo di argon fermo e rilassato, penseremo di illuminarlo con luce rossa e porremo la domanda: come evolvono  $\mathbf{j}_e$  e  $\rho_e$ ? Oppure considereremo una lastra di rame rilassata, penseremo di esporla all'onda elettromagnetica proveniente da una stazione televisiva e domanderemo: come evolvono  $\mathbf{j}_e$  e  $\rho_e$ ? Oppure considereremo una pallina neutra, le avvicineremo un protone e domanderemo: come evolvono  $\mathbf{j}_e$  e  $\rho_e$ ? Rispondere non sarà facilissimo, ma una cosa può essere detta subito:  $\mathbf{j}_e$  e  $\rho_e$  sono legate dalla legge di conservazione locale

$$\frac{\partial \rho_e(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e(t, \mathbf{r}) \quad (1.3')$$

Lo si vede sostituendo le equazioni 5) e 7) nell'equazione 3), infatti  $\rho_0(\mathbf{r})$  non dipende dal tempo e  $\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r})$  ha divergenza nulla.

Si noti che siamo partiti da Franklin e siamo tornati a Franklin, infatti le grandezze indicate con l'indice "e" sono proprio quelle che descrivono il suo fluido elettrico bipolare conservativo. Ma ora sappiamo che anche la densità di carica built-in e la densità di corrente "magnetica", non considerate da Franklin, giocano ruoli importanti nei fenomeni elettromagnetici. Aggiungiamo che oggi sono disponibili metodi quantistici raffinati e poderose potenze di calcolo che consentono di valutare  $\rho_0(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$  nei vari materiali rilassati con buona accuratezza. Ma sia ben chiaro: le grandezze fisiche  $\rho_0(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$  si misurano con i metodi dell'elettromagnetismo classico che vedremo via via; i calcoli quantistici sono importantissimi perché consentono di acquisire una visione microscopica e consentono di prevedere le proprietà di materiali non presenti spontaneamente in natura, ma, ancor oggi, danno risultati in buon accordo con le misure solo in casi semplici.

## 1.7 Correnti di conduzione e di polarizzazione, campo di polarizzazione P

All'alba dell'800 gli studi sulle correnti elettriche nei materiali prendono slancio, grazie all'introduzione della pila di Volta che descriveremo nel capitolo 3. Ben presto risulta evidente che le correnti elettriche in un generico materiale devono essere descritte come sovrapposizione di due tipi di correnti: correnti di conduzione e correnti di polarizzazione. Vedremo via via gli esperimenti

che hanno suggerito tale distinzione, per ora anticipiamo la differenza fondamentale: le correnti di conduzione cedono energia alla materia in modo irreversibile, diciamo che scaldano o meglio che producono entropia, le correnti di polarizzazione scambiano energia con la materia in modo reversibile. La ragione è che le correnti di polarizzazione, come le correnti “magnetiche”, sono confinate entro gli atomi o le molecole dei materiali e ciò le protegge dagli attriti. Possiamo immaginarle pensando che le nuvole elettroniche degli atomi di un materiale oscillino rispetto ai relativi core con spostamenti molto minori delle dimensioni atomiche. Ciò comporta che **le correnti di polarizzazione possono essere presenti solo quando gli stimoli dipendono dal tempo**. Invece le correnti di conduzione possono essere presenti anche in condizioni stazionarie, ad esempio sono presenti entro un filo metallico collegato ai morsetti di una batteria. Le correnti di conduzione possono essere immaginate pensando che due fluidi unipolari di **portatori di carica** di segno opposto siano in moto l’un dentro l’altro all’interno del materiale e pensando che una qualche fonte di energia fornisca la potenza che viene dissipata per mantenere i due fluidi in moto relativo.

Si pensi alle analogie con un’altalena e con un carretto sollecitati da forze indipendenti dal tempo. Al termine delle fasi transitorie l’altalena ha spostamento stazionario e velocità nulla mentre il carretto (in pianura) ha velocità stazionaria. Pertanto la forza agente sul carretto fornisce potenza indefinitamente, come le forze agenti sulle cariche di conduzione, mentre la forza agente sull’altalena cessa di fornire potenza al termine della fase transitoria, come le forze agenti sulle cariche di polarizzazione. L’energia fornita al carretto viene dissipata per attrito mentre l’energia fornita all’altalena durante la fase transitoria viene immagazzinata e può essere riutilizzata.

Prima di studiare i processi di conduzione e di polarizzazione con approccio microscopico è opportuno stabilire punti fermi indipendenti dai dettagli. Cominciamo con una classificazione: **diciamo conduttore perfetto un materiale ideale privo di cariche e correnti di polarizzazione e diciamo dielettrico perfetto un materiale ideale privo di cariche e correnti di conduzione**. D’ora in avanti indichiamo le cariche di polarizzazione con indice  $b$ , per intendere che sono **legate (bound)** a cariche di segno opposto, ed indichiamo le cariche di conduzione con indice  $f$ , per intendere che sono **libere (free)** da legami con cariche di segno opposto. Per definizione il dielettrico perfetto è privo di cariche libere, quindi il fluido bipolare di cariche legate ha densità di carica e di corrente  $\rho_e(t, \mathbf{r}) = \rho_b(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{j}_e(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_b(t, \mathbf{r})$ , legate l’una all’altra dalla legge di conservazione

$$\frac{\partial \rho_b(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_b(t, \mathbf{r}) \quad (1.3'')$$

Nel caso che il dielettrico perfetto sia rilassato al tempo zero la densità di

carica iniziale  $\rho_b(0, \mathbf{r})$  è nulla e l'equazione 6) si riduce a

$$\rho_b(t, \mathbf{r}) = -\nabla \cdot \int_0^t dt' \mathbf{j}_b(t', \mathbf{r})$$

Partendo da questa equazione facciamo un passo che può sembrare tanto inutile quanto il cambiar nome ad un oggetto: introduciamo il

$$\text{campo di polarizzazione} \quad \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \int_0^t dt' \mathbf{j}_b(t', \mathbf{r}) \quad (1.8)$$

Questo campo descrive completamente lo stato di polarizzazione del materiale e riassume tutte le informazioni sul fluido bipolare di cariche legate. Infatti, partendo da  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$ , le densità di carica e di corrente di polarizzazione si calcolano immediatamente con le operazioni

$$\rho_b(t, \mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{j}_b(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (1.10)$$

Integrando l'equazione 9) su un volume che contenga il sistema, applicando il teorema della divergenza M.2) e tenendo conto che  $\mathbf{P}$  è nullo all'esterno si giunge ad una conclusione ovvia, ma importante: **la carica legata totale è nulla in qualunque situazione.**

L'equazione 10) conferma che la corrente di polarizzazione può esistere solo quando il campo  $\mathbf{P}$  dipende dal tempo; quando gli stimoli diventano stazionari anche  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  diventa stazionario e descrive gli effetti delle correnti di polarizzazione che hanno agito durante la fase transitoria, spostando le nuvole elettroniche rispetto ai core e provocando l'orientamento preferenziale di molecole come quelle dell'acqua o dell'ossido di carbonio.

Passiamo a considerare un conduttore perfetto ricordando che, per definizione, non contiene cariche legate. Sostituendo  $\rho_e(t, \mathbf{r})$  con  $\rho_f(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{j}_e(t, \mathbf{r})$  con  $\mathbf{j}_f(t, \mathbf{r})$  nell'equazione 3'), si vede che il fluido bipolare di cariche libere soddisfa la legge di conservazione

$$\frac{\partial \rho_f(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) \quad (1.3''')$$

Naturalmente il dielettrico perfetto ed il conduttore perfetto non esistono: un generico materiale deve essere descritto come miscela di un conduttore perfetto e di un dielettrico perfetto, con densità di corrente elettrica e di carica elettrica date da

$$\mathbf{j}_e(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\rho_e(t, \mathbf{r}) = \rho_f(t, \mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \quad (1.12)$$

Ciò può far sorgere il dubbio che le leggi di conservazione della carica libera e della carica legata non valgano singolarmente, ma un tale dubbio deve

essere rimosso. Infatti è vero che un elettrone legato ad un core atomico, opportunamente stimolato, può liberarsi dal legame e diventare libero entro il materiale, ma in tal caso si forma una **lacuna** d'elettrone nell'atomo di origine. Questo può prelevare un elettrone legato da un atomo vicino che, a sua volta, può prelevarne uno da un altro vicino che, a sua volta,.... Insomma, oltre all'elettrone liberato dal legame, si è liberata dal legame una lacuna. L'elettrone liberato e la lacuna peregrinano nel materiale fino a quando incontrano una carica libera di segno opposto e decidono di legarsi a questa. Si noti che la lacuna, ovvero la mancanza di un elettrone legato, si muove in verso contrario a quello degli elettroni legati che vanno a colmarla, proprio come una bolla in un liquido si sposta in verso contrario a quello del liquido che vi entra. Ad evitare malintesi sottolineiamo che **la lacuna si sposta quando viene colmata da un elettrone legato, ma scompare quando viene colmata da un elettrone libero**. Ad esempio in una giunzione p-n illuminata dalla radiazione solare l'illuminazione agisce rompendo molti legami e creando molte coppie di cariche libere elettrone-lacuna, diciamo molte coppie di **portatori di carica**. Come si comportano? La risposta è tutt'altro che semplice, per ora diciamo solo che la giunzione  $p - n$  illuminata non è un sistema rilassato: l'illuminazione costituisce uno stimolo elettromagnetico. Quando rimuoviamo lo stimolo ripristinando il buio, le coppie elettrone-lacuna che erano state create dall'illuminazione si ricombinano in tempi più o meno lunghi e la giunzione tende alla situazione rilassata.

Un'altra situazione interessante si presenta nella ionosfera terrestre. A quote dell'ordine di  $200 \text{ km}$ , dove la densità di molecole è dell'ordine di  $10^{19} \text{ m}^{-3}$ , la radiazione solare ed i raggi cosmici ionizzano alcune molecole e producono coppie di cariche libere. La densità di carica rimane quasi nulla ovunque, ma le densità di elettroni liberi e di ioni liberi raggiungono valori dell'ordine di  $10^{12} \text{ m}^{-3}$  a mezzogiorno e di  $10^{11} \text{ m}^{-3}$  a mezzanotte.

Gli esempi dati mettono in evidenza che **le cariche vengono sempre create o distrutte in coppie con carica totale nulla: la creazione di una coppia di cariche libere distrugge una coppia di cariche legate e viceversa**. Quindi il fluido bipolare di cariche legate rispetta la legge 3'' ed il fluido bipolare di cariche libere rispetta la legge 3''').

L'energia  $\mathcal{E}_g$  necessaria per formare una coppia di cariche libere elettrone-lacuna in un materiale è un importante parametro di classificazione e viene detta **energy-gap** oppure **energia di ionizzazione interna**. In qualunque materiale rilassato, una frazione dei legami, tanto più grande quanto più piccola è  $\mathcal{E}_g$ , è rotta spontaneamente a causa dell'agitazione termica, quindi qualunque materiale contiene coppie di cariche libere che lo rendono più o meno conduttore. Da questo punto di vista un conduttore perfetto corrisponde al caso  $\mathcal{E}_g = 0$  ed un dielettrico perfetto corrisponde al caso limite  $\mathcal{E}_g \rightarrow \infty$ . Insomma, in un conduttore perfetto non è necessario spendere

energia per formare coppie di cariche libere, ma è necessario spenderla per tenere in moto le cariche libere negative rispetto alle cariche libere positive. Al contrario, in un dielettrico come il diamante l'energia necessaria per formare una coppia di cariche libere è tanto grande rispetto all'energia di agitazione termica che, in condizioni normali, le cariche rimangono legate. In tal caso l'energia ceduta per polarizzare il dielettrico viene immagazzinata e può essere riutilizzata in un secondo tempo, proprio come l'energia spesa per comprimere una molla.

Infine sottolineiamo che **una carica libera non è necessariamente mobile**. Ad esempio **gli ioni di un metallo fermo sono immobili in prima approssimazione, ma sono cariche libere: sono liberi da legami con cariche di segno opposto!**

## 1.8 Densità di carica superficiale

Nel caso delle lastre di zinco e rame affacciate abbiamo approssimato la densità di carica built-in ammettendo che sia nulla ovunque tranne che ad immediato contatto delle superfici affacciate delle lastre, ed abbiamo introdotto la densità di carica superficiale  $\sigma$ . Approssimazioni di questo tipo sono quasi sempre adeguate anche per descrivere le distribuzioni di carica di conduzione e di polarizzazione. Infatti le regioni interne ai vari materiali omogenei rimangono quasi sempre neutre, ed eccessi o difetti di carica appaiono solo alle interfacce tra materiali diversi o tra domini diversi di uno stesso materiale. Pertanto le distribuzioni di carica libera e legata vengono quasi sempre descritte dalle densità superficiali  $\sigma_f(t, \mathbf{r})$  e  $\sigma_b(t, \mathbf{r})$ . Precisamente  $\sigma_f(t, \mathbf{r})d\mathcal{S}$  e  $\sigma_b(t, \mathbf{r})d\mathcal{S}$  sono le cariche di conduzione e di polarizzazione presenti al tempo  $t$  sull'areola  $d\mathcal{S}$  dell'interfaccia tra due materiali, centrata nel punto  $\mathbf{r}$ . Per il momento limitiamo l'attenzione alle interfacce vuoto-metallo e vuoto-dielettrico, cominciando dalle prime. Per vedere come  $\sigma_f(t, \mathbf{r})$  sia correlata alla densità di corrente  $\mathbf{j}_f(t, \mathbf{r})$  procediamo come mostrato in figura 17: racchiudiamo l'elemento  $d\mathcal{S}$  di interfaccia in un volumetto con basi parallele all'interfaccia, una nel conduttore, l'altra nel vuoto, separate da una distanza infinitesima di ordine superiore rispetto al diametro della base. I volumetti di questo tipo sono strumenti mentali molto utili per studiare le

Fig. 1.17

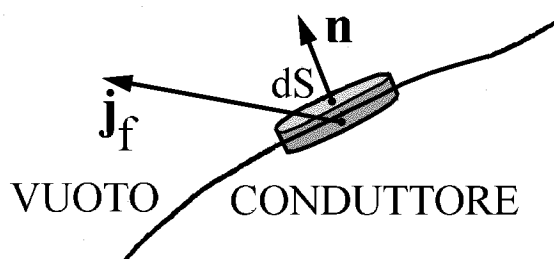
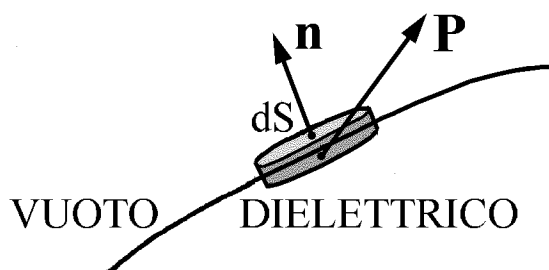


Fig. 1.18



proprietà delle interfacce tra materiali diversi, li indicheremo come **volumetti gaussiani** e li useremo spesso. Poiché la superficie laterale del volumetto gaussiano è infinitesima di ordine superiore rispetto alla superficie di base, il flusso di  $\mathbf{j}_f$  entrante nel volumetto gaussiano può essere calcolato limitando l'attenzione alle basi. Nel caso presente  $\mathbf{j}_f$  è nullo nel vuoto, quindi il flusso entrante nel volumetto gaussiano si riduce a  $d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r})$ , dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale all'interfaccia, orientato dal materiale al vuoto, e  $\mathbf{j}_f$  è valutato nel materiale ad immediato contatto con il punto  $\mathbf{r}$  dell'interfaccia. Per la legge di conservazione della carica, il flusso di  $\mathbf{j}_f$  entrante nel volumetto deve essere uguale a  $d\mathcal{S} \partial\sigma_f(t, \mathbf{r})/\partial t$ , quindi la densità superficiale di carica di conduzione dipende dal tempo con legge

$$\frac{\partial\sigma_f(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) \quad (1.13)$$

Analogamente, per calcolare la densità superficiale di carica legata sull'interfaccia tra un dielettrico ed il vuoto, consideriamo il volumetto gaussiano in figura 18. Per definizione, la densità superficiale di carica è legata alla densità di carica presente nel volumetto  $\mathcal{V}$  dalla relazione

$$\sigma_b(t, \mathbf{r})d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \rho_b(t, \mathbf{r})d\mathcal{V}$$

Sostituendo l'equazione 9) nell'integrale, tenendo conto del teorema della divergenza e ricordando che  $\mathbf{P}$  è nullo all'esterno si ottiene

$$\sigma_b(t, \mathbf{r})d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r})d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r})d\mathcal{S} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r})d\mathcal{S}$$

Nel termine di destra si intende che  $\mathbf{n}$  è il versore normale all'interfaccia orientato dal materiale al vuoto. Pertanto possiamo concludere che

$$\sigma_b(t, \mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \quad (1.14)$$

In parole: **sull'interfaccia dielettrico-vuoto, la densità superficiale di carica legata è la proiezione del campo di polarizzazione sulla normale esterna.**

## ESERCIZI

1) In una barretta di sezione  $1 \text{ mm}^2$  e lunghezza  $10 \text{ cm}$  la densità di corrente è assiale ed uniforme e vale  $j = 2 \text{ A/mm}^2$ . Ammettere che, al tempo zero, la barretta sia ovunque neutra e descrivere la distribuzione di carica dopo  $10 \text{ ms}$ .

2) Nella barretta dell'esercizio precedente la corrente assiale  $\mathbf{j}$  inizia ad essere presente al tempo zero e, dopo una fase transitoria più o meno complicata, diventa armonica con andamento  $j_0 \sin(\omega t)$  dove  $j_0 = 5 \text{ A/mm}^2$  ed  $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Ammettere che la barretta rimanga sempre complessivamente neutra e calcolare la densità superficiale di carica  $\sigma(t)$  sulle due basi in condizioni di regime.

3) Una barretta cilindrica è uniformemente polarizzata in direzione assiale con  $P = 10^5 \text{ C/m}^2$ . Nei casi a) e b) considerati in figura 19, calcolare la densità di carica di polarizzazione distribuita sulle basi.

4) Come mostrato in figura 20, una sfera è uniformemente polarizzata con  $P = 10^5 \text{ C/m}^2$ . Descrivere la densità superficiale di carica.

Fig. 1.19

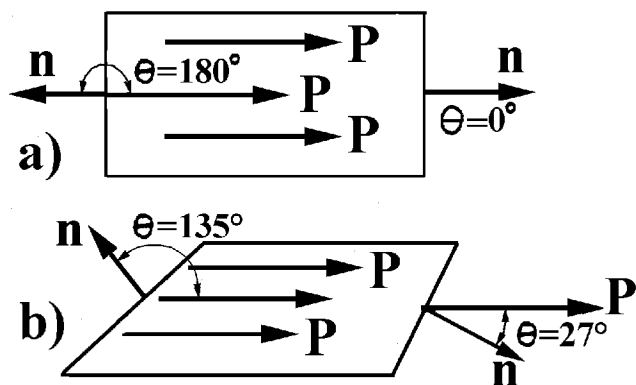
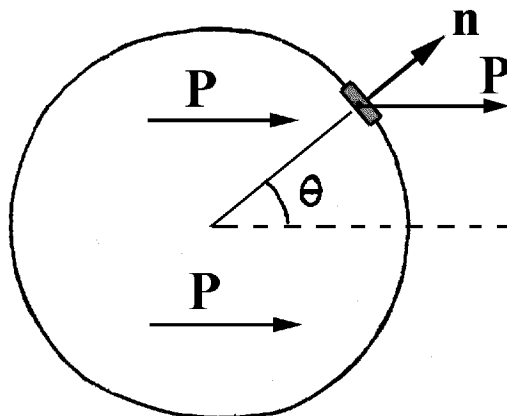


Fig. 1.20



## 1.9 Circolazione e rotore, teorema del rotore

Con riferimento alla figura 21, consideriamo una generica curva  $\gamma$  **chiusa** e **ferma**, scegliamo arbitrariamente un verso positivo di circolazione, avvolgiamo la curva con la mano destra disponendo le dita nel verso positivo di circolazione e conveniamo che la pagina positiva di una qualunque superficie orlata da  $\gamma$  sia indicata dal pollice. Poi consideriamo un generico campo vettoriale  $C(t, r)$  e definiamo la sua circolazione lungo la curva  $\gamma$  con l'integrale di linea

$$\oint_{\gamma} C(t, r) \cdot ds$$

dove  $ds$  è l'elemento di spostamento sulla curva. Il circoletto sul simbolo di integrale sta a ricordare che  $\gamma$  è una curva chiusa.

Fig. 1.21

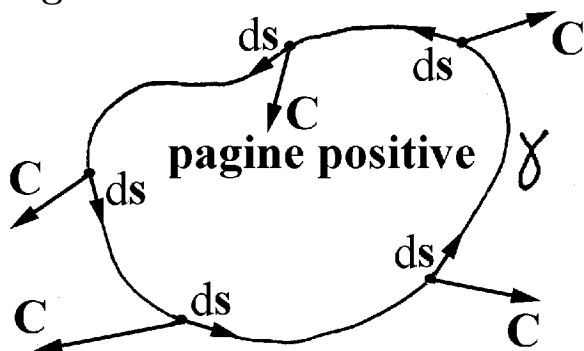
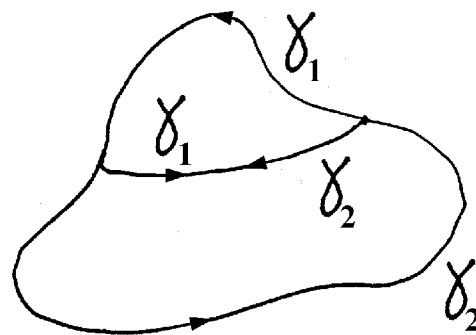


Fig. 1.22



Scomponendo la curva  $\gamma$  nelle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , come in figura 22, si vede che la circolazione lungo  $\gamma$  è la somma delle circolazioni lungo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Infatti i contributi alle circolazioni sul lato comune alle due curve si elidono.

Ora, con riferimento alla figura 23, consideriamo un'areola infinitesima  $d\mathcal{S}$  centrata in  $\mathbf{r}$  ed orientata con versore normale  $\mathbf{n}$ . Indichiamo con  $\delta\gamma$  il suo orlo e ci domandiamo se esista un campo vettoriale  $rot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  che abbia flusso attraverso l'areola  $d\mathcal{S}$  uguale alla circolazione del campo  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  lungo l'orlo  $\delta\gamma$ . Se il campo vettoriale  $rot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  esiste, la sua proiezione su  $\mathbf{n}$  deve essere

$$\mathbf{n} \cdot rot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{d\mathcal{S}} \oint_{\delta\gamma} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (M.9)$$

In particolare la componente  $z$  di  $rot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  deve essere il rapporto tra la circolazione di  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  lungo l'orlo del quadratino infinitesimo mostrato in figura 24 e l'area del quadratino. Il quadratino è centrato in  $\mathbf{r}$ , ha normale nel verso dell'asse  $z$  e lati paralleli agli assi  $x$  ed  $y$ . Il contributo alla circolazione

Fig. 1.23

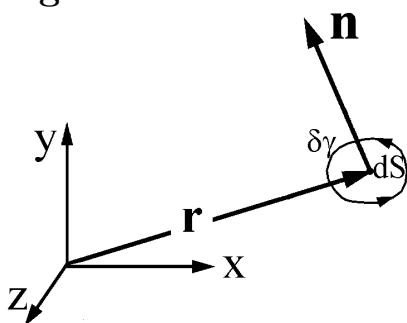
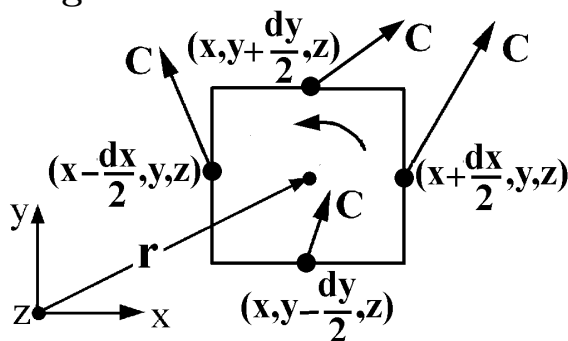


Fig. 1.24



di  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  lungo i due lati del quadratino paralleli all'asse  $x$  risulta

$$C_x(t, x, y - \frac{dy}{2}, z)dx - C_x(t, x, y + \frac{dy}{2}, z)dx = -\frac{\partial C_x(t, \mathbf{r})}{\partial y} dx dy$$

e quello lungo i due lati paralleli all'asse  $y$  vale

$$C_y(t, x + \frac{dx}{2}, y, z)dy - C_y(t, x - \frac{dx}{2}, y, z)dy = \frac{\partial C_y(t, \mathbf{r})}{\partial x} dx dy$$

Tenendo conto che  $dx dy = d\mathcal{S}$  è l'area del quadratino, vediamo che

$$[rot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})]_z = \frac{\partial C_y(t, \mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial C_x(t, \mathbf{r})}{\partial y}$$

Questo risultato ed i risultati analoghi che si ottengono per quadratini orientati con normali nei versi degli assi  $x$  ed  $y$  sono riassunti dalla regola di calcolo

$$rot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$$

Insomma il **rotore** del campo  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  esiste davvero perché può essere calcolato con l'operazione  $\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$ . Anche in questo caso la notazione  $\nabla \times \mathbf{C}$  ha soppiantato la notazione  $rot \mathbf{C}$  e viene usata senza intendere che il calcolo debba essere fatto a partire dalle componenti cartesiane; negli esercizi e nel seguito del corso vedremo che, molto spesso, conviene calcolare il rotore con approccio geometrico partendo dalla definizione M.9).



Armati dell'equazione M.9), torniamo a considerare la curva  $\gamma$  mostrata in figura 21, scegliamo una qualunque superficie orlata da  $\gamma$  e notiamo che la circolazione di  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  lungo  $\gamma$  è la somma delle circolazioni lungo gli orli di tutte le areole che “mattonellano” la superficie scelta, ovvero

$$\oint_{\gamma} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] \quad (M.10)$$

Questa equazione è il **teorema del rotore**, noto anche come **teorema di Stokes**. In parole: **la circolazione di un generico campo vettoriale lungo una curva  $\gamma$ , ferma e chiusa, piccola o grande che sia, è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie  $S$  orlata dalla curva**. Insistiamo nel dire che  $\mathcal{S}$  è una **qualunque** superficie orlata da  $\gamma$ . Ad esempio si pensi ad una retina acchiappafarfalla: la circolazione di un campo vettoriale lungo l'anello che la orla è uguale alla somma delle circolazioni lungo le maglie della retina, e ciò vale comunque questa sia disposta rispetto all'anello fermo.

Infine notiamo che il rotore di un qualunque campo vettoriale ha lo stesso flusso attraverso superfici diverse orlate da una stessa curva, quindi il suo flusso uscente da una qualunque superficie chiusa è nullo. Ciò comporta che **la divergenza del rotore di un qualunque campo vettoriale è nulla**. Lo si dimostra anche con gli approcci suggeriti nell'esercizio 2. Ed è anche facile dimostrare che **il rotore del gradiente di un qualunque campo scalare è nullo**. Lasciamo la dimostrazione all'esercizio 3).

## ESERCIZI

1) Pensare a campi radiali di intensità  $\alpha/r^n$  e considerare la loro circolazione lungo l'orlo di un quadratino infinitesimo. Dapprima con approccio geometrico, poi con calcolo diretto, dimostrare che, dovunque sia posto e comunque sia orientato il quadratino, la circolazione è nulla.

2) Dimostrare che la divergenza del rotore di un qualunque campo vettoriale  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  è sempre ed ovunque nulla. Procedere in due modi: a) con calcolo diretto e tenendo conto che le derivate seconde miste non dipendono dall'ordine di derivazione, b) scegliere una qualunque curva chiusa  $\gamma$  sulla superficie chiusa  $S$ , indicare con  $S_1$  ed  $S_2$  le due superfici che compongono  $S$ , entrambe orlate dalla curva  $\gamma$ , ed osservare che

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{C}] d\mathcal{V} = \int_{S_1} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{C} dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{C} dS_2 = \oint_{\gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$$

3) Dimostrare che il rotore del gradiente di un qualunque campo scalare  $f(t, \mathbf{r})$  è nullo. Anche in questo caso procedere sia con calcolo diretto, sia notando che

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \nabla \times [\nabla f(t, \mathbf{r})] d\mathcal{S} = \oint_{\gamma} [\nabla f(t, \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{s} = 0$$

4) Con approccio geometrico verificare che il rotore del campo  $\mathbf{a}/r$ , con  $\mathbf{a}$  vettore fisso, è in accordo con l'equazione M.8).

## 1.10 Campo di magnetizzazione, correnti di mantello

A questo punto torniamo alla densità di corrente “magnetica”  $\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r})$  e ricordiamo che ha divergenza nulla in qualunque situazione. Pertanto esiste almeno un campo vettoriale  $\mathbf{M}(t, \mathbf{r})$  tale che

$$\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(t, \mathbf{r}) \quad (1.15)$$

Questa equazione può sembrare un’inutile complicazione, ma ha il merito di garantire che  $\mathbf{j}_m$  ha davvero divergenza nulla e, soprattutto, consente di descrivere con semplicità i fenomeni magnetici, come vedremo nei capitoli 4 e 8. La ragione è che, quasi sempre, il campo  $\mathbf{M}$  è uniforme all’interno di regioni più o meno grandi dei materiali e varia bruscamente solo sulle interfacce tra materiali diversi, oppure sulle superfici di separazione tra domini magnetici diversi di uno stesso materiale.

Partendo dall’equazione 15) e ricordando il teorema del rotore si vede che la corrente “magnetica” attraverso una generica superficie  $S$  orlata da  $\gamma$  vale

$$I_m(t) = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) dS = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{M}(t, \mathbf{r}) dS = \oint_\gamma \mathbf{M}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

In parole: **la corrente “magnetica” che attraversa una superficie è uguale alla circolazione del campo di magnetizzazione lungo la curva che orla la superficie.** Ad esempio consideriamo la barra e la sfera

Fig. 1.25

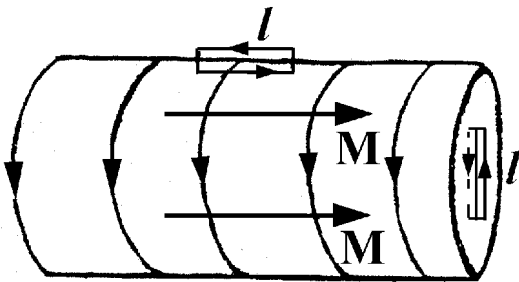
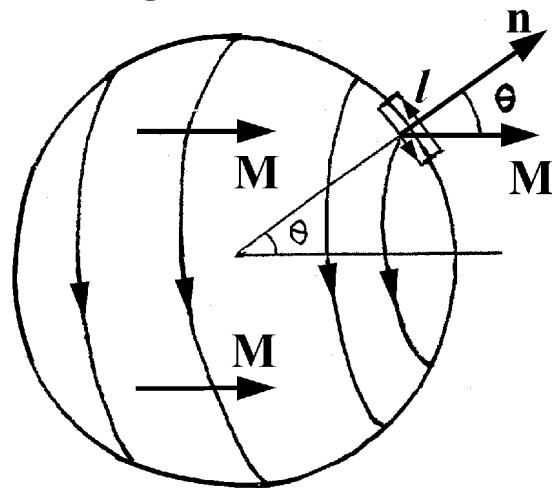


Fig. 1.26



ra uniformemente magnetizzate mostrate nelle figure 25 e 26. Il campo  $\mathbf{M}$  passa bruscamente dal valore interno a zero nell’attraversare le interfacce materiale-vuoto, quindi la densità di corrente magnetica  $\mathbf{j}_m$  è nulla all’interno, dove  $\mathbf{M}$  non dipende dalla posizione, ed è nulla all’esterno, dove  $\mathbf{M}$  è nullo. Pertanto le correnti “magnetiche” sono confinate sulle interfacce. Per descriverle fissiamo l’attenzione sulle areole orlate dai percorsini mostrati nelle figure: due lati di un percorsino hanno lunghezza  $l$  e sono paralleli all’interfaccia, uno nel vuoto, l’altro nel materiale, gli altri due lati hanno

lunghezza infinitesima di ordine superiore rispetto ad  $l$ . Prendendo la circolazione di  $\mathbf{M}$  lungo i percorsi vediamo che la corrente “magnetica” nella barra di figura 25 è nulla sulle due basi e vale  $I_m = Ml$  attraverso un’areola parallela ad  $\mathbf{M}$  posta a cavallo della superficie laterale. Dunque la corrente “magnetica” è confinata sulla superficie laterale della barra, detta **mantello**, e ha

$$\text{densità lineare} \quad I_m/l = M$$

Il verso della corrente di mantello è precisato dalla **regola della mano destra**: la corrente fluisce dal polso alle dita di una mano destra che avvolga la barra con pollice nel verso di  $\mathbf{M}$ . Con procedimento analogo si vede che il mantello della sfera uniformemente magnetizzata considerata in figura 26 è percorso da una corrente “magnetica” con

$$\text{densità lineare} \quad I_m/l = M \sin \theta$$

dove  $\theta$  è l’angolo che il campo  $\mathbf{M}$  forma con la normale esterna. In linguaggio vettoriale diciamo che la **densità lineare di corrente “magnetica”** è un campo confinato sul mantello, individuato dal prodotto vettore

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{n}$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale uscente dall’interfaccia nel punto  $\mathbf{r}$  ed  $\mathbf{M}$  è il campo di magnetizzazione nel materiale a contatto con l’interfaccia.

Anche i percorsi considerati in questo paragrafo sono strumenti mentali molto utili per studiare le proprietà delle interfacce tra materiali diversi, li indicheremo come **percorsini di Stokes** e li useremo spesso.

## 1.11 Riepilogo e commenti

Nel seguito del corso descriveremo la densità di carica di un generico materiale come

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_f(t, \mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) + \rho_0(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

dove  $\rho_0(\mathbf{r})$  è la densità di carica built-in del sistema rilassato. Gli altri due termini sono nulli in assenza di stimoli e descrivono rispettivamente la densità di carica di conduzione e la densità di carica di polarizzazione. La densità di corrente verrà descritta da

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{M}(t, \mathbf{r}) \quad (1.17)$$

Si ricordi che le correnti “magnetiche” e le correnti di polarizzazione sono correnti elettriche confinate entro gli atomi e non dissipano energia. Le prime possono esistere anche in condizioni rilassate, le seconde possono esistere solo in presenza di stimoli dipendenti dal tempo. Invece le correnti di conduzione possono essere presenti anche in condizioni stazionarie e dissipano energia.

In questo capitolo abbiamo esposto le idee di Franklin, Volta ed Ampère con linguaggio moderno ed abbiamo evitato l'approccio proposto dal grande fisico olandese Hendrik Lorentz. Questo scienziato pensava a particelle puntiformi in rapido movimento all'interno dei materiali e definiva le densità di carica e di corrente macroscopiche come medie spaziali di quelle microscopiche. Questo approccio era naturale alla fine dell'800, dopo la scoperta dell'elettrone, e ha il merito storico di aver evidenziato che le leggi della meccanica classica non possono essere estese al microcosmo. Ma se usato senza conoscenze preliminari di fisica quantistica, presenta alcune controindicazioni: non distingue tra distribuzioni di carica built-in e stimulate ed introduce processi di media classici che, presi alla lettera, conducono ad errori, o almeno a gravi malintesi. Inoltre sposta l'attenzione dalle leggi fondamentali e dai metodi sperimentali dell'elettromagnetismo classico, validi indipendentemente dai dettagli microscopici, a modelli microscopici classici che spesso sono errati, non solo perché le leggi della meccanica classica sono inadeguate in ambito microscopico, ma anche perché portano a risultati che violano le leggi stesse dell'elettromagnetismo. Ad esempio il campo elettrico che provoca la corrente in una giunzione p-n non è certamente il valor medio spaziale del campo elettrico microscopico, che dipende dalla posizione e raggiunge valori grandissimi sul piano di giunzione anche quando la corrente è nulla, è il campo che applichiamo noi con una batteria. E certamente un elettrone in moto classico intorno al nucleo come un pianeta intorno al Sole non è un modello accettabile per una corrente "magnetica", infatti la densità di carica associata a tale moto dipende dal tempo, quindi la densità di corrente non ha divergenza nulla.

L'approccio di Lorentz viene proposto ancor oggi da molti testi di elettromagnetismo perché fornisce una descrizione corpuscolare della materia che, a prima vista, sembra essere consistente con la quantizzazione della carica e di altre grandezze fisiche. Ma Einstein prima e De Broglie poi hanno mostrato che le descrizioni continua e corpuscolare della radiazione e della materia sono complementari e che possiamo, anzi dobbiamo, pensare a fluidi continui nonostante che gli esperimenti dimostrino l'esistenza delle particelle. Pertanto invitiamo ad accettare la descrizione continua sette-ottocentesca senza pregiudizi, lasciando agli esperimenti il compito di conciliarla con la struttura granulare della materia e della radiazione.

# Capitolo 2

## Campo elettrostatico

Il famoso enunciato della legge di Coulomb “la forza agente tra due cariche puntiformi e ferme è proporzionale al prodotto delle cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza” non ha un significato sperimentale diretto. Infatti in natura non esistono cariche elettriche puntiformi e ferme. Tuttavia, per due ragioni tutt’altro che semplici, la parte dell’elettromagnetismo fondata sulla legge di Coulomb, ovvero l’elettrostatica, è importantissima anche dal punto di vista sperimentale. La prima ragione è che le forze elettriche microscopiche non producono gli effetti previsti dalla meccanica classica: non fanno collassare cariche opposte in un punto, ma originano oggetti ben descritti da distribuzioni di carica stazionarie, come insegna il corso di chimica. Ad esempio l’elettrone ed il protone formano il sistema elettrostatico atomo di idrogeno, ed insieme di elettroni, protoni e neutroni formano sistemi elettrostatici come il cristallo di silicio ed il filo di rame. Ne prendiamo atto e ci riserviamo di studiare le densità di carica  $\rho_0(\mathbf{r})$  dei vari sistemi rilassati con i metodi sperimentali che vedremo via via. La seconda ragione è che, spesso, le particelle interagiscono come se fossero ferme anche quando sono in moto relativo. Ciò verrà giustificato nel capitolo 9, per ora anticipiamo che un elettrone fermo ad una certa distanza da una pallina metallica acquista un significato concreto come approssimazione di una situazione che non comporti velocità elevatissime.

In questo capitolo impariamo a calcolare il **campo elettrico** prodotto da distribuzioni di carica stazionarie perfettamente note, ad esempio dalle distribuzioni di carica descritte nel capitolo precedente. Poi studiamo le interazioni tra due distribuzioni di carica rigide.

### 2.1 Campi elettrici di stimolo e di risposta, campo ELETTRICO

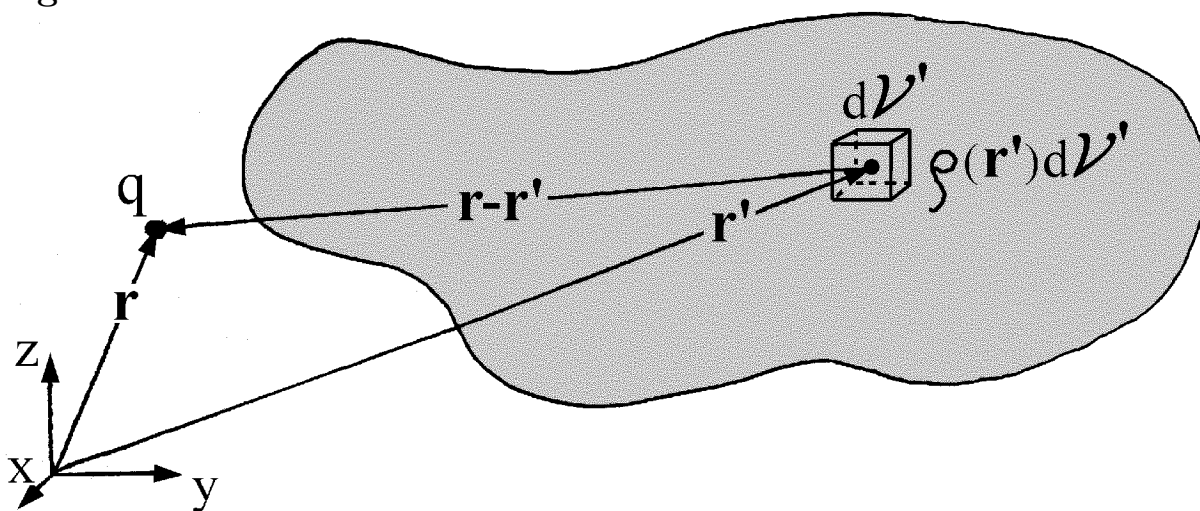
Nel 1785, con la famosa bilancia di torsione, Coulomb misura la forza  $\mathbf{F}$  agente su una pallina metallica centrata in  $\mathbf{r}$  e carica con carica  $q$ , posta in presenza di una seconda pallina metallica centrata in  $\mathbf{r}'$  e carica con carica  $q'$ .

Manipolare cariche e distribuirle in parti definite sulle palline non era facile a quei tempi, ma Coulomb, con straordinaria abilità, riesce nell'impresa e conferma la legge di forza che porta il suo nome:

$$\mathbf{F} = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.1)$$

Che le forze elettrostatiche dovessero decadere con il quadrato della distanza, come le forze gravitazionali, era già stato intuito da Priestley ben prima che Coulomb eseguisse il suo esperimento, ma il lavoro di Coulomb è la prima verifica sperimentale apparsa in letteratura. Ma attenzione: due palline cariche interagiscono con forza minore o maggiore di quella prevista dalla legge di Coulomb a seconda che abbiano cariche concordi o discordi in segno. Può anche avvenire che due palline con cariche concordi, portate a piccola distanza, si attraggano. Ciò è dovuto al fatto che la distribuzione di carica di una pallina viene modificata dalla presenza dell'altra, come vedremo nel prossimo capitolo. Per ora ammettiamo che la legge di Coulomb valga per ideali palline infinitesime e ferme e la usiamo per risolvere il seguente problema ideale: calcolare la forza agente su una carica puntiforme  $q$ , ferma nel punto  $\mathbf{r}$ , ammesso che la densità  $\rho(\mathbf{r}')$  delle "altre cariche" sia nota e non dipenda dal tempo. Con riferimento alla figura 1, scomponiamo il volume occupato

Fig. 2.1



dalla distribuzione di carica nota in cubetti elementari e sommiamo le forze esercitate sulla carica  $q$  dalle cariche contenute nei vari cubetti. Il risultato

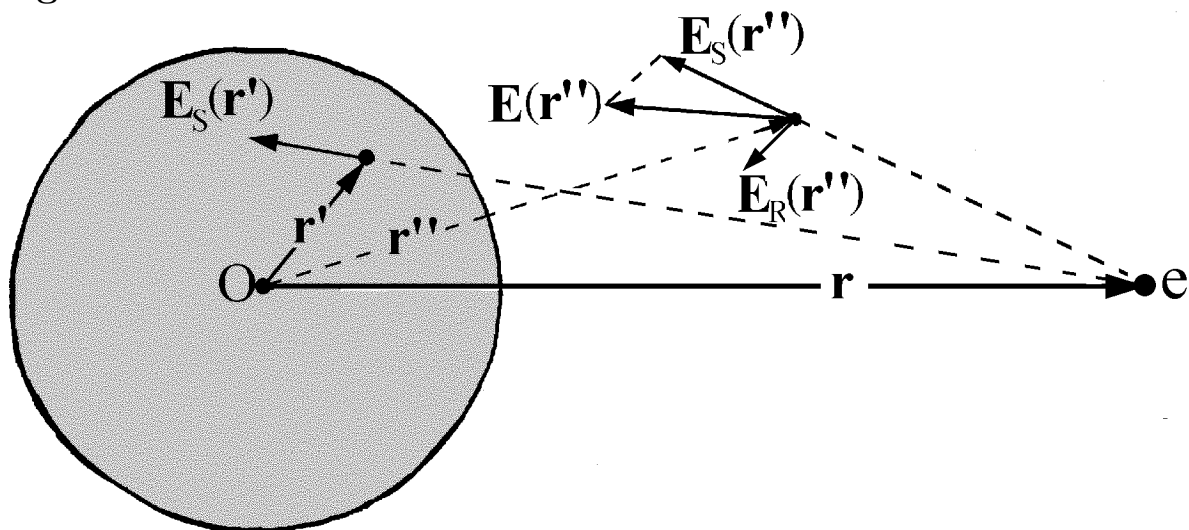
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

suggerisce di definire il **campo elettrostatico**  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  come rapporto tra la forza elettrica agente sulla carica  $q$  e la carica stessa, ovvero

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.2)$$

Ma attenzione: questa definizione ha un significato tutt'altro che banale! Apparentemente la carica  $q$  gioca un ruolo ancillare: sembra che il campo elettrico non dipenda dalla sua presenza, ma non è così. In realtà, per dare al campo il significato di rapporto tra la forza e la carica sulla quale agisce lo si dovrà calcolare dopo aver determinato la distribuzione delle altre cariche in presenza della carica  $q$ , e non sarà semplice! Ad esempio, consideriamo la situazione illustrata in figura 2: una sfera metallica di raggio  $r_0$ , centrata nell'origine, ha carica totale nulla ed è stimolata da un protone fermo nel punto  $\mathbf{r}$ , con  $r > r_0$ . Domandiamo: quale forza agisce sul protone? Potrem-

Fig. 2.2



mo essere tentati di rispondere che la forza è nulla perché la sfera ha carica nulla, ma faremmo un errore. Per rispondere correttamente dobbiamo procedere come segue. Usiamo una prima volta la legge di Coulomb e calcoliamo il campo elettrico

$$\mathbf{E}_S(\mathbf{r}') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}$$

prodotto dal protone nel generico punto  $\mathbf{r}'$ . Abbiamo indicato tale campo con indice  $S$  per intendere che agisce come **Stimolo** sulla pallina. Nel prossimo capitolo impareremo a calcolare la densità di carica  $\rho(\mathbf{r}')$  indotta nella pallina dal campo di stimolo, ora ammettiamo di conoscerla ed usiamo una seconda volta la legge di Coulomb per calcolare il campo elettrico di **Risposta**  $\mathbf{E}_R(\mathbf{r}'')$  che la pallina genera nel generico punto  $\mathbf{r}''$ , interno o esterno. Integrando sul volume della pallina otteniamo

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}'') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\mathcal{V}' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')$$

A questo punto il problema è risolto: la forza agente sul protone vale  $e\mathbf{E}_R(\mathbf{r})$  mentre la forza agente sulla pallina si ottiene sommando le forze che il campo  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r}')$  esercita sulla distribuzione di carica indotta nella pallina, ovvero

$$\mathbf{F} = \int d\mathcal{V}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}_S(\mathbf{r}')$$

Naturalmente le due forze risultano uguali ed opposte in verso, lo vedremo bene nel prossimo capitolo. Per ora ammettiamo di aver risolto il problema e ci domandiamo quale significato abbia un terzo campo, il

$$\text{campo ELETTRICO} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}'') = \mathbf{E}_S(\mathbf{r}'') + \mathbf{E}_R(\mathbf{r}'')$$

prodotto dal sistema protone-pallina nel generico punto  $\mathbf{r}''$ . A prima vista tale campo non serve a nulla: se lo usassimo per calcolare la forza agente sul protone dovremmo porre  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}$  ed otterremmo forza infinita, come se il protone interagisse con se stesso, se lo usassimo per calcolare la forza che il sistema protone-pallina esercita su una carica di passaggio nel punto  $\mathbf{r}''$  sbaglieremmo perché non terremmo conto che anche tale carica influisce sulla distribuzione di carica della pallina. Ma nel prossimo capitolo vedremo che il campo somma dei campi elettrici di stimolo e di risposta è l'ingrediente fondamentale per il calcolo delle distribuzioni di cariche e di correnti. Per non confonderlo con i campi elettrici built-in, di stimolo e di risposta, conveniamo di indicarlo sempre come campo ELETTRICO con caratteri maiuscoli.

Nel seguito del capitolo proponiamo esercizi di calcolo dei campi prodotti da distribuzioni di carica stazionarie, senza preoccuparci di precisare se siano campi elettrici built-in, di stimolo, di risposta o campi ELETTRICI.

## ESERCIZI

1) Nel SI viene dato il nome di *volt* ( $V$ ) all'unità di misura  $J/C$ , e viene dato il nome di *farad* ( $F$ ) all'unità di misura  $C/V$ . La costante  $\epsilon_0$  vale  $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$ . Attribuire almeno due nomi equivalenti all'unità di misura SI del campo elettrico.

2) Considerare il rapporto tra le intensità delle forze elettrica e gravitazionale agenti tra particelle e mostrare che: a) non dipende dalla distanza, b) vale  $\approx 10^{40}$  per il sistema elettrone-protone e  $\approx 2 \cdot 10^{43}$  per due elettroni.

3) Se due uomini avessero cariche concordi di  $10^{-3} C$  riuscirebbero ad avvicinarsi l'uno all'altro sino alla distanza di  $1 m$ ?

4) Se la carica del protone fosse maggiore di quella dell'elettrone di una parte per miliardo, la Terra continuerebbe ad attirare la Luna?

## 2.2 Equazioni differenziali dell'elettrostatica

Con riferimento alla figura 3, consideriamo un conetto di angolo solido  $d\Omega$  uscente dalla carica  $q$  puntiforme e ferma e pensiamo che non vi siano altre cariche nell'universo. Il flusso del campo elettrico attraverso l'areola  $dS$  sottesa dal conetto ed orientata con versore normale  $\mathbf{n}$  vale  $dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$  e non dipende dalla posizione né dall'orientamento dell'areola. Infatti la proiezione dell'areola su un piano normale ad  $\mathbf{r}$  ha area  $r^2 d\Omega$ , quindi

$$dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = r^2 d\Omega \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



Ciò comporta che il flusso del campo elettrico uscente da una qualunque superficie chiusa  $\mathcal{S}$  che contenga solo la carica  $q$  vale

$$\oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E comporta che le cariche  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_4$  considerate in figura 4, essendo esterne al volume  $\mathcal{V}$ , non contribuiscono al flusso del campo elettrico uscente da  $\mathcal{V}$ .

Fig. 2.3

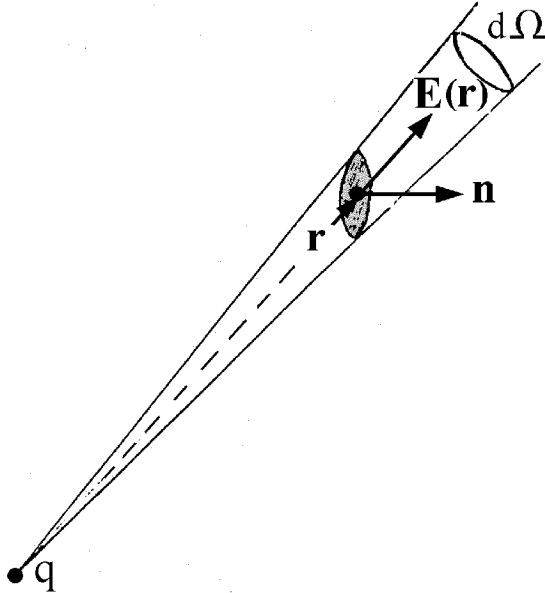
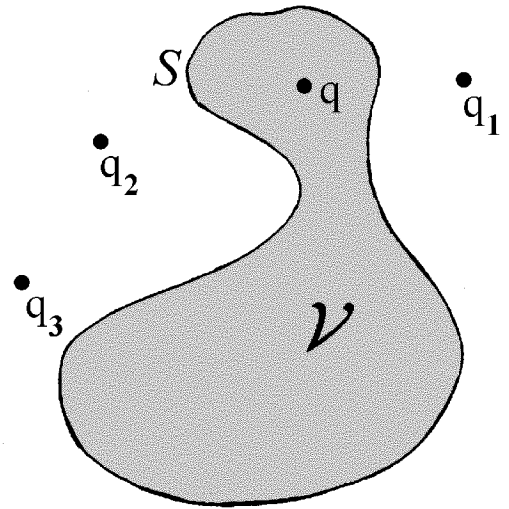


Fig. 2.4



Per una distribuzione di carica di densità  $\rho(\mathbf{r})$  possiamo scrivere

$$\oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dove  $Q$  è la carica totale contenuta nel volume  $\mathcal{V}$ . Questo risultato integrale è noto come **teorema di Gauss: il flusso del campo elettrico uscente da un qualunque volume  $\mathcal{V}$  è il rapporto tra la carica totale contenuta in  $\mathcal{V}$  ed  $\epsilon_0$** . Ma il primo membro è uguale all'integrale su  $\mathcal{V}$  della divergenza di  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , quindi

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Poiché questo risultato vale anche per volumi infinitesimi, possiamo concludere che il campo elettrostatico soddisfa la

$$\text{legge di Gauss} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

Una seconda proprietà importante del campo elettrostatico emerge dall'equazione 2), che può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad \text{dove} \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\mathcal{V}'\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.4)$$

Poiché il rotore del gradiente è nullo possiamo concludere che

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Equivalentemente possiamo dire che il campo elettrostatico ha rotore nullo perché è la sovrapposizione di campi radiali uscenti dai centri di volumetti fermi. Si noti che **il campo elettrostatico, pur essendo un campo vettoriale, è individuato da un campo scalare**: possiamo ottenerlo dalla densità di carica  $\rho(\mathbf{r})$  per integrazione oppure dal **potenziale elettrostatico**  $\phi(\mathbf{r})$  per derivazione. Per tale ragione si usa dire che il campo elettrostatico è un campo **potenziale**, dizione equivalente ad **irrotazionale**.

Anticipiamo che la legge di Gauss vale anche quando la densità di carica dipende dal tempo, ma in tal caso  $\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  non è nullo: è uguale all'opposto della derivata temporale del campo magnetico. Ad esempio, vedremo che il campo elettrico prodotto da una carica in moto armonico non ha rotore nullo, e per tale ragione si propaga a grandi distanze decadendo come  $1/r$  anziché come  $1/r^2$ . Per ora ribadiamo che **il campo elettrostatico ha rotore nullo** e può essere descritto come gradiente di un campo scalare.

Il significato fisico del potenziale elettrostatico  $\phi$ , come quello di  $\mathbf{E}$ , non è semplicissimo, emergerà quando affronteremo problemi fisici concreti e dovremo considerare potenziali built-in, di stimolo, di risposta e di sovrapposizione stimolo-risposta. Per ora riassumiamo quanto visto in questo paragrafo dicendo che il campo elettrostatico soddisfa le equazioni differenziali

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Più avanti procederemo a ritroso e mostreremo che queste equazioni, con l'aggiunta della condizione che il potenziale elettrostatico si annulli all'infinito, conducono alla legge di Coulomb.

## ESERCIZI

1) Dimostrare che un campo radiale con intensità dipendente dalla distanza in modo diverso da  $\alpha/r^2$  ha divergenza diversa da zero in qualunque punto diverso dall'origine.

2) Un campo è normale al piano  $z = 0$  con verso a fuggire il piano. a) Può avere divergenza nulla ovunque? b) Può avere divergenza nulla fuori dal piano? c) Può avere divergenza non nulla ovunque?

3) Considerare una carica  $q$  puntiforme e ferma centrata nell'origine.  
a) Verificare che la componente  $x$  del campo elettrico vale

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

b) Verificare che le componenti di  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$  sono davvero nulle.

4) Un campo elettrostatico ha componenti

$$E_x = \frac{2axy}{z} \quad , \quad E_y = \frac{ax^2}{z}$$

a) Calcolare la componente  $E_z$  sapendo che è nulla sul piano  $y = 0$ .

b) Calcolare la densità di carica.

5) Al tempo  $t$ , intorno all'origine, agisce il campo elettrico

$$E_x = 2axy - 3bz \quad , \quad E_y = ax^2 + 2az^2 \quad , \quad E_z = -3bx + 4ayz$$

a) Precisare le unità di misura SI di  $a$  e  $b$ . b) Mostrare che il campo può essere elettrostatico e calcolare: c) la densità di carica, d) l'integrale di percorso di  $\mathbf{E}$  dal punto  $(1 \text{ m}, 0, 0)$  al punto  $(1 \text{ m}, 1 \text{ m}, 0)$ , e) il flusso di  $\mathbf{E}$  uscente da una sfera di raggio  $1 \text{ m}$  centrata nell'origine.

## 2.3 Campi elettrostatici a simmetria sferica

Per distribuzioni di carica (non puntiformi) con simmetria sferica il calcolo del campo elettrico è particolarmente semplice. Dalla figura 5 si vede che il campo è nullo nel centro di simmetria, infatti le cariche contenute in cubetti

Fig. 2.5

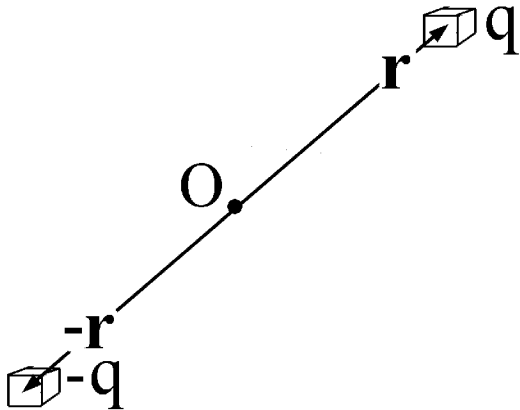
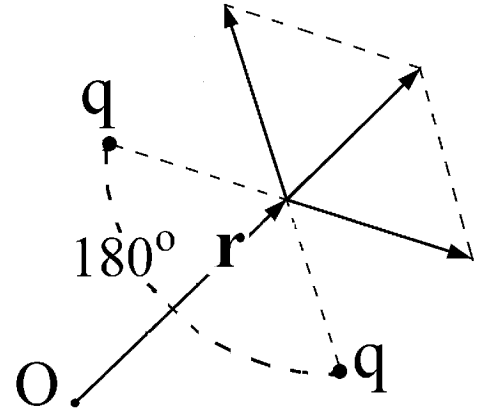


Fig. 2.6



uguali, centrati in  $\mathbf{r}$  ed in  $-\mathbf{r}$ , sono uguali e danno contributo complessivo nullo al campo nel centro. E dalla figura 6 si vede che il campo è ovunque radiale, infatti ad ogni carica corrisponde una carica uguale sovrapponibile per rotazione di  $180^\circ$  intorno ad  $\mathbf{r}$ , e le due cariche producono un campo radiale nel punto  $\mathbf{r}$ . Equivalentemente possiamo dire che il campo è radiale perché qualunque rotazione intorno al centro di simmetria lascia invariata la distribuzione di carica, quindi deve lasciare invariato anche il campo.

Ora indichiamo con  $Q(r)$  la carica contenuta nella sfera di raggio  $r$  centrata in  $O$  e ricordiamo che il flusso di  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  uscente da tale sfera vale  $Q(r)/\epsilon_0$  in ogni caso, anche quando la distribuzione di carica non ha simmetria sferica. Ma in presenza di simmetria sferica il flusso vale  $4\pi r^2 E(r)$ , quindi

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Per calcolare il potenziale cominciamo a notare che dipende solo da  $r$  perché il campo è perpendicolare alle superfici sferiche centrate nel centro di simmetria, poi notiamo che l'equazione

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -E(r) \quad \text{conduce a} \quad \phi(r) = \phi(0) - \int_0^r E(r') dr'$$

dove  $\phi(0)$  è il valore del potenziale nel centro di simmetria. Infine notiamo che il contributo a  $\phi(0)$  della carica contenuta nell'intercapadine sferica compresa tra  $r$  ed  $r + dr$  vale

$$d\phi = \frac{4\pi r^2 dr \rho(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{r\rho(r)dr}{\epsilon_0} \quad \text{quindi} \quad \phi(0) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty r\rho(r)dr$$

Fig. 2.7

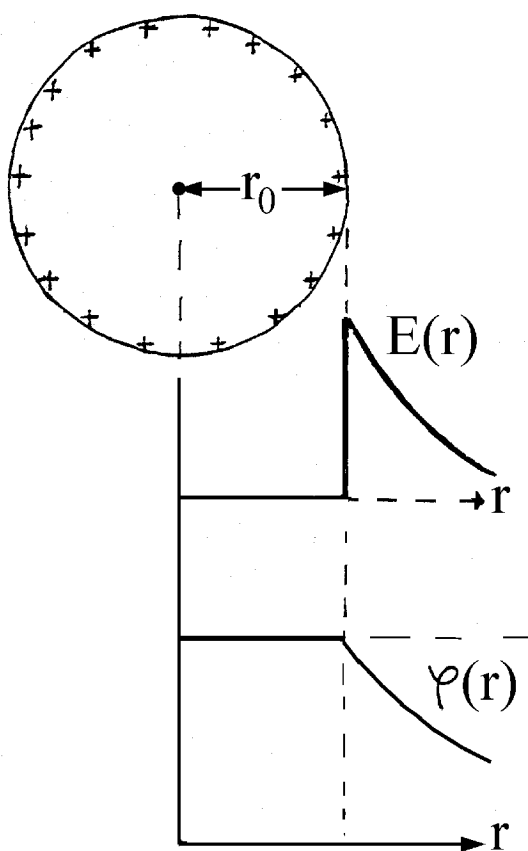
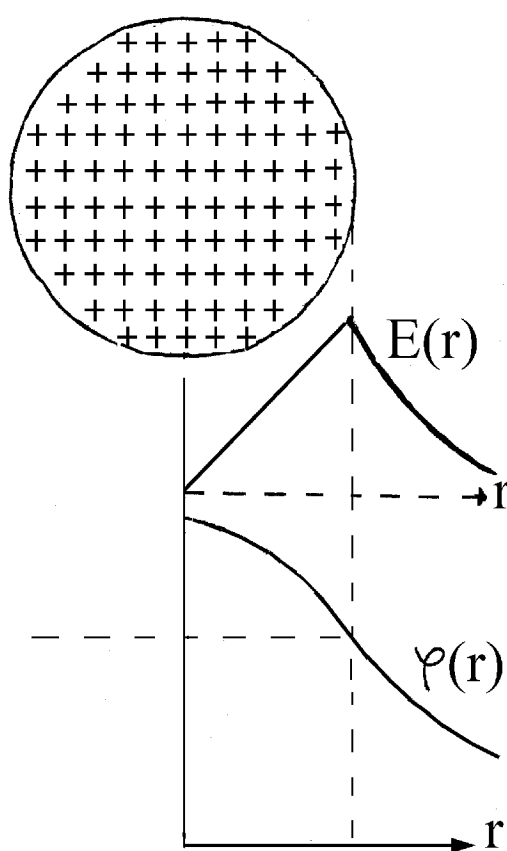


Fig. 2.8



Un primo esempio importante è mostrato in figura 7: la carica  $Q$  è distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio  $r_0$  con densità superficiale  $\sigma = Q/(4\pi r_0^2)$ . In tal caso il campo  $E(r)$  è nullo all'interno e vale

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

nella regione esterna. Poichè all'interno il campo è nullo, il potenziale è uniforme ed uguale a quello nel centro, dato da

$$\phi(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\sigma r_0}{\epsilon_0}$$

All'esterno il potenziale vale  $\phi(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ , proprio come se la carica  $Q$  fosse concentrata nel centro. Si noti che il campo varia bruscamente di  $\sigma/\epsilon_0$  nell'attraversare la superficie, ma il potenziale è ovunque continuo.

Un secondo esempio importante è mostrato in figura 8. La carica  $Q$  è distribuita entro una sfera di volume  $\mathcal{V} = 4\pi r_0^3/3$  con densità uniforme  $\rho = Q/\mathcal{V}$ . Il flusso  $4\pi r^2 E(r)$  uscente da una sfera di raggio  $r$  deve essere uguale a  $Q/\epsilon_0$  per  $r > r_0$  e a  $\rho 4\pi r^3/3\epsilon_0$  per  $r < r_0$ . Quindi all'esterno il campo ed il potenziale sono uguali a quelli del guscio di ugual raggio e ugual carica totale, ma all'interno il campo risulta  $E(r) = \rho r/3\epsilon_0$  ed il potenziale non è costante. In particolare, il potenziale nel centro è 1.5 volte maggiore di quello interno ad un guscio di ugual raggio e ugual carica totale, infatti

$$\phi(0) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_0} r \frac{Q}{\mathcal{V}} dr = \frac{3Q}{\epsilon_0 4\pi r_0^3} \frac{r_0^2}{2} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

Infine sottolineiamo un risultato che sarà utilissimo nel seguito: **entro una sfera carica con densità  $\rho$  uniforme il campo elettrostatico prodotto dalla sfera stessa vale**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0} \quad (2.5)$$

## ESERCIZI

1) Considerare il campo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = C \mathbf{r} e^{-kr}$ . a) Specificare le unità di misura SI delle costanti  $C$  e  $k$ . b) Con calcolo diretto mostrare che ha rotore nullo. c) Calcolare il potenziale nell'origine e la densità di carica. d) Riportare in grafico la densità di carica, il campo elettrico ed il potenziale in funzione di  $kr$ . e) Calcolare la carica totale (ricordare che  $\int_0^\infty \zeta^n e^{-\zeta} d\zeta = n!$ ).

2) Ricordare l'equazione 1.4) e calcolare il potenziale elettrostatico prodotto dalla nuvola elettronica dell'atomo d'idrogeno sul protone.

## 2.4 Campi elettrostatici a simmetria planare

Con riferimento alla figura 9, consideriamo due lastre parallele, una di zinco, l'altra di rame, di dimensioni molto maggiori della distanza  $w$ , messe in contatto da fili di zinco e rame ben congiunti. Scegliamo l'asse  $z$  normale alle lastre, con origine sul piano di mezzeria, e pensiamo che le lastre siano infinitamente estese con densità superficiali di carica uniformi:  $\sigma$  nello zinco e  $-\sigma$  nel rame. È ragionevole pensare che questa **approssimazione planare** descriva bene la situazione reale nella regione centrale delle lastre e perda accuratezza in prossimità dei bordi. Anzitutto notiamo che il potenziale è nullo sul piano di mezzeria, infatti ad ogni regione della lastra di rame corrisponde la regione affacciata della lastra di zinco, e le due regioni danno contributo opposto al potenziale sul piano di mezzeria. Poi consideriamo il conetto mostrato in figura, uscente dal punto P interno allo zinco. Le

Fig. 2.9

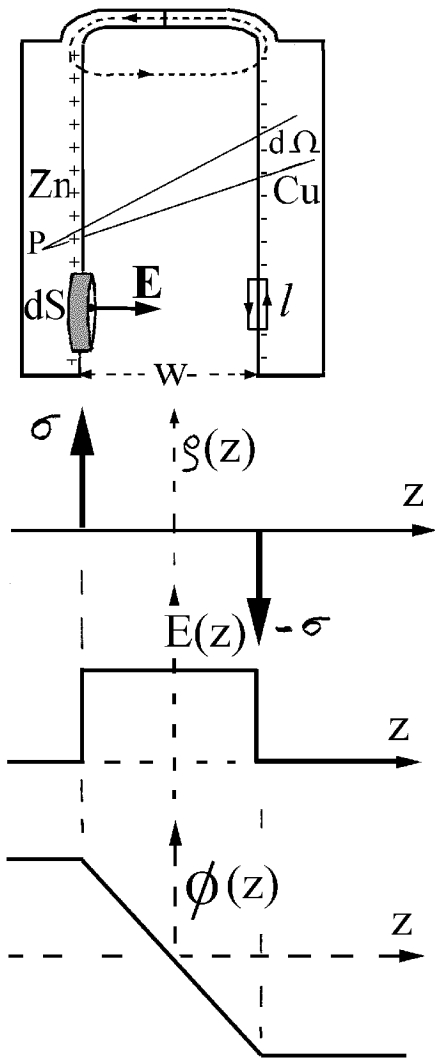
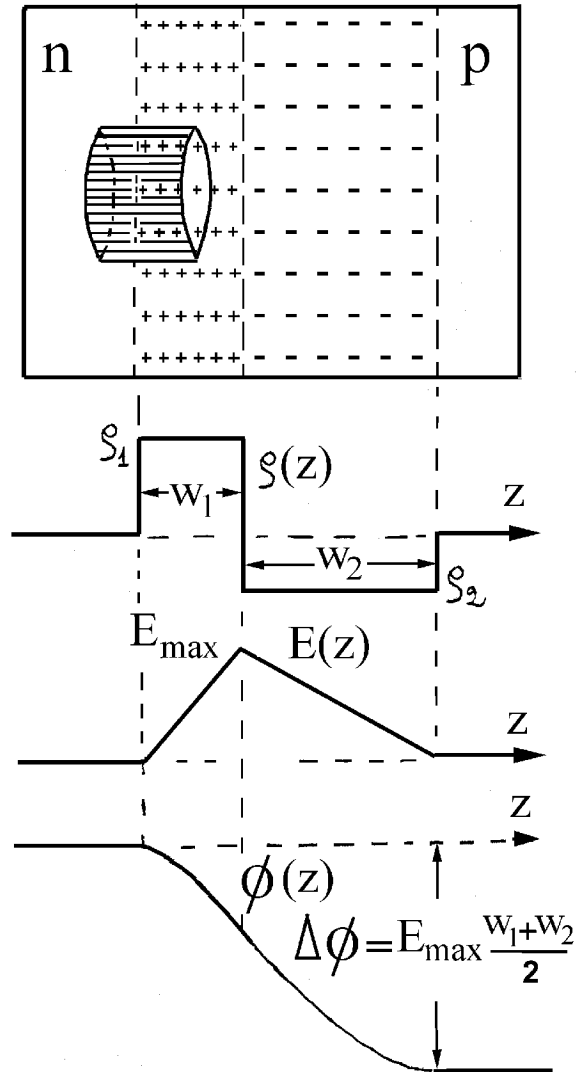


Fig. 2.10



cariche contenute nelle due regioni intercettate dal conetto sulle superfici di rame e di zinco sono proporzionali ai quadrati delle distanze dal punto P, quindi danno contributi opposti al campo in P. Ciò comporta che il campo elettrico è nullo sia entro lo zinco, sia entro il rame. Notiamo anche che le proiezioni di  $\mathbf{E}$  parallele all'interfaccia devono conservarsi nel passaggio dal metallo al vuoto, per convincercene basta ricordare che è nulla la circolazione di  $\mathbf{E}$  lungo un percorsino di Stokes a cavallo dell'interfaccia. Ma  $\mathbf{E}$  è nullo nel metallo, quindi deve essere normale alle lastre nel vuoto. Infine consideriamo un volumetto gaussiano a cavallo della superficie di zinco, ricordiamo la legge di Gauss e concludiamo che  $E$  fa un salto pari a  $\sigma/\epsilon_0$  nel passare dallo zinco al vuoto. Ma all'interno  $E$  è nullo, quindi il campo elettrico tra le lastre vale  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Naturalmente  $E$  fa un salto pari a  $-\sigma/\epsilon_0$  nell'entrare nel rame.

L'approssimazione planare, pur semplificando notevolmente il problema, conduce ad una difficoltà: il potenziale elettrostatico non si annulla all'infinito. Infatti esternamente agli strati carichi il campo elettrico è nullo, quindi il potenziale è uniforme, positivo da una parte e negativo dall'altra. Ciò non deve preoccupare: le distribuzioni di carica con simmetria planare non

hanno realtà fisica autonoma proprio perché si estendono all'infinito. Per un sistema fisico finito la difficoltà scompare e **l'equazione 4) definisce univocamente il potenziale di Coulomb**. Torneremo su questo punto più avanti, per ora osserviamo che, con lastre collegate da fili di rame e zinco ben congiunti tra loro, la differenza di potenziale built-in, oltre che tra le lastre, deve essere presente tra i due fili a contatto. Infatti è nulla la circolazione del campo elettrostatico lungo qualunque percorso chiuso, in particolare lungo il percorso tratteggiato in figura 9. Per tale ragione la differenza di potenziale considerata viene indicata come **potenziale di contatto** oltre che come **potenziale di Volta**. Non dipende dalla distanza tra le lastre e, nel caso rame-zinco, vale  $\Delta\phi \approx 0.8 V$ . Noto  $\Delta\phi$ , il campo elettrico built-in tra le lastre e la densità superficiale di carica built-in sono individuate da

$$E = \frac{\Delta\phi}{w} \quad , \quad \sigma = \epsilon_0 \frac{\Delta\phi}{w}$$

Passiamo alla giunzione  $p-n$  in equilibrio mostrata in figura 10. Pensiamo che sia infinitamente estesa e scegliamo l'asse  $z$  normale al piano della giunzione, diretto verso destra. Ricordiamo che le regioni  $n$  e  $p$  hanno cariche built-in opposte, positiva nel materiale  $n$ , negativa nel materiale  $p$ , e ricordiamo che  $\rho_1 w_1 = -\rho_2 w_2$ . Le dimostrazioni che  $\mathbf{E}$  è normale al piano della giunzione e che è nullo esternamente alle regioni cariche ricalcano quelle del caso precedente, non le ripetiamo. Per calcolare il campo elettrico  $E(z)$ , consideriamo il **volume gaussiano** mostrato in figura 10: un cilindro retto con asse normale al piano di giunzione e basi di area  $A$ . Una base è posta nella parte neutra della regione  $n$ , l'altra è individuata dalla coordinata  $z$ . Sappiamo che  $\mathbf{E}$  è nullo sulla base di sinistra ed è parallelo all'asse del cilindro, quindi il suo flusso uscente dal volume gaussiano vale  $AE(z)$  e deve essere uguale a  $Q(z)/\epsilon_0$ , dove  $Q(z)$  è la carica contenuta nel volume gaussiano. Pertanto il campo elettrico sulla base di destra risulta

$$E(z) = \frac{Q(z)}{A\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^z \rho(z') dz'$$

e dipende da  $z$  con l'andamento triangolare mostrato in figura 10. Sul piano di giunzione, raggiunge il valore assoluto massimo

$$E_{max} = \frac{w_1 |\rho_1|}{\epsilon_0} = \frac{w_2 |\rho_2|}{\epsilon_0}$$

Anche in questo caso il potenziale di Coulomb non è ben definito perché abbiamo usato l'approssimazione planare. E non possiamo dire in generale che  $\phi(z)$  è nullo sul piano di giunzione: è nullo solo quando la giunzione è simmetrica. Per superare queste difficoltà diamo a  $\phi(z)$  il significato di differenza di potenziale, ponendolo nullo a sinistra della regione carica, ovvero per  $z = -\infty$ , e scriviamo

$$\phi(z) = - \int_{-\infty}^z E(z') dz' \quad , \quad \Delta\phi = - \int_{-\infty}^{\infty} E(z') dz' = E_{max} \frac{w_1 + w_2}{2}$$

La differenza di potenziale  $\Delta\phi$  prende il nome di **barriera di potenziale built-in** ed è rappresentata dall'area compresa tra la curva  $E(z)$  e l'asse  $z$ . Si noti che il maggior contributo alla barriera di potenziale built-in proviene dalla regione con bassa densità di carica.

Sottolineiamo che **la presenza di campi elettrici built-in non comporta che le cariche del sistema rilassato siano forzate a muoversi nel verso del campo o in verso opposto** (a seconda che siano positive o negative). In realtà, **la forza risultante agente su una qualunque particella di un sistema rilassato può dipendere dal tempo in modo molto complicato, ma fluttua intorno ad un valor medio nullo, anche quando il campo elettrico built-in è molto intenso.** Per capire come ciò sia possibile si pensi ad un gas in equilibrio entro una torre mantenuta a temperatura  $T$ . Una singola molecola è soggetta alla forza di gravità, ma non cade: ad ogni istante ha la stessa probabilità di muoversi verso l'alto o verso il basso. Se non fosse così il gas non sarebbe in equilibrio. In realtà, quando l'equilibrio è ben stabilito, la densità di molecole di una data specie chimica dipende dalla quota con legge barometrica e la forza di gravità è compensata da una "forza di origine diffusiva" che spinge le molecole della data specie ad andare verso le regioni dove hanno minor densità. Analogamente in una giunzione  $p-n$  rilassata la forza che il campo elettrico built-in esercita sugli elettroni liberi, spingendoli dalla regione  $p$  alla regione  $n$ , è compensata da una forza di origine diffusiva che spinge gli elettroni liberi dalla regione  $n$  verso la regione  $p$ , dove hanno densità bassissima. Un discorso analogo vale per le lacune: la forza esercitata dal campo built-in le spinge verso la regione  $p$  ed è compensata da una forza di origine diffusiva che le spinge verso la regione  $n$ , dove hanno bassissima densità.

## ESERCIZI

1) Considerare due lastre piane parallele indefinite distanti  $1\text{ mm}$  ed ammettere che le superfici affacciate abbiano densità di carica superficiale  $10^{-8}\text{ C/m}^2$  e  $-10^{-8}\text{ C/m}^2$ . Calcolare e riportare in grafico: a) il campo elettrico built-in, b) il potenziale built-in ponendolo nullo a sinistra.

2) Una giunzione p-n simmetrica ha muri  $p$  ed  $n$  di spessore  $1\ \mu\text{m}$  e densità di carica  $\pm 10^{14}\text{ e/cm}^3$ . Calcolare e riportare in grafico in funzione della coordinata normale ai muri: a) il campo elettrico built-in, b) il potenziale built-in ponendolo nullo a sinistra.

3) Come sopra, ma per giunzione asimmetrica con:

$$w_1 = 0.2\ \mu\text{m}, \rho_1 = -5 \cdot 10^{14}\text{ e/cm}^3, w_2 = 0.5\ \mu\text{m}, \rho_2 = 2 \cdot 10^{14}\text{ e/cm}^3.$$

4) Come sopra, ma nel caso che i muri  $p$  ed  $n$  siano separati da un muro neutro di spessore  $10\ \mu\text{m}$ . Tale sistema viene indicato come giunzione  $p-i-n$  con l'indice  $i$  (intrinseco) riferito al muro neutro.

5) Una giunzione p-n simmetrica ha barriera di potenziale di  $0.7\text{ V}$  e



regioni cariche di spessore  $0.1 \mu m$  ciascuna. Calcolare: a) la densità di carica in ciascuna regione, b) il campo elettrico massimo.

6) Considerare due muri identici di spessore  $w$ , carichi con densità di carica opposte  $\rho$  e  $-\rho$  e quasi completamente compenetrati l'uno nell'altro. Il muro positivo è spostato di  $s \ll w$  dal muro positivo. Si dimostri che: a) nel vuoto il campo è nullo, b) nella regione di sovrapposizione il campo è uniforme e vale  $\mathbf{E} = -\rho \mathbf{s} / \epsilon_0$ .

7) Su usa dire che una funzione  $f(z)$  è pari quando  $f(z) = f(-z)$  e che è dispari quando  $f(z) = -f(-z)$ . Considerare distribuzioni di carica con simmetria planare e dimostrare che una densità di carica pari produce un campo elettrico dispari ed un potenziale pari.

## 2.5 Campi elettrostatici a simmetria cilindrica

Con riferimento alla figura 11, consideriamo distribuzioni di carica invarianti per rotazione intorno ad una particolare retta ed invarianti per traslazione

Fig. 2.11

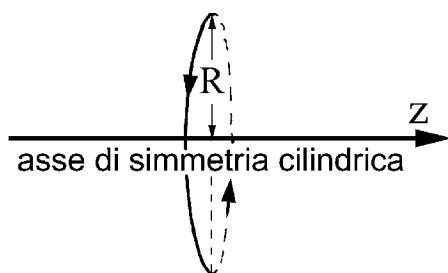
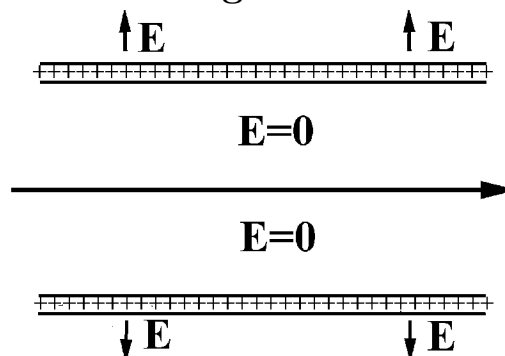


Fig. 2.12



lungo la stessa retta. Scelta l'asse  $z$  lungo l'asse di simmetria ed indicata con  $\mathbf{R} \equiv (x, y)$  la proiezione di  $\mathbf{r}$  nel piano  $z = 0$ , la densità di carica dipende solo da  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ovvero è individuata dalla funzione  $\rho(R)$ . Poi, con riferimento alla figura 12, osserviamo quanto segue.

- Il campo è nullo sull'asse. Infatti le cariche contenute in due cilindretti uguali, paralleli all'asse e contrapposti rispetto all'asse, danno contributi opposti al campo sull'asse.
- Il campo giace su rette che intersecano l'asse ortogonalmente. Infatti una rotazione di  $180^\circ$  intorno ad una di tali rette lascia invariata la distribuzione di carica, quindi deve lasciare invariato anche il campo.
- L'intensità del campo dipende solo da  $R$  perché le rotazioni intorno all'asse lasciano invariata la distribuzione di carica.

Infine consideriamo un cilindro di raggio  $R$  e lunghezza  $l$  centrato sull'asse ed indichiamo con  $Q(R)$  la carica contenuta nel cilindro. Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale di tale cilindro vale  $2\pi RlE(R)$  e deve

essere uguale a  $Q(R)/\epsilon_0$ , quindi possiamo concludere che

$$E(R) = \frac{Q(R)}{2\pi\epsilon_0 Rl} = \frac{\lambda(R)}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (2.6)$$

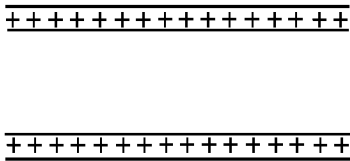
dove  $\lambda(R) = Q(R)/l$  è la densità lineare di carica. In particolare, esternamente ad un filo sottile indefinito, carico con densità lineare  $\lambda$ , il campo elettrostatico ha intensità  $E(R) = \lambda/(2\pi\epsilon_0 R)$  e fugge o punta il filo a seconda che  $\lambda$  sia positiva o negativa.

Anche in questo caso sorge la difficoltà incontrata nel caso di simmetria planare: il calcolo del potenziale di Coulomb non è possibile perché la distribuzione di carica si estende all'infinito. Torneremo su questo punto con approccio concreto nel paragrafo 3.5.

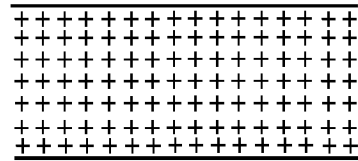
## ESERCIZI

1) Il lungo tubo mostrato in sezione nella figura 13 ha raggio di 1 cm e parete di spessore 1 Å, carica con densità  $10^8 C/m^3$ . a) Mostrare che il campo elettrico è nullo all'interno. b) Calcolare il salto del campo elettrico nell'attraversare la parete. c) Calcolare la densità lineare della distribuzione di carica assiale che produce lo stesso campo all'esterno.

**Fig. 2.13**



**Fig. 2.14**



2) Il cilindro mostrato in sezione nella figura 14 ha raggio di 1 cm e carica distribuita uniformemente nel volume con densità  $1 C/m^3$ . a) Mostrare che il campo elettrico interno è proporzionale alla distanza dall'asse e calcolare la costante di proporzionalità, b) Calcolare la densità lineare della distribuzione di carica assiale che produce lo stesso campo all'esterno.

## 2.6 Equazione di Poisson

In questo paragrafo pensiamo di non conoscere la legge di Coulomb, ma di sapere che il campo elettrostatico soddisfa le due equazioni

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$$

La prima assicura che esiste almeno un campo scalare  $\phi(\mathbf{r})$  tale che  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ , la seconda precisa che  $\phi(\mathbf{r})$  deve essere soluzione della

$$\text{equazione di Poisson} \quad \nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0 \quad (2.7)$$

dove  $\nabla^2$  è l'operatore differenziale di Laplace (**laplaciano**)

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Per una distribuzione di carica con simmetria sferica intorno all'origine,  $\phi(\mathbf{r})$  dipende solo da  $r$  e l'equazione di Poisson si semplifica notevolmente. Infatti il laplaciano di una funzione della sola distanza può essere scritto in una delle forme

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(r) &= \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} \\ \nabla^2\phi(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right]\end{aligned}\quad (M.11)$$

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] \quad (M.12)$$

La dimostrazione che le equazioni  $M.11)$  ed  $M.12)$  sono equivalenti alla prima è immediata, quindi basta dimostrare che la prima è corretta. Per esercizio seguiamo due strade diverse nella forma, ma equivalenti nella sostanza.

• Cominciamo a calcolare

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\phi}{dr} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{r} \frac{d\phi}{dr} \right] = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{x^2}{r^3} \frac{d\phi}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2\phi}{dr^2}$$

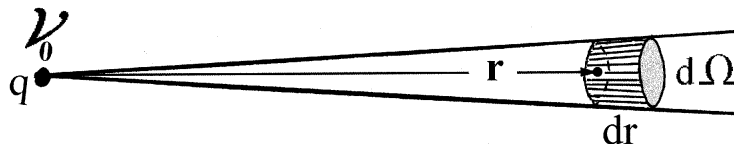
Poi calcoliamo  $\partial^2\phi/\partial y^2$  e  $\partial^2\phi/\partial z^2$ , sommiamo ed otteniamo il risultato

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{3}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} = \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

• Calcoliamo la divergenza del campo  $\nabla\phi(r)$  a partire dall'equazione  $M.1)$ , ovvero come rapporto tra il flusso di  $\nabla\phi(r)$  uscente dal volumetto tratteggiato in figura 15 ed il volume  $r^2 d\Omega dr$ . Poiché  $\phi$  dipende solo da  $r$ ,  $\nabla\phi(r)$  è diretto come  $\mathbf{r}$  e alle distanze  $r$  ed  $r + dr$  ha intensità  $d\phi(r)/dr$  e  $d\phi(r)/dr + dr d^2\phi(r)/dr^2$ , quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(r) &= \frac{1}{r^2 d\Omega dr} \left[ d\Omega (r + dr)^2 \left( \frac{d\phi(r)}{dr} + dr \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} \right) - d\Omega r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 dr} \left[ (r^2 + 2r dr) \left( \frac{d\phi(r)}{dr} + dr \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} \right) - r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] = \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d^2\phi(r)}{dr^2}\end{aligned}$$

**Fig. 2.15**



Ora vogliamo dimostrare che l'equazione di Poisson, con la condizione che  $\phi(\mathbf{r})$  si annulli all'infinito, conduce alla legge di Coulomb. Allo scopo pensiamo che la densità di carica sia nulla ovunque tranne che in una sferetta centrata nell'origine. Indichiamo con  $q$  la carica totale della sferetta e pensiamo che rimanga costante mentre il volume della sferetta tende a zero.

Tale distribuzione di carica è descritta dalla densità  $\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r})$ , infatti la delta di Dirac  $\delta(\mathbf{r})$  è nulla ovunque tranne che in un volume infinitesimo centrato nell'origine, ed il suo integrale esteso a qualunque volume contenente l'origine è unitario. Sostituendo  $\rho(\mathbf{r})$  con  $q \delta(\mathbf{r})$  nell'equazione 7) ed usando l'equazione M.12) otteniamo

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})$$

In punti diversi dall'origine questa equazione assicura che la derivata seconda di  $r\phi(r)$  è nulla, quindi  $r\phi(r)$  deve avere l'andamento

$$r\phi(r) = \alpha + \beta r \quad \text{ovvero} \quad \phi(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta$$

La condizione  $\phi(\infty) = 0$  impone che  $\beta = 0$ , quindi rimaniamo alle prese con il problema di determinare  $\alpha$ . Per risolverlo cominciamo a notare che

$$\nabla \phi(r) = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

poi integriamo ambo i membri dell'equazione di Poisson 7) sul volume di una sfera centrata nell'origine. Ricordando il teorema della divergenza, vediamo che l'integrale del primo membro è il flusso di  $\nabla \phi(r)$  uscente dalla sfera e vale  $-4\pi\alpha$ , mentre l'integrale del secondo membro vale  $-q/\epsilon_0$ , quindi  $\alpha$  è uguale a  $q/4\pi\epsilon_0$ , in pieno accordo con la legge di Coulomb.

## ESERCIZI

- 1) Quale unità SI dobbiamo attribuire alla delta di Dirac  $\delta(\mathbf{r})$ ?
- 2) La delta di Dirac unidimensionale  $\delta(z)$  è nulla ovunque tranne che sul piano  $z = 0$  ed è tale che  $\int dz \delta(z) = 1$ . Quale dimensione ha  $\delta(z)$ ?

## 2.7 Campi elettrici di dipolo ideale e reale

Con riferimento alla figura 16a), pensiamo che una carica puntiforme  $q$  sia separata dalla carica puntiforme  $-q$  di uno spostamento  $\mathbf{s}$ . Poi pensiamo che  $q$  tenda all'infinito ed  $s$  a zero con  $\mathbf{p} = q\mathbf{s}$  finito. Tale sistema è un **dipolo elettrico ideale** con **momento di dipolo**  $\mathbf{p} = q\mathbf{s}$ . Scelta l'origine a metà strada tra le due cariche, si vede che

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{s}/2|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} + \mathbf{s}/2|} = \frac{q\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

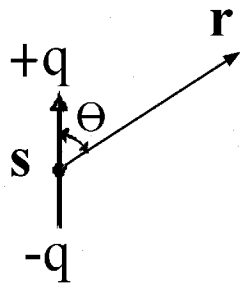
Quindi il **potenziale di dipolo ideale** risulta

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.8)$$

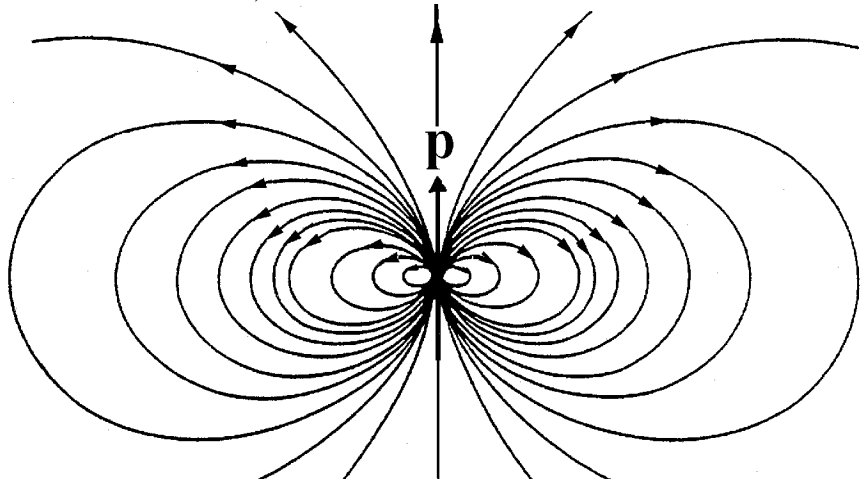
Prendendo il gradiente e cambiando segno otteniamo il

$$\text{campo elettrico di dipolo ideale} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \quad (2.9)$$

Fig. 2.16: a)



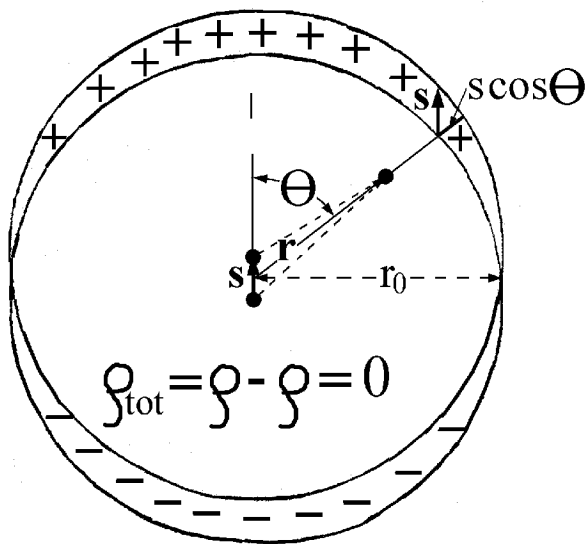
b)



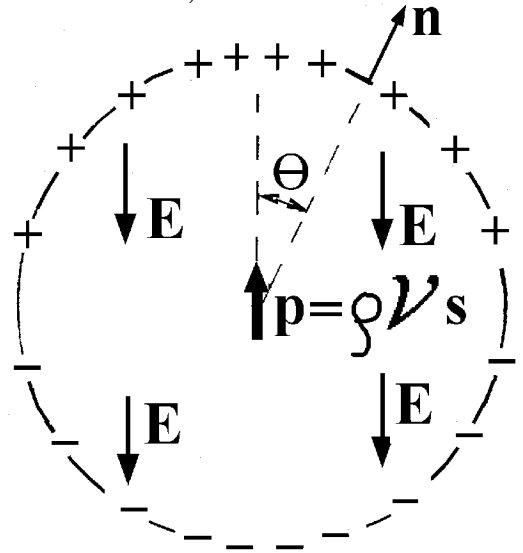
Le linee di flusso del campo dipolare sono mostrate in figura 16b). Sull'asse dipolare il campo ha ovunque il verso di  $\mathbf{p}$  e vale  $\mathbf{E}(r) = \mathbf{p}/(2\pi\epsilon_0 r^3)$ , mentre sul **piano equatoriale** (piano ortogonale a  $\mathbf{p}$ , passante per il centro), il campo ha verso opposto a  $\mathbf{p}$  e vale  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$ .

Ora, con riferimento alla figura 17a), consideriamo due sfere di volume  $\mathcal{V} = 4\pi r_0^3/3$ , uniformemente cariche con densità opposte  $\pm\rho$ , e pensiamo che il centro della sfera positiva sia spostato di  $\mathbf{s}$  da quello della sfera negativa, con  $s \ll r_0$ . Il campo elettrico nella regione esterna ad entrambe le sfere è

Fig. 2.17 : a)



b)



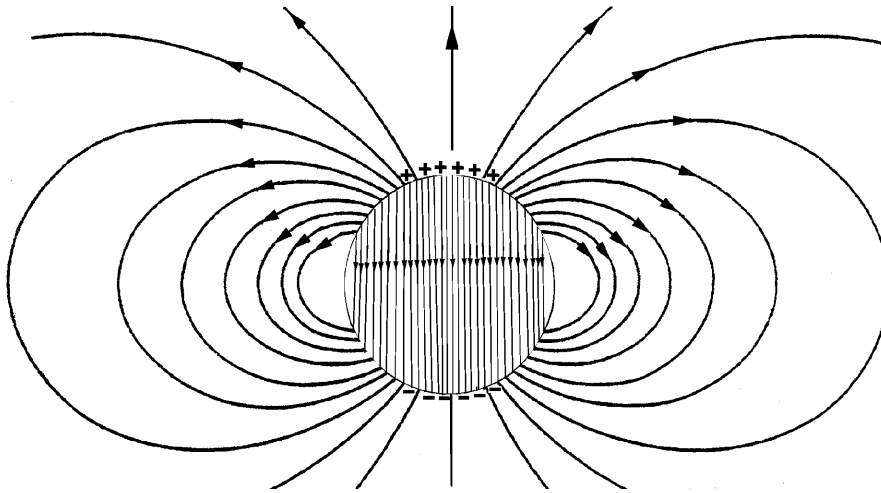
il campo generato da un dipolo di momento  $\mathbf{p} = \mathcal{V}\rho\mathbf{s}$  posto a metà strada tra i due centri, mentre il campo elettrico nella regione di sovrapposizione è uniforme e ha verso opposto a  $\mathbf{p}$ . Infatti, partendo dall'equazione 5) si vede che

$$\mathbf{E} = \rho \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}/2}{3\epsilon_0} - \rho \frac{\mathbf{r} + \mathbf{s}/2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho\mathbf{s}}{3\epsilon_0} = -\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0\mathcal{V}}$$

Ora pensiamo che  $\rho$  tenda all'infinito ed  $s$  tenda a zero, mantenendo fisso il raggio  $r_0$  ed il prodotto  $\rho\mathbf{s} = \mathbf{p}/\mathcal{V}$ , come mostrato in figura 17b). In tal caso

la densità di carica è nulla ovunque tranne che sulla superficie della sfera ed è ben descritta dalla densità superficiale di carica  $\sigma(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} / \mathcal{V}$ , dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale esterno. Il campo prodotto da tale distribuzione di carica è il campo di dipolo ideale esternamente alla sfera ed è uniforme all'interno, come mostrato in figura 18.

**Fig. 2.18**



Dunque possiamo enunciare il seguente risultato importante: **la carica distribuita sulla superficie di una sfera di volume  $\mathcal{V}$  con densità superficiale**

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{\mathcal{V}} \quad (2.10)$$

**produce all'interno un campo elettrico uniforme ed opposto a  $\mathbf{p}$ , dato da**

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0 \mathcal{V}} \quad \text{valida in ogni caso} \quad (2.11)$$

Questo risultato vale sia per sfere metalliche, sia per sfere dielettriche. In quest'ultimo caso il confronto dell'equazione 10) con l'equazione 1.14) mostra che  $\mathbf{p}/\mathcal{V}$  è il campo di polarizzazione  $\mathbf{P}$ , quindi l'equazione 11) può essere scritta nella forma

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{per sfere dielettriche} \quad (2.11')$$

Ad evitare malintesi anticipiamo che le sfere metalliche e dielettriche acquistano le distribuzioni di carica 10) quando sono stimolate da campi elettrici uniformi. In tali situazioni le equazioni 11) o 11') descrivono i campi di risposta, non i campi ELETTRICI.

## ESERCIZI

1) Due sfere di raggio  $10 \text{ cm}$  con centri separati da  $10^{-15} \text{ m}$  sono uniformemente cariche con densità  $10^8 \text{ C/m}^3$  e  $-10^8 \text{ C/m}^3$ . a) Descrivere una distribuzione di carica che produca lo stesso campo ovunque. b) Descrivere una distribuzione di carica più semplice che produca lo stesso campo nella regione esterna. c) Calcolare il campo elettrico entro le sfere. d) Mostrare che il potenziale è continuo in tutto lo spazio.

## 2.8 Molecole polari

Consideriamo un sistema complessivamente neutro composto da un numero più o meno grande di cariche puntiformi  $q_i$  ferme nei punti  $\mathbf{r}_i$ , e definiamo il momento di dipolo del sistema con l'equazione

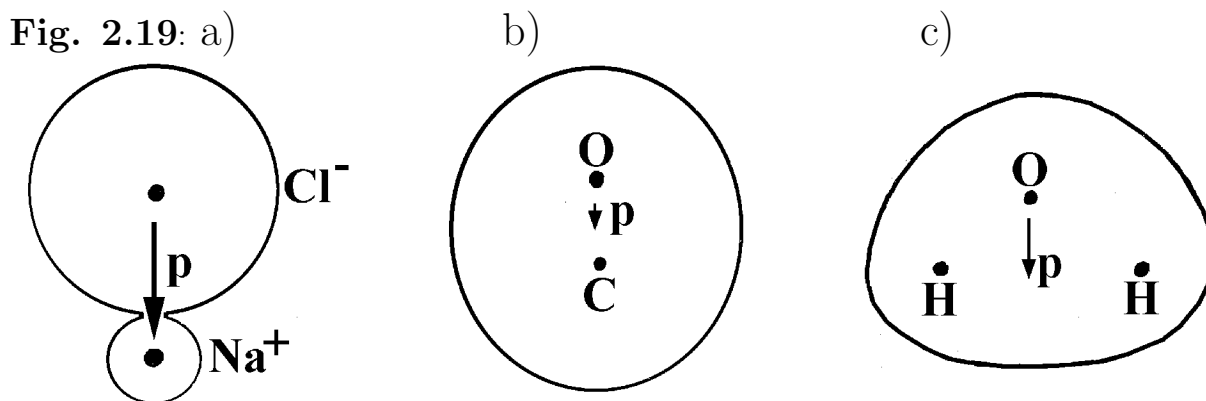
$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad (2.12)$$

A prima vista si può avere l'impressione che l'equazione 12) dia risultato dipendente dalla scelta dell'origine, ma non è così: **il momento di dipolo di un sistema neutro è una grandezza caratteristica del sistema.** Per dimostrarlo pensiamo di traslare l'origine dello spostamento  $\mathbf{a}$ , indichiamo con  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$  il vettore dalla nuova origine alla posizione dell' $i$ -esima carica, teniamo conto che  $Q = \sum_i q_i = 0$ , ed osserviamo che il "nuovo" momento di dipolo è uguale al "vecchio", infatti

$$\mathbf{p}' = \sum_i q_i \mathbf{r}'_i = \sum_i q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{p} - \mathbf{a} \sum_i q_i = \mathbf{p}$$

Le molecole che hanno distribuzioni di carica con momento di dipolo non nullo prendono il nome di **molecole polari**, ad esempio le molecole di ossido di carbonio ( $CO$ ), di acqua ( $H_2O$ ) e di cloruro di sodio ( $NaCl$ ) sono molecole polari con  $p = 0.02 e\text{\AA}$ ,  $p = 0.4 e\text{\AA}$  e  $p = 2.0 e\text{\AA}$  rispettivamente. Per tali molecole il **momento di dipolo built-in** gioca un ruolo importante, ad esempio è responsabile di gran parte delle straordinarie proprietà dell'acqua.

Naturalmente esistono anche molecole non polari, ad esempio sono non polari le molecole biatomiche omonucleari, come  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ , le molecole lineari con centro di inversione, come  $O - C - O$ , e le molecole con struttura tetraedrica, come  $CH_4$  e  $CCl_4$ . Per tali molecole i campi elettrici prodotti dalle distribuzioni di carica built-in diventano importanti solo nelle immediate vicinanze della nuvola elettronica. Per tale ragione limitiamo l'attenzione ai campi prodotti dalle molecole polari.



Abbiamo detto che il momento di dipolo di una molecola non dipende dalla scelta dell'origine ma, naturalmente, per descrivere il campo elettrico

dobbiamo centrare il dipolo rispetto alla distribuzione di carica della molecola. Come primo esempio consideriamo la molecola  $NaCl$  che, in prima approssimazione, può essere descritta come mostrato in figura 19a): la sferetta costituita dallo ione  $Na^+$  e la sferetta costituita dallo ione  $Cl^-$  sono separate dalla distanza  $s = 2.4 \text{ \AA}$ . Non possono allontanarsi perché sono legate dalla forza di attrazione coulombiana e non possono avvicinarsi di più per non violare un principio che Pauli ha posto alla base della fisica quantistica: il principio di esclusione. Noi ci accontentiamo di dire che i due ioni non entrano uno nell'altro per il principio di impenetrabilità dei corpi, versione arcaica del principio di esclusione di Pauli. Dal valore sperimentale della distanza tra i due ioni e dall'ipotesi che un intero elettrone sia passato dal sodio al cloro dovremmo aspettarci che la molecola  $NaCl$  abbia momento di dipolo built-in pari a  $p = 2.4 e\text{\AA}$ , ma questo valore supera del 20% il valore sperimentale. Dunque l'ipotesi che un elettrone si trasferisca dal sodio al cloro non è totalmente corretta: la carica centrata su ciascuno ione deve essere un po' minore della carica elementare. Comunque, ben all'esterno della nuvola di carica della molecola, il campo elettrico built-in è quello prodotto da un dipolo di momento  $p = 2.0 e\text{\AA}$  centrato a metà strada tra i due ioni ed orientato dal cloro al sodio.

Come secondo esempio consideriamo la molecola  $CO$  che ha momento di dipolo built-in  $p = 0.02 e\text{\AA}$ . Notando che tale valore è circa 100 volte minore di quello della molecola  $NaCl$ , sebbene la distanza  $C - O$  sia circa la metà della distanza  $Na - Cl$ , possiamo arguire che la nuvola di carica negativa avvolge i due core, come mostrato in figura 19b).

Per la molecola d'acqua, che ha la struttura mostrata in figura 19c), il campo elettrico built-in dipende anche dall'angolo di rotazione intorno all'asse dipolare, detto angolo azimutale, mentre l'approssimazione dipolare fornisce un campo invariante per rotazione intorno a tale asse. Tuttavia la differenza tra il campo complessivo ed il campo dipolare diventa trascurabile a grandi distanze.

## 2.9 Energia potenziale carica-dipolo e dipolo-dipolo

In questo paragrafo impariamo a calcolare l'energia potenziale di cariche e dipoli in interazione nel caso che le particelle interagenti siano **eletttricamente rigide**, ovvero quando le loro distribuzioni di carica non vengono modificate dall'interazione. In realtà è davvero così solo quando le particelle sono puntiformi.

In generale l'**energia potenziale**  $U(\mathbf{r})$  di un sistema centrato in  $\mathbf{r}$  è definita in modo che **la parte conservativa della forza agente sul sistema sia**

$$F(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

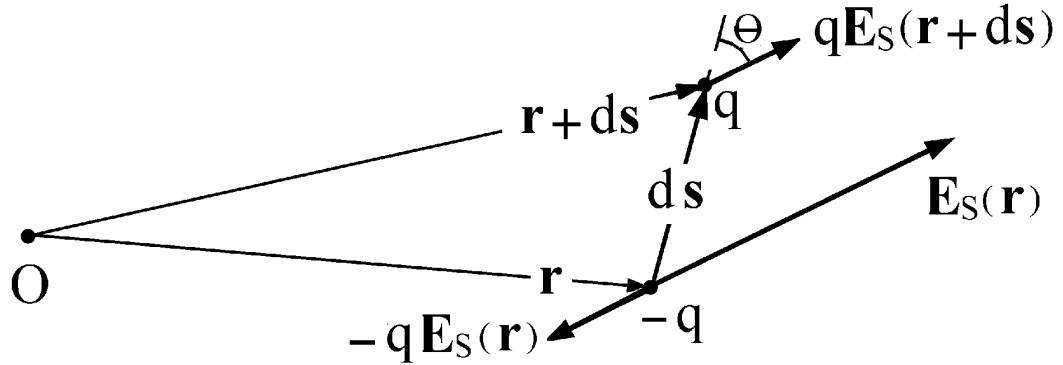


Quindi una carica puntiforme  $q$  stimolata dal campo  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_S(\mathbf{r})$  ha energia potenziale

$$U(\mathbf{r}) = q\phi_S(\mathbf{r}) \quad (2.14)$$

Basta prendere il gradiente e cambiare segno per convincersene.

**Fig. 2.20**



Ora, con riferimento alla figura 20, pensiamo che un dipolo, formato dalla carica  $-q$  posta in  $\mathbf{r}$  e dalla carica  $q$  posta in  $\mathbf{r} + d\mathbf{s}$ , sia stimolato dal campo  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_S(\mathbf{r})$ . In tal caso l'energia potenziale vale

$$U(\mathbf{r}) = q[\phi_S(\mathbf{r} + d\mathbf{s}) - \phi_S(\mathbf{r})] = qd\mathbf{s} \cdot \nabla\phi_S(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

e il momento della coppia agente sul dipolo risulta

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = -q\mathbf{r} \times \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r} + d\mathbf{s}) \times \mathbf{E}_S(\mathbf{r} + d\mathbf{s}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

Si noti che, quando il dipolo passa dalla condizione di equilibrio instabile ( $\theta = \pi$ ) a quella di equilibrio stabile ( $\theta = 0$ ) la coppia compie il lavoro  $\int_{\pi}^0 C(\mathbf{r})d\theta = \int_{\pi}^0 pE_S \sin\theta d\theta = 2pE_S$  e l'energia potenziale diminuisce della stessa quantità, come deve.

Infine pensiamo che i campi di stimolo siano generati da cariche o dipoli rigidi e studiamo le interazioni carica-carica, carica-dipolo e dipolo-dipolo.

• **Interazione carica-carica.** Quando la carica  $q$  posta in  $\mathbf{r}$  è stimolata dalla carica  $q'$  centrata nell'origine l'energia potenziale del sistema vale

$$U(r) = q\phi_S(\mathbf{r}) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.17)$$

e dipende solo dalla distanza  $r$  tra le due particelle.

• **Interazione carica-dipolo.** L'energia potenziale della carica nel campo creato dal dipolo si ottiene sostituendo l'equazione 8) nella 14) e risulta

$$U(\mathbf{r}) = q\phi_S(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \implies \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \quad (2.18)$$

D'altra parte, l'energia potenziale del dipolo nel campo creato dalla carica, data dall'equazione 15), risulta

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = -\frac{q\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \implies \mathbf{F}'(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \quad (2.18')$$

A prima vista può sembrare che le equazioni 18) e 18') diano energie potenziali opposte, ma non è così:  $\mathbf{r}$  è orientato dal dipolo alla carica nelle equazioni 18) e dalla carica al dipolo nelle equazioni 18'), quindi le energie potenziali della carica e del dipolo sono uguali. Invece le forze  $\mathbf{F}$  ed  $\mathbf{F}'$  agenti sulla carica e sul dipolo hanno davvero verso opposto perché la sostituzione di  $\mathbf{r}$  con  $-\mathbf{r}$  le lascia invariate. Dalla figura 21 si vede che, quando la carica  $q$  non è sull'asse dipolare, le due forze non hanno la stessa retta d'azione, formano una coppia di momento  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q \mathbf{r} \times \mathbf{p} / (4\pi\epsilon_0 r^3) = \mathbf{p} \times \mathbf{r} q / (4\pi\epsilon_0 r^3)$  che risulta opposto al momento  $\mathbf{C}$  della coppia agente sul dipolo, come dovevamo aspettarci, dato che non agiscono forze esterne al sistema carica-dipolo.

• **Interazione dipolo-dipolo.** Consideriamo due dipoli rigidi  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  separati dallo spostamento  $\mathbf{r}$ , come in figura 22, e pensiamo che  $\mathbf{p}_2$  sia stimolato dal campo prodotto da  $\mathbf{p}_1$ . Ricordando le equazioni 15) e 9) si vede immediatamente che l'energia potenziale dipolo-dipolo vale

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right) \quad \text{per dipoli rigidi} \quad (2.19)$$

La forza è attrattiva quando i dipoli giacciono su  $\mathbf{r}$  con verso concorde oppure quando sono perpendicolari ad  $\mathbf{r}$  con verso discorde, come nei casi a). Naturalmente la forza è repulsiva quando i dipoli giacciono su  $\mathbf{r}$  con verso discorde oppure quando sono perpendicolari ad  $\mathbf{r}$  con verso concorde, come nei casi b).

Fig. 2.21

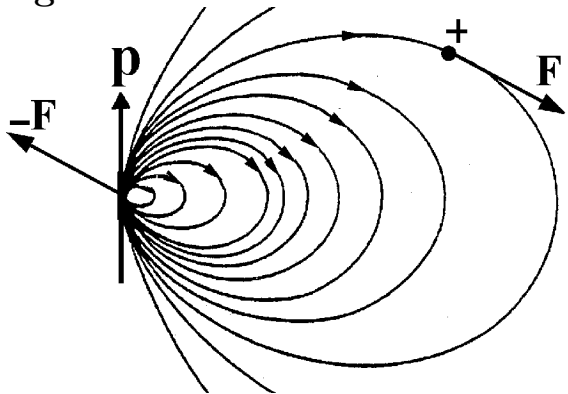
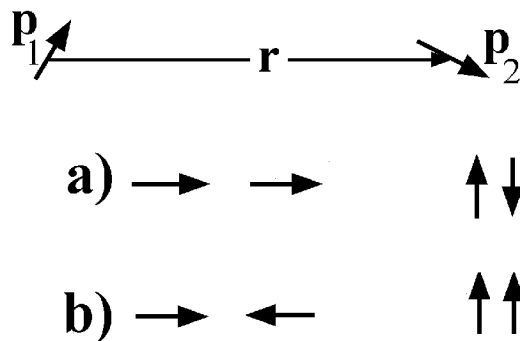


Fig. 2.22



## ESERCIZI

1) Su un dipolo con  $p = 1 \text{ e\AA}$  agisce un campo uniforme di intensità  $E_S = 10^8 \text{ V/m}$ . Calcolare il momento delle forze agenti e la differenza di energia potenziale tra le situazioni di equilibrio stabile ed instabile.

2) Due dipoli di momento  $1 \text{ e\AA}$  distano  $10 \text{ \AA}$ . Calcolare l'energia potenziale ed il momento agente su un dipolo quando i due dipoli sono: a) allineati e concordi, b) allineati e discordi, c) ortogonali.

# Capitolo 3

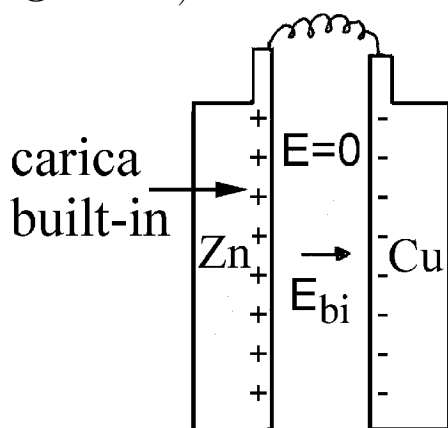
## Elettrostatica

In questo capitolo impariamo a produrre campi ELETTRICI mediante batterie, fili ed elettrodi metallici. Poi studiamo le interazioni di cariche e dipoli rigidi con palline metalliche e dielettriche e con molecole neutre.

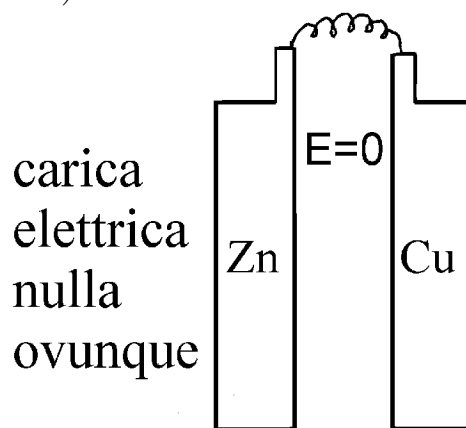
### 3.1 Pila di Volta, batterie, forza elettromotrice

La pila di Volta entra in uso all'alba dell'800 ed imprime un'improvvisa accelerazione alla ricerca perché consente di generare correnti e distribuzioni di carica stazionarie in modo riproducibile. In realtà le pile sono oggetti complicati ed ancor più complicati sono gli accumulatori. Le une e gli altri convertono parte dell'energia chimica di un insieme di reagenti in energia elettrica, ma le pile moderne sono oggetti "usa e getta" (in appositi contenitori), mentre gli accumulatori sono ricaricabili un gran numero di volte.

Fig. 3.1: a)



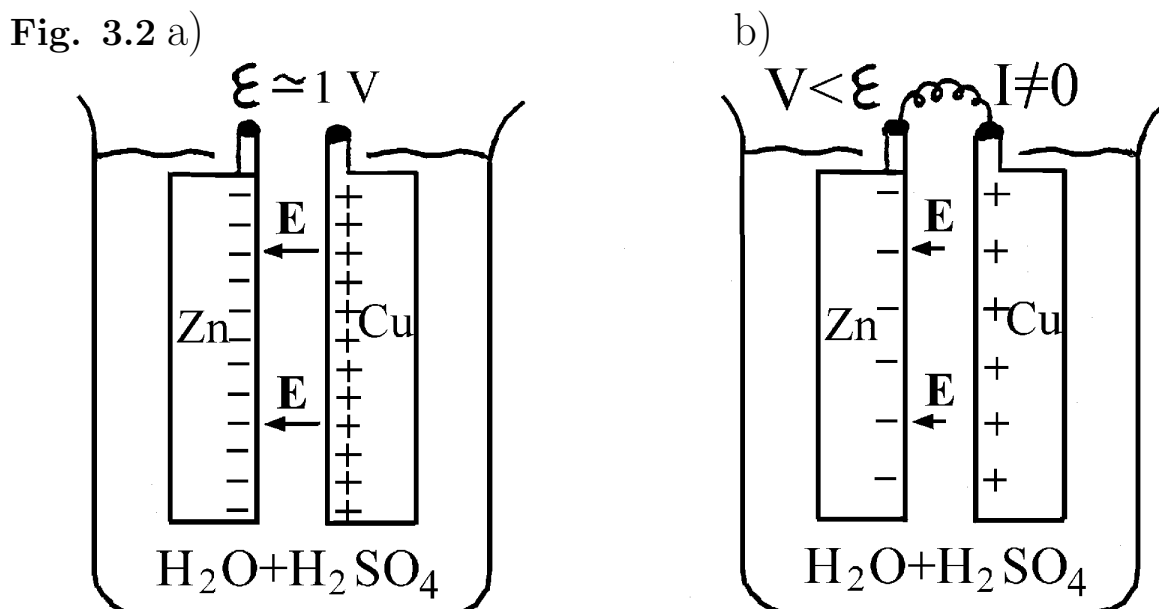
b)



Per capire il principio di funzionamento della pila di Volta consideriamo le solite lastre di zinco e di rame parallele, in aria o nel vuoto, collegate come mostrato in figura 1. Le cariche built-in, positiva sulla lastra di zinco e negativa su quella di rame, producono un campo elettrico built-in diretto dallo zinco al rame, tanto più intenso quanto più vicine sono le lastre. Ma il

sistema è rilassato, quindi la densità di carica  $\rho_e$  ed il campo ELETTRICO sono nulli ovunque, come mostrato in figura 1b).

Ora immergiamo il sistema in un bicchiere contenente una soluzione di acido solforico in acqua, dapprima con morsetti “aperti” come in figura 2a). Quasi istantaneamente ioni positivi di zinco passano dalla lastra alla soluzione e reagiscono con ioni solfato, liberando in soluzione ioni idrogeno. Di conseguenza la lastra di zinco si carica negativamente, quella di rame positivamente, e la soluzione diventa sede di un campo ELETTRICO diretto dal rame allo zinco, campo che contrasta il passaggio in soluzione di altri ioni positivi di zinco. A questo punto basta chiudere i morsetti sul filamento di una lampadina, come in b), per vedere che la lampadina si accende e per vedere bollicine di idrogeno (molecolare) formarsi sulla lastra di rame. Con qualche difficoltà le bollicine si staccano dalla lastra e bubbolano uscendo dalla soluzione. La corrente che fluisce nel filamento tende a rimuovere la carica



elettrica dalle lastre, facendo diminuire il campo ELETTRICO e consentendo il passaggio in soluzione di altri ioni positivi di zinco. Di conseguenza le cariche elettriche sulle lastre ed il campo ELETTRICO si stabilizzano a valori stazionari un po' minori di quelli presenti nel caso a), la lastra di zinco continua a sciogliersi e l'idrogeno continua a bubbolare sulla lastra di rame. In tale situazione seguiamo idealmente una carica  $dq$  positiva mentre percorrere un giro completo nel circuito. La carica entra in soluzione trasportata da ioni zinco, cambia cavallo in soluzione a seguito di reazioni chimiche e raggiunge la lastra di rame portata da ioni positivi di idrogeno. Questi, sebbene siano respinti con forza elettrostatica dalla lastra di rame, la raggiungono perché la loro concentrazione diminuisce mano a mano che si avvicinano alla lastra, dove l'idrogeno esce dal sistema. I gradienti di concentrazioni di ioni zinco in prossimità della lastra di zinco e di ioni idrogeno in prossimità della lastra di rame forniscono le forze diffusive che provvedono a traghettare la

carica da una lastra all'altra, consentendole di attraversare l'elettrolita in verso contrario a quello della forza ELETTRICA agente. La carica  $dq$  ritorna alla lastra di zinco percorrendo il filamento e, in tutto il percorso, dissipa energia per vincere gli attriti, energia che va a scaldare il sistema e l'ambiente circostante. Tuttavia **nel percorso completo il lavoro fatto dal campo ELETTRICO sulla carica è nullo** perché è nulla la circolazione di un qualunque campo elettrico stazionario, quindi l'energia necessaria a far circolare la carica deve essere fornita dalle reazioni chimiche che avvengono entro la pila. Qui l'analogia con il flusso di bambini su uno scivolo da parco giochi può aiutare a comprendere la situazione: la forza di gravità fa lavoro complessivo nullo sui bambini, ma i bambini circolano perché le reazioni chimiche che avvengono nel loro corpo forniscono l'energia necessaria. Tornando alla pila, indichiamo con  $U_{chim}(t)$  l'energia chimica disponibile al tempo  $t$ , indichiamo con  $U_{chim}(t + dt)$  l'energia chimica disponibile dopo il tempo  $dt$  impiegato dalla carica  $dq$  per fare un giro completo e definiamo la **forza elettromotrice**  $\mathcal{E}$  con l'equazione

$$U_{chim}(t) - U_{chim}(t + dt) = \mathcal{E}dq$$

Dividendo ambo i membri per  $dt$  e ricordando che  $dq/dt = I$  è la corrente elettrica erogata, vediamo che la potenza chimica erogata vale

$$W_{chim}(t) = \frac{U_{chim}(t) - U_{chim}(t + dt)}{dt} = \mathcal{E}I \quad (3.1)$$

Questa equazione vale anche per gli accumulatori, pur di intendere che  $I$  e  $W_{chim}$  sono positive in fase di scarica e negative in fase di ricarica.

Nel seguito diremo **batteria** per intendere un oggetto composto da accumulatori collegati in serie o in parallelo. La forza elettromotrice delle batterie dipende un po' dalla temperatura e varia un po' nel tempo perché i reagenti si consumano. Ma, in prima approssimazione, la forza elettromotrice rimane costante fino a quando la batteria ha un residuo di carica.

Infine, ad evitare malintesi, sottolineiamo che **la forza elettromotrice non è una forza: ha le dimensioni di energia/carica**.

## 3.2 Tensione, potenza elettrica

In generale un campo ELETTRICO non nullo può essere presente solo in sistemi non rilassati. Ad esempio quando un protone stimola una pallina metallica neutra il campo ELETTRICO è la sovrapposizione del campo elettrico di stimolo generato dal protone e del campo elettrico di risposta generato dalla pallina. Altri esempi sono i campi ELETTRICI che si formano nelle giunzioni  $p - n$  esposte alla radiazione solare, nelle termocoppie con giunzioni a temperature diverse, nei cristalli piezoelettrici sottoposti a

compressione e nelle macchine elettrostatiche sottoposte a strofinio. Quando il sistema stimolato raggiunge condizioni stazionarie, come nei casi considerati in figura 2, la distribuzione di carica elettrica è stazionaria ed il campo ELETTRICO ha circolazione nulla, quindi è individuato da un potenziale scalare. Per evitare di confondere tale potenziale con i potenziali built-in, di stimolo e di risposta, si usa attribuirgli un nome ed un simbolo particolari, si dice che è la **tensione**  $V(\mathbf{r})$  e si scrive

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

intendendo che  $V(\mathbf{r})$  è la somma dei potenziali di stimolo e di risposta.

Ora, consideriamo nuovamente la carica  $dq$  positiva che percorre il circuito di figura 2b) nel tempo  $dt$ , ma limitiamo l'attenzione ad un percorso dal morsetto positivo a quello negativo nella parte esterna del circuito. L'integrale di linea del campo ELETTRICO lungo tale percorso è la (differenza di) tensione ai morsetti e viene indicata con il simbolo  $V$ . Il prodotto  $Vdq$  è l'integrale di percorso della forza ELETTRICA nel circuito esterno, quindi è l'**energia elettrica** erogata. La grandezza

$$W = Vdq/dt = VI \quad (3.3)$$

è la **potenza elettrica** erogata. La differenza tra la potenza chimica  $\mathcal{E}I$  e la potenza elettrica  $VI$  è la potenza dissipata entro la batteria. Per  $V = \mathcal{E}$  la corrente è nulla, come nel caso di figura 2a), per  $V < \mathcal{E}$  la batteria eroga corrente e le reazioni erogano energia, come nel caso di figura 2b), per  $V > \mathcal{E}$  la batteria assorbe corrente e le reazioni assorbono energia. Si noti che la differenza  $\mathcal{E} - V$  è positiva quando  $I$  è positiva ed è negativa quando  $I$  è negativa, quindi la grandezza  $R_i = (\mathcal{E} - V)/I$ , detta **resistenza interna**, è sempre positiva. Il suo valore dipende dalle condizioni di lavoro, ma nel seguito penseremo che rimanga costante per tutto il processo di scarica e che diventi molto grande solo quando la batteria è scarica.

Insomma, una batteria è descritta da tre parametri: la forza elettromotrice  $\mathcal{E}$ , l'energia chimica accumulabile  $U_{chim}$  e la resistenza interna  $R_i$ . Il rapporto  $Q = U_{chim}/\mathcal{E}$  è la carica elettrica erogabile. Ad esempio le batterie per autovetture hanno valori tipici  $\mathcal{E} \approx 12 V$ ,  $Q \approx 100 Ah$  e  $R_i \approx 0.1 \Omega$ . L'unità di misura  $\Omega$  (leggi ohm) equivale a  $V/A$ .

## ESERCIZI

1) Una batteria per radioline con  $\mathcal{E} = 9 V$  ha energia chimica di  $1 kJ$  ed eroga la corrente  $I = 5 mA$  con tensione ai morsetti  $V = 8 V$ . a) Quanto vale la resistenza interna? b) Quale potenza viene dissipata entro la batteria? c) Per quanto tempo la batteria eroga corrente?

2) Una batteria con  $\mathcal{E} = 1.2 V$  viene caricata con tensione ai morsetti di  $1.3 V$  ed acquista l'energia chimica di  $1 kJ$  in 4 ore. a) Quale energia

elettrica è stata fornita? b) Quale resistenza interna ha la batteria in fase di carica? c) Quale energia viene dissipata nella batteria?

3) Una batteria per autovetture con  $\mathcal{E} = 12 V$  ha una “capacità di scarica” di  $100 Ah$  e può erogare una potenza elettrica non maggiore di  $1 kW$ . a) Quale energia chimica è accumulata nella batteria ben carica? b) Quale resistenza interna ha la batteria? c) Quanto tempo occorre per ricaricare la batteria con tensione ai morsetti di  $13 V$ ?

### 3.3 Legge di Gauss, legge di Ohm locale

Abbiamo detto che la legge di conservazione della carica vale in generale, ora diciamo che vale in generale anche la

$$\text{legge di Gauss} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \rho_e(t, \mathbf{r})/\epsilon_0 \quad (3.4)$$

dove  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  è il campo ELETTRICO. Rispetto alla legge di Gauss elettrostatica abbiamo introdotto due modifiche. La prima è banale: abbiamo sottratto la densità di carica built-in al secondo membro ed il campo elettrico built-in al primo, consistentemente con la convenzione che il campo ELETTRICO sia nullo in condizioni rilassate. La seconda modifica ha importanza fondamentale: abbiamo messo in evidenza che **la legge di Gauss vale anche quando la densità di carica ed il campo ELETTRICO dipendono dal tempo**. In altre parole: **la legge di Gauss 4) vale qualunque sia lo stato di moto delle cariche che creano il campo**. È così perché nessun esperimento lo ha mai smentito.

A questo punto introduciamo un'approssimazione che, in sostanza, identifica il campo ELETTRICO nei materiali conduttori con la densità di corrente di conduzione. Si tratta della

$$\text{legge di Ohm locale} \quad \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) = g\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (3.5)$$

La grandezza  $g$ , misurata in  $A/(Vm) = (\Omega m)^{-1}$ , è la **conducibilità elettrica** del conduttore; la grandezza  $1/g$  è la **resistività elettrica** e, naturalmente, è misurata in  $\Omega m$ . Per alcuni conduttori particolari può essere necessario modificare l'equazione 5) per consentire a  $\mathbf{j}_f$  di non essere nel verso di  $\mathbf{E}$ , pur continuando ad essere legata ad  $\mathbf{E}$  da una relazione lineare ed omogenea. Ma, per semplicità, limitiamo l'attenzione alla classe dei conduttori Lineari, Omogenei ed Isotropi (LOI) definita dall'equazione 5). Naturalmente **l'ipotesi che il conduttore sia omogeneo, ovvero che  $g$  non dipenda dalla posizione, cade alle interfacce tra materiali diversi, quindi le interfacce dovranno essere considerate a parte**.

Si noti che la legge di Ohm locale non ha la generalità delle leggi di conservazione della carica e di Gauss, ad esempio non vale nei gas, vale esattamente solo in un materiale ideale, il conduttore ohmico perfetto. Ma ammettiamo

che un tale materiale esista e che abbia conducibilità  $g \approx 10^7 (\Omega m)^{-1}$ , valore tipico per i metalli. Prendendo la divergenza di ambo i membri della legge di Ohm locale, tenendo conto delle leggi di conservazione della carica e di Gauss e ricordando che  $\rho_e = \rho_f$  nel conduttore perfetto, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \rho_f(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{g}{\epsilon_0} \rho_f(t, \mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \frac{g}{\epsilon_0} \approx 10^{18} \text{ s}^{-1}$$

Pertanto, indicata con  $\rho_f(0, \mathbf{r})$  la densità di carica elettrica al tempo zero nel generico punto  $\mathbf{r}$  interno al conduttore, possiamo calcolare la densità di carica elettrica nello stesso punto al tempo  $t$  con l'equazione

$$\rho_f(t, \mathbf{r}) = \rho_f(0, \mathbf{r}) e^{-gt/\epsilon_0}$$

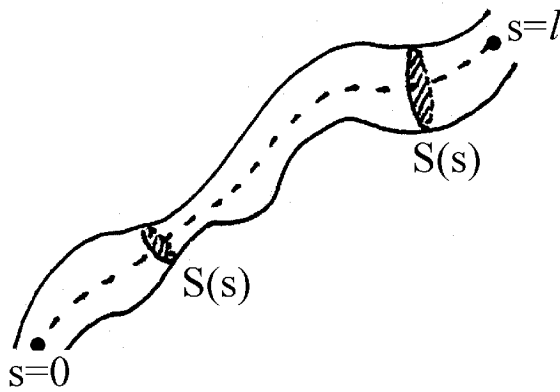
Ma  $g/\epsilon_0$  è dell'ordine di  $10^{18} \text{ s}^{-1}$ , quindi le eventuali deviazioni dalle condizioni di neutralità di carica nei punti interni ai conduttori decadono con estrema rapidità, ad esempio decadono di un fattore  $e^{10} \approx 22000$  in  $10^{-17} \text{ s}$ ! Ciò comporta che, in assenza di stimoli di frequenza ben maggiore delle frequenze ottiche, possiamo essere certi che i conduttori sono neutri al loro interno. Naturalmente la densità di carica built-in è certamente positiva entro i nuclei e negativa altrove, ma insistiamo: **la densità di carica elettrica entro un conduttore ohmico perfetto è nulla anche quando sono presenti correnti molto intense ed anche quando il conduttore è stimolato da campi a frequenze ottiche.** Dunque i conduttori possono essere carichi solo sulle interfacce dove la conducibilità  $g$  passa dal valore interno a zero e  $\nabla \cdot (g\mathbf{E})$  non si riduce a  $g\nabla \cdot \mathbf{E} = (g/\epsilon_0)\rho_f$ .

Uno dei migliori conduttori forniti dalla natura è il rame, diciamo che è il migliore per rapporto qualità-prezzo. La sua conducibilità elettrica vale  $g \approx 6 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$  a temperatura ambiente e diminuisce un po' all'aumentare della temperatura. Naturalmente anche il rame non è perfetto: quando viene stimolato da campi elettrici variabili con frequenza nella banda ottica, pur rimanendo neutro al suo interno, diventa sede anche di correnti di polarizzazione dei core ionici, correnti che, per inciso, conferiscono al rame il colore caratteristico. Ma per campi variabili con frequenze ben minori di quelle della banda visibile possiamo ammettere che  $\mathbf{j}_b$  sia nulla nel rame e possiamo confondere  $\mathbf{j}_e$  con  $\mathbf{j}_f$ . Inoltre le correnti "magnetiche" nel rame sono trascurabili, quindi l'intera  $\mathbf{j}$  può essere confusa con  $\mathbf{j}_f$ . Insomma, in elettrotecnica e radiotecnica **il rame è un conduttore ohmico perfetto non magnetico.** Al suo interno la densità di carica elettrica è nulla anche in presenza di correnti molto intense.

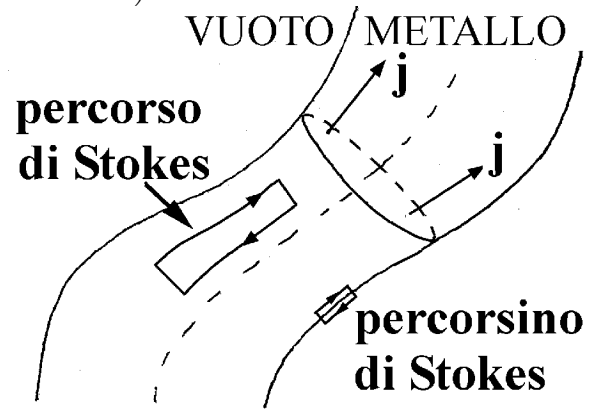
Ora consideriamo un filo di rame fermo e scegliamo la coordinata curvilinea  $s$  lungo l'asse, come mostrato in figura 3a). Il filo ha sezione trasversa di area  $S(s)$ , lunghezza  $l$  ed è percorso da una corrente  $I$  stazionaria. Domandiamo: come è distribuita la corrente nel filo? Per rispondere consideriamo



Fig. 3.3: a)



b)



il percorso di Stokes in figura 3b), formato da due tratti di linee di flusso contigue congiunti da due trattini ortogonali a  $\mathbf{j}$ . In condizioni stazionarie la circolazione di  $\mathbf{E}$  lungo il percorso è nulla, quindi  $\mathbf{E}$  è uniforme su una data sezione del conduttore. Ma il percorso è interno al conduttore, quindi la legge di Ohm locale vale in ogni suo punto e ciò comporta che anche  $\mathbf{j}$  è uniforme su una data sezione. Di conseguenza la densità di corrente  $j(s)$  è legata all'area  $S(s)$  della sezione trasversa dalla relazione  $j(s) = I/S(s)$ .

Ora notiamo che la (differenza di) tensione ai capi del filo vale

$$V = \int_0^l E(s) ds = \frac{1}{g} \int_0^l j(s) ds = \frac{1}{g} \int_0^l \frac{I}{S(s)} ds = \frac{I}{g} \int_0^l \frac{ds}{S(s)}$$

e risulta legata alla corrente dalla **legge di Ohm**

$$V = RI \quad \text{dove} \quad R = \frac{1}{g} \int_0^l \frac{ds}{S(s)} \quad (3.6)$$

La grandezza  $R$  è la **resistenza** (in continua) del filo e si riduce a  $l/gS$  quando il filo ha sezione uniforme. Ad esempio, **un filo di rame di sezione  $1 \text{ mm}^2$ , lungo  $60 \text{ m}$ , ha resistenza  $R = 1 \Omega$** . Ad evitare malintesi ribadiamo che le equazioni 6) valgono quando la corrente non dipende dal tempo; in un filo percorso da corrente alternata il rotore di  $\mathbf{E}$  non è nullo, la corrente non è distribuita uniformemente nella sezione del filo e la resistenza dipende dalla frequenza anche quando  $g$  non ne dipende. Per tale ragione **la legge di Ohm locale ha portata molto più vasta della legge di Ohm**.

Infine anticipiamo che, anche quando il campo ELETTRICO dipende dal tempo, la circolazione di  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  lungo il percorsino di Stokes a cavallo dell'interfaccia considerato in figura 3b) è nulla, quindi la proiezione del campo ELETTRICO sull'interfaccia si conserva sempre nel passare dal metallo al vuoto. Invece la proiezione del campo ELETTRICO sulla normale varia di  $\sigma_f(t, \mathbf{r})/\epsilon_0$  nel passare dal metallo al vuoto; lo si vede considerando un volumetto gaussiano a cavallo dell'interfaccia e ricordando la legge di Gauss.

### ESERCIZI

1)  $100 \text{ m}$  di filo di rame di diametro  $0.5 \text{ mm}$  sono in serie a  $400 \text{ m}$  di filo di rame di diametro  $1 \text{ mm}$ . Gli estremi della serie sono collegati ad una

batteria da  $\mathcal{E} = 12 V$ ,  $R_i = 0.1 \Omega$ . a) Quale corrente passa? b) Quali campi ELETTRICI agiscono entro i due fili? c) Quali campi ELETTRICI agiscono nel vuoto, quasi a contatto con i fili?

2) I pezzi di filo dell'esercizio 2) sono collegati in parallelo ai morsetti della batteria. a) Quale corrente eroga la batteria? b) Quali campi ELETTRICI agiscono nei due fili? c) Quali campi ELETTRICI agiscono nel vuoto, quasi a contatto con i fili?

3) Valutare la derivata temporale di  $\sigma_f$  sull'interfaccia conduttore-vuoto quando: a)  $\mathbf{j}_f$  è normale all'interfaccia, b)  $\mathbf{j}_f$  è parallelo all'interfaccia.

4) Un filo di rame di diametro  $1 \text{ mm}$ , percorso dalla corrente di  $10 A$ , è carico in superficie con densità  $\sigma_f = 10^{-13} \text{ C/m}^2$ . Quale angolo forma con l'interfaccia il campo ELETTRICO nel vuoto quasi a contatto con il filo?

### 3.4 Gabbia di Faraday, massa

Con riferimento alla figura 4, immaginiamo che il nostro laboratorio sia un container metallico appoggiato su supporti isolanti. E pensiamo che, mentre noi facciamo esperimenti, qualcuno all'esterno colleghi un generatore da

Fig. 3.4

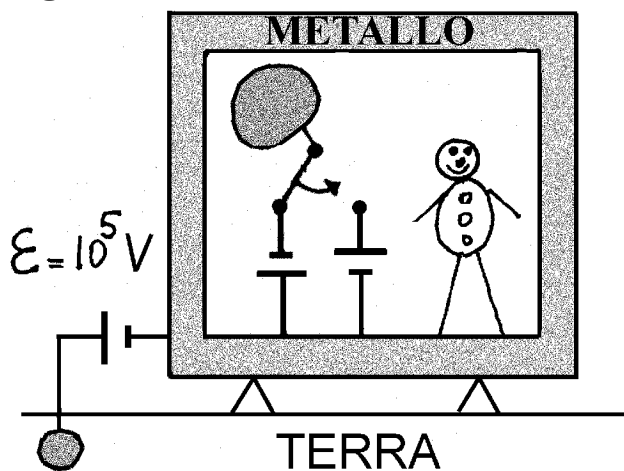
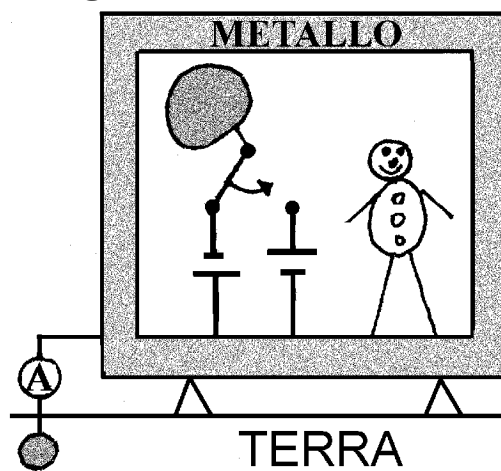


Fig. 3.5



$10^5 V$  tra il container ed una regione del sottosuolo ben conduttrice. Scariche e lampi investono il container all'esterno e la tensione subisce sbalzi spaventosi. Tuttavia noi non ce ne accorgiamo: nulla cambia entro il container! Lo spazio interno è perfettamente schermato dagli stimoli elettrici applicati all'esterno. Ma non è consigliabile provare ad uscire, sarebbe fatale! Immaginiamo ora la situazione mostrata in figura 5: un amperometro sensibilissimo è collegato tra il container e un conduttore immerso nel terreno umido, nel tentativo di misurare la corrente che i nostri esperimenti scaricano sulla Terra. Ma, anche quando i nostri generatori lanciano correnti intensissime dai conduttori sospesi verso il pavimento, l'amperometro esterno non misura corrente. Questi fatti sono conseguenza diretta della legge di

Coulomb, ovvero del fatto che la tensione elettrostatica soddisfa l'equazione di Poisson. Per convincercene consideriamo la situazione descritta in figura 6: un blocco metallico di qualunque forma è alimentato da un qualunque generatore di tensione, il blocco contiene una cavità e questa contiene una carica  $Q$  ferma in un qualsiasi punto. La situazione è elettrostatica, quindi il campo ELETTRICO entro il conduttore è nullo, ed è nullo il suo flusso attraverso la superficie tratteggiata. Ma tale superficie può essere portata quasi a contatto con la parete interna della cavità, quindi una carica  $-Q$  deve essere distribuita su tale parete. Oppure la superficie tratteggiata può essere portata quasi a contatto con la superficie esterna del conduttore, quindi il volume interno alla superficie esterna, cavità compresa, ha carica totale nulla in qualunque situazione. Sottolineiamo anche che, **quando la cavità non contiene cariche, tutto il volume racchiuso della superficie esterna, cavità compresa, deve avere tensione uniforme  $V = \mathcal{E}$** . Se non fosse così la tensione avrebbe almeno un massimo o un minimo all'interno della cavità e l'ipotesi che questa non contenga cariche sarebbe contraddetta, infatti in punti di tensione massima (o minima) il campo ELETTRICO non può avere divergenza nulla. Naturalmente sulla superficie esterna può esservi tutta la carica che il generatore di tensione riesce a trasferirvi dalla terra: la carica si distribuisce sulla superficie esterna in modo da lasciare inalterato l'eventuale campo ELETTRICO generato dalle cariche distribuite all'interno. Insomma **l'involucro metallico scherma la regione interna dagli stimoli elettrici esterni, e scherma l'ambiente esterno dagli stimoli elettrici interni**. Ciò era già noto nel 1755: Franklin aveva sospeso un pendolino carico entro una scatola d'argento ed aveva constatato che qualunque stimolo elettrico esterno lasciava indifferente il pendolino. Partendo da questo esperimento Priestley aveva intuito che le forze elettrostatiche decadono con il quadrato della distanza come le forze gravitazionali.

Fig. 3.6

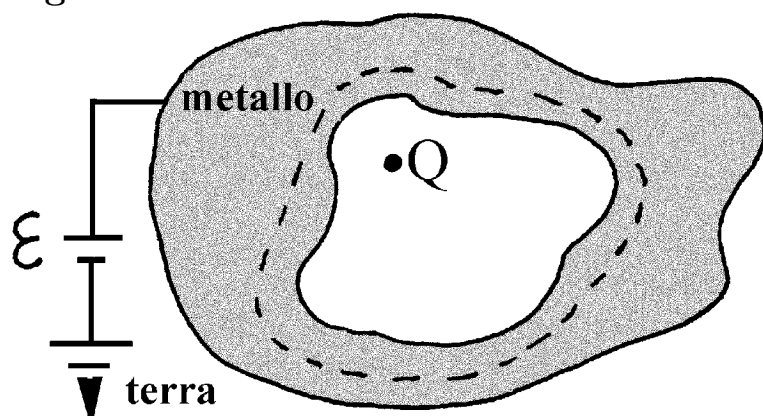
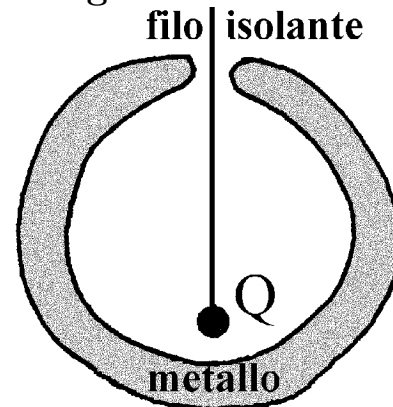


Fig. 3.7



Ora, con riferimento alla figura 7, consideriamo un involucro metallico neutro, isolato e vuoto, e pensiamo di introdurre una carica  $Q$ . Dovunque sia posta  $Q$ , l'operazione comporta che una carica uguale si distribuisce sulla superficie esterna, infatti la parete interna acquista carica  $-Q$  e quella

esterna acquista carica  $Q$  per conservare la neutralità dell'involucro. Si noti anche che la distribuzione di carica esterna non cambia quando la carica va a toccare la parete della cavità. Dunque, quando consideriamo lo spazio esterno al conduttore, non dobbiamo precisare come sia distribuita la carica nelle eventuali cavità interne: la carica distribuita sulla superficie esterna è proprio la carica totale. Ciò vale anche per oggetti cavi di qualunque materiale e qualunque forma ricoperti da uno strato metallico anche estremamente sottile: **la carica si distribuisce sulla superficie esterna in modo dipendente dalla geometria e dalla distribuzione di corpi all'esterno, ma indipendente dalla distribuzione delle cariche interne.**

Un laboratorio con pareti conduttrici è uno strumento sperimentale e concettuale di straordinaria importanza e prende il nome di **gabbia di Faraday**. Le sue pareti interne sono un magazzino capace di fornire o di ricevere quantità illimitate di carica rimanendo a tensione costante, diciamo che costituiscono la **massa** del laboratorio e, **d'ora in avanti, conveniamo che la tensione di massa sia nulla.** Entro il laboratorio, gli involucri metallici dei vari strumenti sono altre gabbie di Faraday, possono essere collegati a massa oppure possono essere "sollevati" in tensione mediante batterie, senza che i campi elettrici interni a ciascuno siano alterati. Possiamo anche rendere concreto il mitico infinito al quale attribuiamo tensione nulla identificandolo con la parete interna di un'enorme gabbia di Faraday ideale. Ad esempio possiamo idealizzare il processo di carica di un conduttore pensando di trasferirvi carica dalla massa posta all'infinito. Ma in tal caso non dobbiamo dimenticare che la massa esiste, se lo facessimo cadremmo in contraddizione con la legge di conservazione della carica. Si noti anche che il cavo che collega la gabbia di Faraday al suolo non gioca alcun ruolo per un osservatore interno e può essere tagliato senza alterare la situazione entro la gabbia. Ad esempio in una capsula spaziale con pareti metalliche la superficie interna agisce come una massa perfetta.

Concludiamo con una nota di cautela. In condizioni elettrodinamiche può avvenire che gli spostamenti delle cariche nel conduttore non siano sufficientemente veloci da schermare istantaneamente gli stimoli. Ad esempio i raggi X prodotti decelerando molto bruscamente un fascio di elettroni all'interno o all'esterno della cavità possono attraversare le pareti metalliche.

### 3.5 Capacità di un conduttore, condensatori

Con riferimento alla figura 8, pensiamo che una gabbia di Faraday contenga conduttori nel vuoto e fissiamo l'attenzione su un particolare conduttore isolato dagli altri. Pensiamo che una batteria di forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  sia inserita tra il conduttore e la massa e domandiamo: quale carica è presente sul conduttore? Al termine della fase transitoria le correnti ed i campi

Fig. 3.8

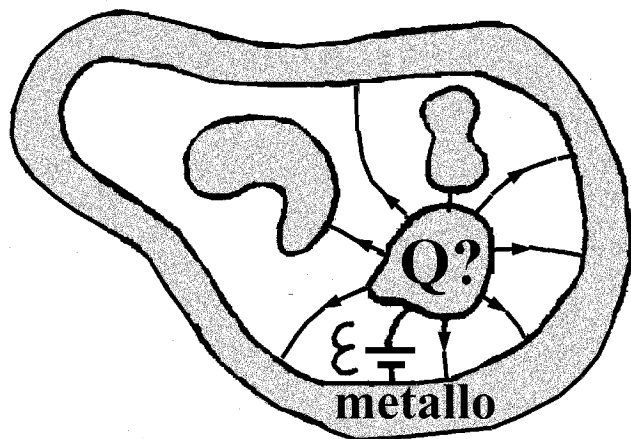
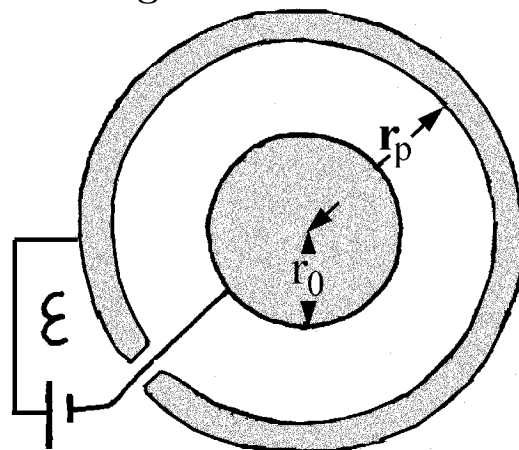


Fig. 3.9



ELETTRICI nei conduttori e nei cavi di collegamento diventano nulli, il conduttore raggiunge tensione  $V = \mathcal{E}$  e lo spazio interno alla gabbia ed esterno ai conduttori è riempito da un campo ELETTRICO stazionario. È ragionevole pensare che la carica  $Q$  prelevata dalla massa e trasferita al conduttore dipenda dalla forma e dalle dimensioni del conduttore, dalla sua posizione rispetto alle pareti, dalle posizioni degli altri corpi presenti entro la gabbia e dalle loro cariche. In ogni caso diremo che la **capacità** del conduttore nella particolare situazione vale  $C = Q/V$ . Per dire di più dobbiamo precisare i dettagli. Per ora consideriamo la situazione in figura 9: una sfera metallica di raggio  $r_0$  posta al centro di un pallone metallico di raggio interno  $r_p$ . Nell'intercapedine tra la sfera ed il pallone il campo ELETTRICO dipende dalla carica  $Q$  presente sulla sfera e vale

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Quindi il suo integrale di linea dalla sfera al pallone risulta

$$V = Q \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_p} \right] = r_0 E(r_0) - r_p E(r_p)$$

Partendo da questo risultato e facendo tendere  $r_p$  all'infinito, vediamo che la **capacità di una sfera nel vuoto** vale

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_0 \quad (3.7)$$

e vediamo che **il campo elettrico sulla superficie della sfera** vale

$$E(r_0) = \frac{V}{r_0} \quad (3.8)$$

Invece, nel caso che il pallone abbia raggio  $r_p = r_0 + h$  con  $h$  piccolissimo rispetto ad  $r_0$ , la tensione è legata alla carica dalla relazione

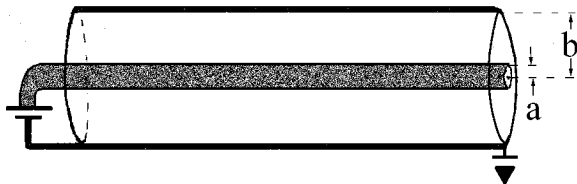
$$V = Q \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (r_0 + h)} \right] = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = \frac{Qh}{\epsilon_0 S}$$

dove  $S$  è l'area di una delle superfici affacciate (**armature**). Quindi il condensatore ha capacità

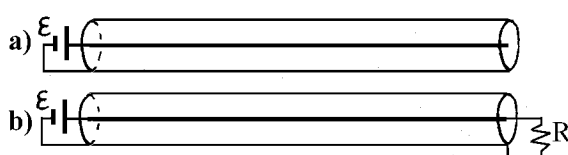
$$C = \epsilon_0 \frac{S}{h} \quad (3.9)$$

Infine consideriamo il condensatore cilindrico mostrato in figura 10. Un cilindro metallico di raggio  $a$  ed un tubo metallico di raggio interno  $b$  sono coassiali e hanno lunghezza  $l$  ben maggiore di  $b$ . Il tubo è a massa ed il

**Fig. 3.10**



**Fig. 3.11**



conduttore interno ha tensione  $V$ . Per calcolare la carica  $Q$  sulle armature e la capacità del condensatore trascuriamo gli effetti di bordo e partiamo dai risultati del paragrafo 2.5. Nella regione compresa tra le armature il campo ELETTRICO vale

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

dove  $\lambda = Q/l$  è la densità lineare di carica sul conduttore interno. Quindi la tensione tra le armature vale

$$V = \int_a^b E(R) dR = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dR}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

e la **capacità del condensatore cilindrico** risulta

$$C = \frac{l\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)} \quad (3.10)$$

Si noti anche che la tensione dipende da  $R$  con l'andamento

$$V(R) = V - \int_a^R E(R') dR' = V - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(R/a) = V \left( 1 - \frac{\ln(R/a)}{\ln(b/a)} \right)$$

Lasciamo per esercizio di descrivere  $V(R)$  nel caso che il tubo sia a tensione  $V$  ed il conduttore interno sia a massa.

### ESERCIZI

- 1) Calcolare le capacità della Terra e del Sole.
- 2) Due lastre metalliche parallele di sezione  $10 \times 10 \text{ cm}^2$ , distanti  $1 \text{ mm}$ , sono alimentate con  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ . Calcolare: a) il campo ELETTRICO, b) la carica sulle armature, c) la capacità del condensatore.
- 3) Con riferimento alla figura 11, consideriamo un pezzo di cavo coassiale lungo  $100 \text{ m}$  con conduttore interno di diametro  $1 \text{ mm}$  e guaina metallica di diametro interno  $5 \text{ mm}$  e spessore  $0.1 \text{ mm}$ . L'intercapedine è vuota. Ad

un estremo i due conduttori sono collegati ai morsetti di una batteria da  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$  e resistenza interna  $R_i = 1 \text{ } \Omega$ . Nel caso che il cavo sia aperto all'altro estremo, come in a), calcolare: a) la carica accumulata su ciascuna armatura, b) la capacità del cavo, c) la "capacità per unità di lunghezza". Nel caso che il secondo estremo sia chiuso su una resistenza da  $20 \text{ } \Omega$ , come in figura 11b), calcolare: d) la corrente, e) la carica su ciascun conduttore, f) la capacità del sistema.

### 3.6 Campo di spostamento elettrico $\mathbf{D}$

Consideriamo un generico sistema stimolato in un qualunque modo e pensiamo che sia composto da materiali vari, anche non lineari, inomogenei ed anisotropi. In ciascun materiale scomponiamo la densità di carica  $\rho_e$  nei contributi di conduzione e di polarizzazione  $\rho_f$  e  $\rho_b$ , ammettendo di saperli descrivere in ogni dettaglio. Poi ricordiamo che

$$\rho_b(t, \mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r})$$

e riscriviamo la legge di Gauss per il campo ELETTRICO nella forma

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) + \rho_f(t, \mathbf{r}) \implies \nabla \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{r})] = \rho_f(t, \mathbf{r})$$

A questo punto conviene dare un nome ed un simbolo al campo in parentesi quadra: diciamo che è il **campo di spostamento elettrico**

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \quad (3.11)$$

riservandoci di giustificare il nome nel seguito. Con questa definizione la legge di Gauss diventa una delle equazioni poste da Maxwell alla base della teoria elettromagnetica, la

$$\mathbf{I} \text{ equazione di Maxwell} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \rho_f(t, \mathbf{r}) \quad (3.12)$$

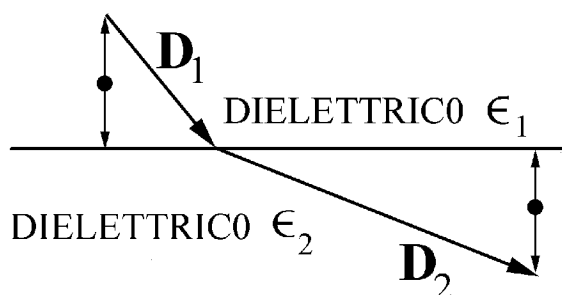
Il significato fisico ed i meriti del campo  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  emergeranno soprattutto quando considereremo gli aspetti energetici dell'elettromagnetismo, per ora sottolineiamo i seguenti punti importanti.

• **Il campo  $\mathbf{D}$  coincide con  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  sia nel vuoto, sia nei conduttori perfetti, dove  $\mathbf{P}$  è nullo.** Nelle regioni interne ai conduttori  $\mathbf{E} = g\mathbf{j}_f$  e  $\mathbf{D} = \epsilon_0 g\mathbf{j}_f$ , quindi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  sono nulli in assenza di correnti di conduzione.

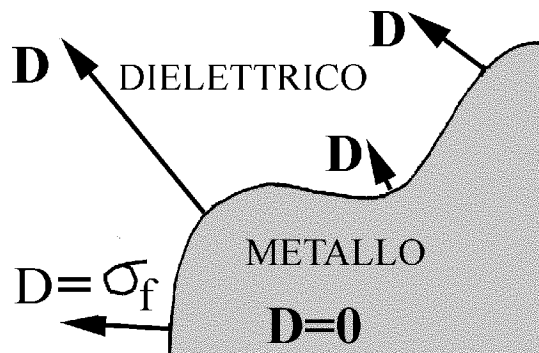
• **La divergenza di  $\mathbf{D}$  è null'altro che la densità di carica di conduzione ed è nulla nei dielettrici perfetti, anche alle interfacce tra dielettrici perfetti diversi.** Quindi le proiezioni di  $\mathbf{D}$  sulla normale all'interfaccia tra due dielettrici perfetti sono uguali dalle due parti, come mostrato in figura 12a).

- La proiezione di  $\mathbf{D}$  sulla normale all'interfaccia tra un metallo ed un dielettrico fa un salto pari a  $\sigma_f(t, \mathbf{r})$  nel passare dal metallo al dielettrico, qualunque sia  $\sigma_b(t, \mathbf{r})$ . In particolare, quando il metallo non è percorso da corrente il campo  $\mathbf{D}$  nel dielettrico è normale all'interfaccia, con intensità  $\sigma_f(\mathbf{r})$ , come mostrato in figura 12b).

Fig. 3.12: a)



b)



- Quanto detto finora vale in generale: in ogni caso lo stato di polarizzazione del materiale, ovvero il campo di polarizzazione  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$  e le relative densità di carica e corrente sono individuati univocamente dai campi  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ .

- Lo studio teorico delle relazioni tra i campi  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  richiede metodi quantistici raffinati e, ancor oggi, conduce a risultati in accordo con i fatti sperimentali solo in casi semplici. Ma gli scienziati dell'800 avevano intuito e provato sperimentalmente che, all'interno di molti materiali, i campi  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  differiscono solo per un fattore di scala. Precisamente, **entro un materiale lineare omogeneo ed isotropo, il campo  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  è legato al campo ELETTRICO dalla**

$$\text{relazione costitutiva interna} \quad \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (3.13)$$

dove  $\epsilon$  è un parametro adimensionale che prende il nome di **costante dielettrica**. Equivalentemente possiamo scrivere

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (3.14)$$

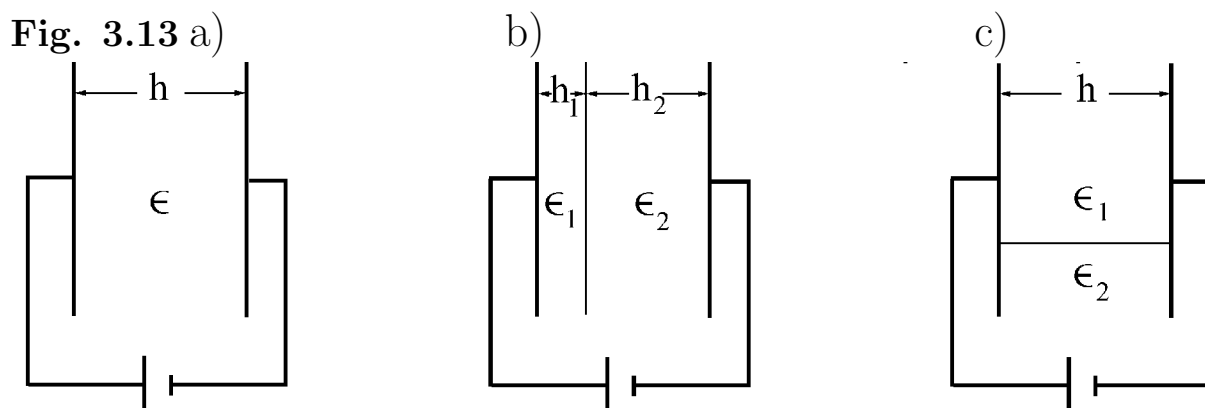
Il parametro adimensionale  $\chi = \epsilon - 1$  prende il nome di **suscettività dielettrica**. Sappiamo che  $\mathbf{P}$  è nullo nel vuoto e nei conduttori perfetti, quindi tali materiali hanno suscettività dielettrica nulla e costante dielettrica unitaria. Per altri materiali la suscettività dielettrica è positiva, almeno fino a frequenze elevatissime, quindi  **$\mathbf{P}$  ha ovunque il verso del campo ELETTRICO  $\mathbf{E}$** . Ad esempio la suscettività dielettrica vale circa  $5 \cdot 10^{-4}$  per l'aria e circa 80 per l'acqua a temperatura ambiente.

In sostanza, con le due relazioni costitutive interne 5) e 13) o 14) abbiamo definito la classe dei materiali lineari omogenei ed isotropi: un particolare materiale di tale classe è caratterizzato dai due parametri  $g$  ed  $\epsilon$  oppure  $g$  e  $\chi$ .



Come nel caso della legge di Ohm locale potremmo generalizzare l'equazione 13) per considerare anche materiali nei quali  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  non sono nello stesso verso pur continuando ad esser legati da una relazione lineare ed omogenea, ma, per semplicità, nel seguito limitiamo l'attenzione alla classe di dielettrici Lineari Omogenei ed Isotropi (LOI) definita dall'equazione 13).

Per cominciare ad apprezzare l'utilità del campo  $\mathbf{D}$  consideriamo un condensatore piano e pensiamo che lo spazio tra le armature sia riempito con dielettrici in uno dei modi mostrati in figura 13. Nel caso a) il condensatore è riempito omogeneamente con un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon$ , nel caso b) è riempito da due strati dielettrici di spessori  $h_1$  e  $h_2 = h - h_1$  con costanti dielettriche  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$ , nel caso c) è riempito in parte da un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon_1$ , a contatto con l'area  $S_1$  dell'armatura, ed in parte da un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon_2$ , a contatto con l'area rimanente  $S_2 = S - S_1$ . Nei casi a) e b) indichiamo con  $Q = S\sigma_f$  la carica incognita di



un'armatura ed osserviamo che il campo  $\mathbf{D}$  è nullo nel metallo e diventa

$$D = \sigma_f = Q/S$$

nei dielettrici. Nel caso a) il campo ELETTRICO vale  $E = V/h$ , come nel caso che il condensatore sia vuoto, quindi **la capacità del condensatore piano riempito uniformemente con un mezzo di costante dielettrica  $\epsilon$  vale**

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{DS}{Eh} = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{h}$$

ed è  $\epsilon$  volte maggiore di quella di un identico condensatore vuoto. Nel caso b) il campo ELETTRICO non vale  $V/h$ , perché i due dielettrici sono diversi, ma rimane vero che  $V$  è l'integrale di linea del campo ELETTRICO da un'armatura all'altra, quindi

$$V = E_1 h_1 + E_2 h_2 = \frac{Dh_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} + \frac{Dh_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{Q}{S} \left[ \frac{h_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} \right]$$

Ciò mostra che la capacità del condensatore riempito come in b) è tale che

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{h_1}{\epsilon_0 \epsilon_1 S} + \frac{h_2}{\epsilon_0 \epsilon_2 S}$$

Dunque l'inverso della capacità del condensatore è la somma degli inversi delle capacità di due condensatori in serie, proprio come se i due strati dielettrici fossero separati da una lastra metallica neutra.

Infine notiamo che nel caso c) il campo ELETTRICO vale  $E = V/h$  in entrambe le regioni, mentre la carica sulle armature vale

$$Q = Q_1 + Q_2 = D_1 S_1 + D_2 S_2 = \epsilon_0 \epsilon_1 E S_1 + \epsilon_0 \epsilon_2 E S_2 = \epsilon_0 \frac{V}{h} [\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2]$$

Quindi la capacità del condensatore risulta

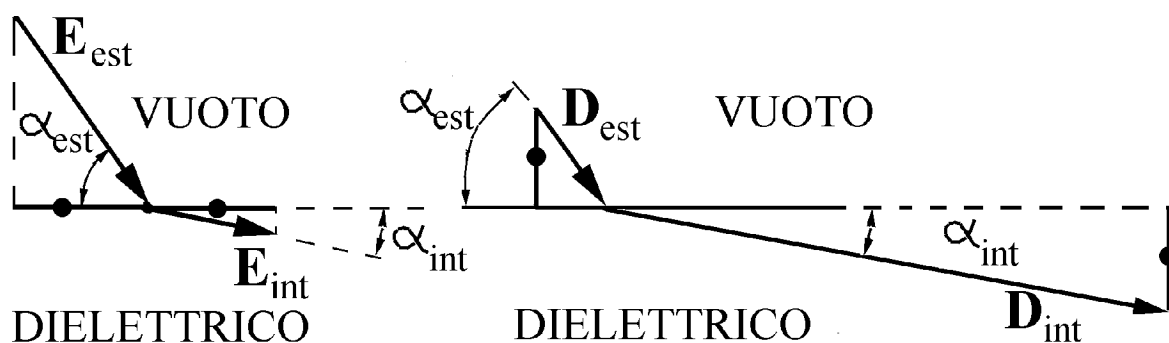
$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S_1}{h} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S_2}{h}$$

ed è la somma delle capacità di due condensatori in parallelo.

Il campo  $\mathbf{D}$  è molto utile anche per lo studio del campo ELETTRICO all'interfaccia dielettrico-vuoto. Le figure 14 a) e b) descrivono i campi  $\mathbf{E}$

Fig. 3.14 a)

b)



e  $\mathbf{D}$  in uno stesso punto di un'interfaccia dielettrico-vuoto. Si tenga ben presente che, nei materiali isotropi, i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  hanno ovunque lo stesso verso, quindi hanno le stesse linee di flusso. Nel passare dal vuoto al dielettrico si conservano le proiezioni di  $\mathbf{E}$  sull'interfaccia e di  $\mathbf{D}$  sulla normale, quindi, indicati con  $\alpha_{est}$  ed  $\alpha_{int}$  gli angoli di radenza delle linee di flusso con l'interfaccia nel vuoto e nel materiale, possiamo scrivere

$$E_{est} \cos \alpha_{est} = E_{int} \cos \alpha_{int} \quad , \quad D_{est} \sin \alpha_{est} = D_{int} \sin \alpha_{int}$$

Dividendo la seconda per la prima relazione otteniamo

$$\tan \alpha_{est} = \epsilon \tan \alpha_{int}$$

Poiché  $\epsilon > 1$ , l'angolo di radenza formato dal campo ELETTRICO con l'interfaccia diminuisce nel passare dal vuoto al dielettrico.

### ESERCIZI

Nei primi tre esercizi pensiamo ad un condensatore con armature di sezione  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  distanti  $1 \text{ mm}$ , alimentato da una batteria con  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ .

1) Tra le armature è inserito un dielettrico con  $\epsilon = 8$ . Calcolare: a) il campo ELETTRICO ed il campo di spostamento elettrico, b) le densità di carica di conduzione e di polarizzazione, c) la capacità del condensatore.

2) Parallelemente alle armature sono inseriti due strati dielettrici, il primo con  $\epsilon_1 = 4$  e spessore  $h_1 = 0.2 \text{ mm}$ , il secondo con  $\epsilon_2 = 8$  e spessore  $h_2 = 0.8 \text{ mm}$ . Calcolare: a) i campi ELETTRICI nei due strati, b) la carica di conduzione sulle armature, c) la capacità del condensatore, d) la carica di polarizzazione sulle varie interfacce.

3) Il condensatore è diviso in due parti uguali da un piano normale alle armature. Una parte è vuota, l'altra contiene un dielettrico con  $\epsilon = 4$ . Calcolare: a) i campi  $D$  nelle due parti, b) le cariche di conduzione e di polarizzazione sulle interfacce, c) la capacità del condensatore.

4) Ripetere l'esercizio 3) del paragrafo precedente nel caso che i due conduttori siano separati da un dielettrico con  $\epsilon = 2.1$  (teflon).

5) Prendiamo rotoli per alimenti di dimensioni,  $30 \text{ cm} \times 10 \text{ m}$ , due di polietilene di spessore  $0.1 \text{ mm}$  ed  $\epsilon = 2.5$  e due di alluminio. Sovrapponiamo i fogli nell'ordine: polietilene, alluminio spostato lateralmente di  $+1 \text{ cm}$ , polietilene, alluminio spostato lateralmente di  $-1 \text{ cm}$ . Riarrotoliamo il tutto e colleghiamo conduttori ai bordi sporgenti dei due fogli d'alluminio. Calcolare la capacità del condensatore, tenendo conto che entrambe le facce di ciascun foglio di alluminio sono armature.

### 3.7 Condensatori con dielettrici reali

Fino ad ora abbiamo considerato dielettrici con conducibilità elettrica nulla. Ora, con riferimento alla figura 15, consideriamo un condensatore piano riempito omogeneamente da un dielettrico di conducibilità elettrica  $g$ . Continuiamo ad indicare con  $S$  l'area delle armature, con  $h$  la loro distanza e notiamo che il condensatore ha resistenza  $R = h/gS$ , quindi è attraversato dalla corrente di conduzione  $I = \mathcal{E}/(R + R_i)$  e ha tensione ai capi minore di

Fig. 3.15

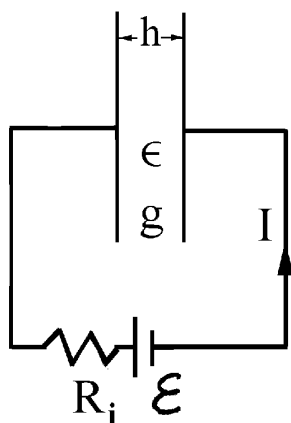
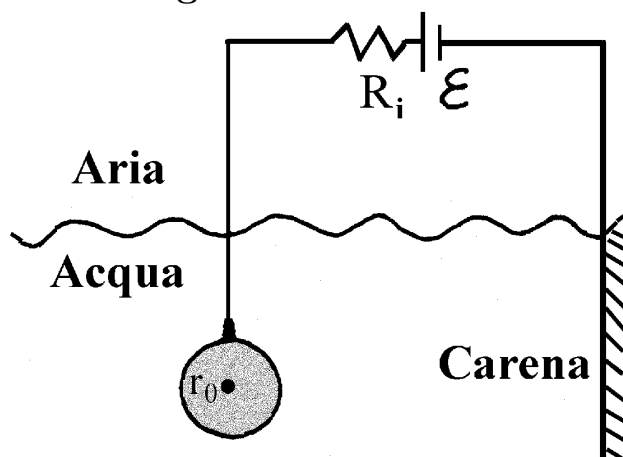


Fig. 3.16



$\mathcal{E}$ , precisamente

$$V = RI = \frac{\mathcal{E}}{(1 + R_i/R)}$$

Ma il campo ELETTRICO continua ad essere  $E = V/h$ , e  $D$  continua ad essere  $D = \sigma_f = Q/S$ , quindi  $C = \epsilon_0 \epsilon S/h$ . Dunque **la capacità di un condensatore non dipende dalla conducibilità del dielettrico**.

Un'altra situazione interessante è illustrata in figura 16. Una sfera metallica di raggio  $r_0$  è immersa in un dielettrico omogeneo parzialmente conduttore, ad esempio l'acqua di mare. Una batteria con  $\mathcal{E}$  ed  $R_i$  note è inserita tra la sfera ed un elettrodo molto esteso, ad esempio la carena di una nave. In questo caso il campo ELETTRICO sulla superficie della sfera vale  $E = V/r_0$ , con  $V$  minore di  $\mathcal{E}$ , e la legge di Ohm locale assicura che la densità di corrente uscente dalla sfera vale  $j = gE = gV/r_0$ , quindi la corrente risulta  $I = 4\pi r_0^2 j = 4\pi r_0 g V$ . Il rapporto  $R = V/I$  prende il nome di **resistenza d'elettrodo sferico** e risulta

$$R = \frac{1}{4\pi r_0 g}$$

Anche in questo caso la tensione tra gli elettrodi vale  $V = \mathcal{E}/(1 + R_i/R)$ .

## ESERCIZI

1) Riprendere in esame l'esercizio 1) del paragrafo precedente pensando che il dielettrico abbia conducibilità  $g = 10^{-5} (\Omega m)^{-1}$  e che la resistenza interna della batteria sia di  $0.1 \Omega$ . Calcolare: a) il campo ELETTRICO ed il campo di spostamento elettrico, b) la capacità del condensatore, c) la tensione ai capi, d) la corrente.

2) Da una nave viene calata in mare una sfera metallica di diametro  $2 m$  mediante un cavo d'acciaio isolato di diametro  $1 cm$  e lunghezza  $100 m$ . A bordo, una batteria da  $12 V$  e resistenza interna  $0.1 \Omega$  ha un morsetto collegato al cavo, l'altro allo scafo. Alla profondità raggiunta, l'acqua ha  $\epsilon = 80$  e  $g = 0.3 (\Omega m)^{-1}$ . Calcolare: a) la corrente, b) il campo ELETTRICO sulla superficie della sfera, c) la carica di conduzione sulla sfera, d) la carica di polarizzazione a contatto della sfera.

3) Un caseggiato viene "messo a terra" da un cavo di rame di sezione  $10 mm^2$  e lunghezza  $60 m$  collegato ad una sfera metallica di diametro  $20 cm$  immersa in un terreno di conducibilità  $g = 10^{-2} (\Omega m)^{-1}$ . Calcolare la "resistenza di terra" (somma delle resistenze del cavo e dell'elettrodo).

4) Ammettere che sulla superficie di un lago, a pelo d'acqua, il campo ELETTRICO abbia intensità  $100 V/m$  e formi un angolo di  $60^\circ$  con la superficie. Ricordare che l'acqua ha  $\epsilon \approx 80$  e calcolare: a) l'intensità e l'angolo di radenza del campo ELETTRICO entro l'acqua a pelo d'aria, b) la densità di carica di polarizzazione sulla superficie del lago.

### 3.8 Problema di Dirichlet

Usando la legge di Coulomb ed un modesto calcolatore possiamo calcolare facilmente il campo ELETTROSTATICO quando è nota la densità di carica  $\rho_e(\mathbf{r}) = \rho_b(\mathbf{r}) + \rho_f(\mathbf{r})$ . Ma in casi concreti  $\rho_e(\mathbf{r})$  è raramente nota a priori: a volte conosciamo il campo elettrico di stimolo, altre volte conosciamo le tensioni sui vari conduttori; si pensi ai casi semplici considerati nei paragrafi precedenti. Partendo da tali elementi e dalla geometria del sistema vogliamo calcolare le densità di carica oppure i campi e le forze in gioco. Un problema, noto come **problema di Dirichlet**, ha una particolare importanza concettuale e pratica. Con riferimento alla figura 17, pensiamo ad una di-

Fig. 3.17

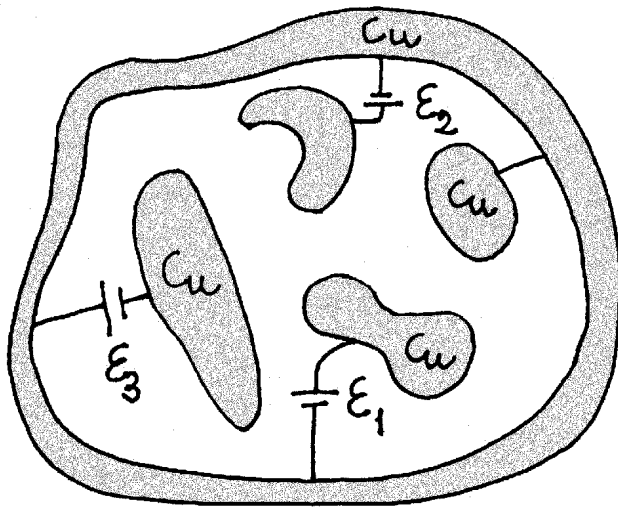
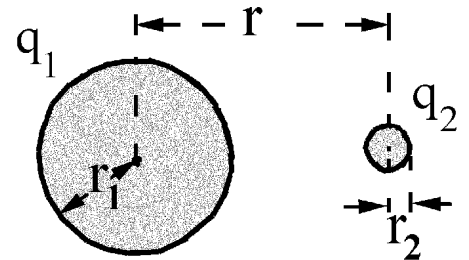


Fig. 3.18

Due palline sono  
entro un'enorme  
gabbia di Faraday



stribuzione di pezzi di rame, ciascuno collegato da fili di rame al morsetto di una propria batteria. Gli altri morsetti di tutte le batterie sono collegati con fili di rame alla parete di una gabbia di Faraday di rame. La geometria dei conduttori, dei fili e dell'involucro e le forze elettromotrici delle batterie sono note. Quando le correnti sono cessate, la legge di Ohm locale assicura che ciascun pezzo di rame, insieme al filo che lo collega alla sua batteria, ha tensione uniforme. Il problema di Dirichlet è: **determinare la tensione  $V(\mathbf{r})$  nello spazio esterno ai conduttori con la condizione che prenda i valori assegnati sulle superfici dei conduttori e sia nulla sulla massa.** Una volta determinato  $V(\mathbf{r})$  basta prenderne il gradiente e cambiare segno per calcolare il campo ELETTRICO nello spazio esterno ai conduttori. E basta valutare il campo ELETTRICO  $E(\mathbf{r})$  quasi a contatto con i conduttori e moltiplicare per  $\epsilon_0$  per calcolare le densità superficiali di carica  $\sigma_f(\mathbf{r}) = \epsilon_0 E(\mathbf{r})$  sui conduttori.

E se avessimo pezzi di metalli diversi collegati alle batterie con cavi metallici diversi? Avremmo campi elettrici built-in, oltre al campo ELETTRICO, ma questo, a parità di geometria e di tensioni applicate ai conduttori rimarrebbe inalterato.

E se lo spazio esterno ai conduttori fosse riempito **omogeneamente** di paraffina? A parità di geometria e di tensioni applicate ai conduttori il campo ELETTRICO rimarrebbe inalterato! Non può essere altrimenti visto che l'integrale di linea del campo ELETTRICO da un conduttore all'altro è fissato dalle batterie. Attenzione, però, in questo caso le cariche di conduzione sulle superfici dei conduttori sono circa due volte maggiori di quelle presenti in assenza di paraffina ( $\epsilon \approx 2$ ). Abbiamo sottolineato "omogeneamente" perché nel caso che lo spazio sia riempito in modo non omogeneo, ad esempio come in figura 13b) e c), pur rimanendo vero che l'integrale di linea del campo ELETTRICO da un conduttore all'altro è fissato dalle batterie, il campo ELETTRICO è diverso da quello presente in caso di riempimento omogeneo ed il problema diventa più complicato.

Un secondo problema riconducibile al problema di Dirichlet è illustrato in figura 18. Due palline metalliche cariche con cariche  $q_1$  e  $q_2$  sono poste entro un'enorme gabbia di Faraday vuota, in assenza di altri corpi. I raggi  $r_1$  ed  $r_2$  delle palline e la distanza  $r$  tra i centri sono noti. Il problema è: determinare il campo ELETTRICO, le distribuzioni di carica sulle palline e la forza che l'una esercita sull'altra.

Nei problemi considerati, la carica è distribuita solo sulle superfici dei conduttori, quindi in tutto lo spazio delimitato dalle pareti dei conduttori e dalla parete di massa l'equazione di Poisson si riduce alla

$$\text{equazione di Laplace} \quad \nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.15)$$

Nel caso di figura 17 sono note le tensioni dei conduttori, perché sono stabilite dalle batterie, ed il problema è proprio quello di Dirichlet. Nel caso considerato in figura 18 ammettiamo di conoscere le tensioni  $V_1$  e  $V_2$  delle due palline, riservandoci di valutarle più avanti. Note le tensioni, anche questo problema è ricondotto al problema di Dirichlet.

Ora, ammettiamo di aver individuato un campo scalare  $V(\mathbf{r})$  che soddisfi l'equazione di Laplace, che prenda i valori assegnati su tutti i conduttori e che si annulli sulla parete di massa. Domandiamo: esiste un campo scalare  $V'(\mathbf{r})$  diverso dal precedente che soddisfi la stessa equazione e le stesse condizioni al contorno? Certamente NO, infatti la differenza  $V'(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})$  è nulla sulla massa e su tutti i conduttori e deve essere nulla ovunque: se non lo fosse, avrebbe almeno un massimo o un minimo in un punto del vuoto ed esisterebbe tutto un intorno nel quale  $\nabla^2[V'(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})]$  sarebbe diverso da zero, cosa impossibile in assenza di carica elettrica. Dunque **la soluzione del problema di Dirichlet è unica.**

Come prima applicazione pensiamo che un involucro metallico sferico di raggio  $r_0$ , con distribuzione di carica interna arbitrariamente complicata, sia portato a tensione  $V$  nel vuoto, come schematizzato in figura 19. Sapendo che la soluzione del problema di Dirichlet è unica, possiamo dire che, visto

dall'esterno, il sistema equivale ad un guscio sferico uniformemente carico con carica totale  $Q = 4\pi\epsilon_0 r_0 V$ . La distribuzione di carica interna non gioca alcun ruolo all'esterno.

Fig. 3.19

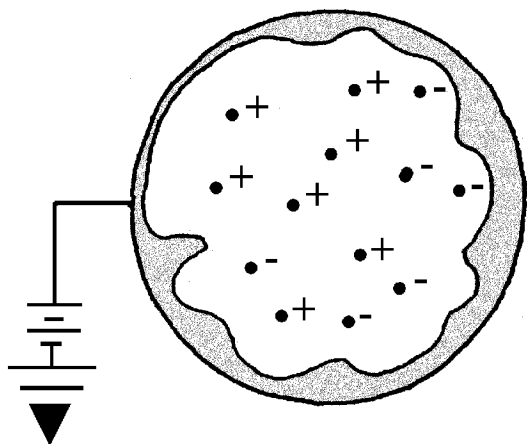
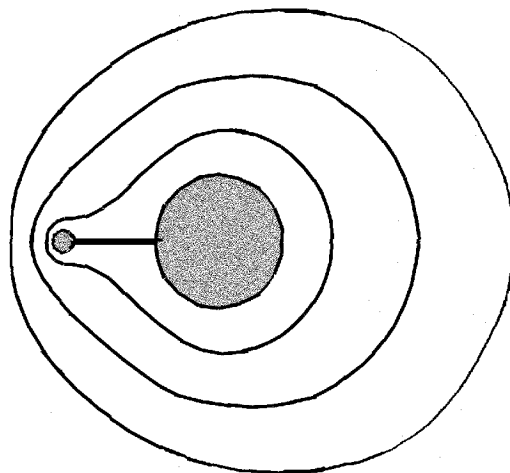


Fig. 3.20



Per un involucro metallico bitorzoluto il problema diventa più complicato, ma si può dire che **il campo ELETTRICO è intenso in prossimità delle sporgenze e debole in prossimità delle rientranze**. Per convincercene consideriamo la situazione mostrata in figura 20: due palline metalliche di raggi diversi, collegate da un filo conduttore, sono portate a tensione  $V$  rispetto alla parete di massa molto lontana. Le palline hanno la stessa tensione, quindi i campi ELETTRICI sulle loro superfici sono inversamente proporzionali ai raggi. Pertanto il campo ELETTRICO è più intenso sulla pallina piccola. In generale basta disegnare le superfici equipotenziali ricordando che diventano sferiche a grande distanza per convincersi che sono addensate in prossimità delle punte e rarefatte in prossimità delle rientranze.

### 3.9 Interazione carica-carica indotta

Con riferimento alla figura 21, consideriamo una sfera metallica di raggio  $r_0$ , centrata nell'origine, collegata a massa e stimolata da una carica rigida  $q$  ferma nel punto  $\mathbf{r}$ . Domandiamo: quale campo ELETTRICO agisce nel generico punto  $\mathbf{r}'$ ? quale forza agisce sulla carica stimolante? Sappiamo che il campo ELETTRICO è nullo entro la sfera e sappiamo che la sfera collegata a massa ha tensione nulla, quindi il potenziale di risposta è opposto al potenziale di stimolo in qualunque punto interno alla sfera. Inoltre sappiamo che la carica  $q'$  acquistata dalla sfera, comunque sia distribuita, è localizzata sulla superficie, quindi a distanza  $r_0$  dal centro. In particolare, nel centro della sfera i potenziali di stimolo e di risposta valgono

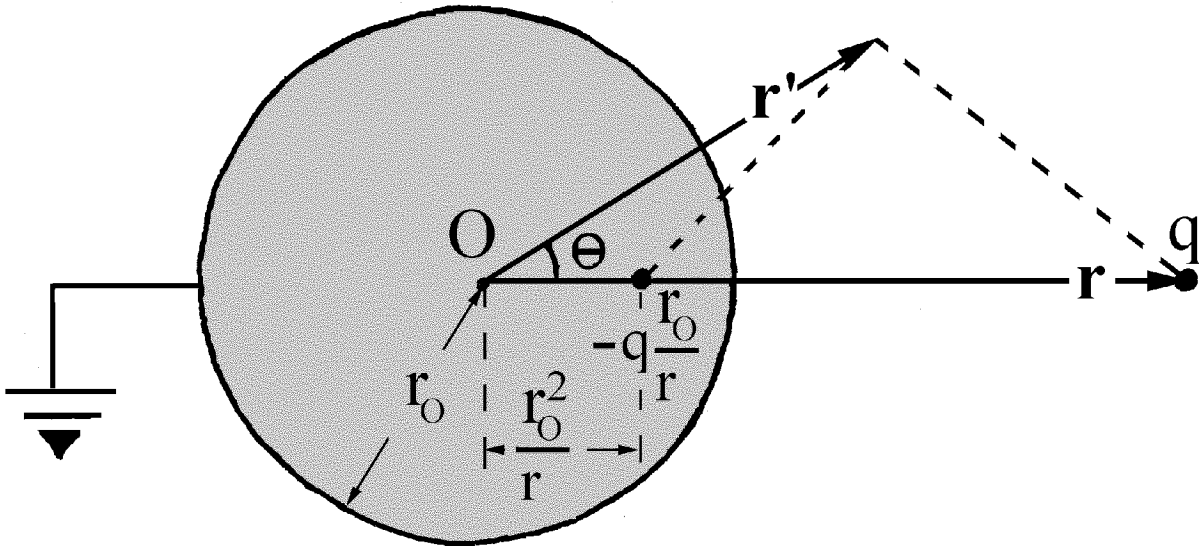
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{e} \quad \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

quindi la carica totale della sfera deve essere legata alla carica stimolante dalla relazione

$$q' = -q \frac{r_0}{r} \quad (3.16)$$

Naturalmente questa carica è distribuita sulla superficie della sfera, ma per calcolare il campo ELETTRICO non è necessario sapere come sia distribuita, mostreremo infatti che nella regione esterna tutto va come se la carica  $q' = -qr_0/r$  fosse una **carica immagine** puntiforme posta a distanza  $r_0^2/r$  dal centro verso la carica stimolante, come illustrato in figura 21. Per dimo-

Fig. 3.21



strarlo, cominciamo a calcolare il potenziale prodotto dalla carica stimolante e dalla carica immagine nel generico punto  $\mathbf{r}'$ . Usando il teorema di Carnot per calcolare le distanze tratteggiate in figura otteniamo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\theta}} + \frac{-qr_0/r}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r'^2 + r_0^4/r^2 - 2r'(r_0^2/r)\cos\theta}} \\ &\Downarrow \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r'^2 r^2 / r_0^2 + r_0^2 - 2r'r\cos\theta}} \right) \end{aligned}$$

e vediamo che  $\phi(\mathbf{r}')$  si annulla sia all'infinito, sia sulla superficie della sfera, ovvero per  $r' = r_0$ . D'altra parte sappiamo che la soluzione del problema di Dirichlet è unica, quindi la tensione  $V(\mathbf{r}')$  deve essere uguale a  $\phi(\mathbf{r}')$  in tutta la regione esterna alla sfera. Di conseguenza, il campo ELETTRICO  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$  nella regione esterna è davvero il campo creato dalla carica stimolante e dalla carica immagine e ciò comporta che sulla carica stimolante agisce la forza

$$F(r) = q \frac{-qr_0/r}{4\pi\epsilon_0(r - r_0^2/r)^2} = -\frac{q^2 r_0 r}{4\pi\epsilon_0(r^2 - r_0^2)^2}$$

Quindi l'energia potenziale carica-carica indotta risulta

$$U(r) = -\frac{q^2 r_0}{8\pi\epsilon_0(r^2 - r_0^2)} \quad (3.17)$$



Per convincersene basta notare che la derivata di questa funzione, cambiata di segno, è proprio la forza agente sulla carica stimolante. Si noti, però, che il potenziale di risposta nella posizione occupata dalla carica stimolante vale

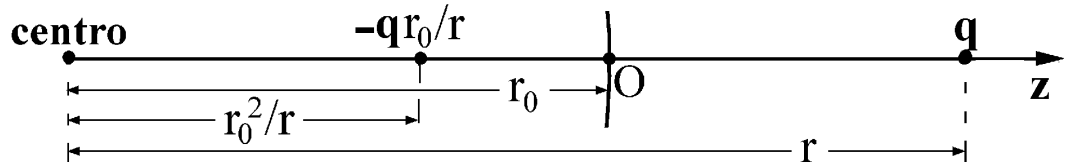
$$\phi_R(r) = \frac{-qr_0/r}{4\pi\epsilon_0(r - r_0^2/r)} = -\frac{qr_0}{4\pi\epsilon_0(r^2 - r_0^2)} = 2\frac{U(r)}{q}$$

quindi **l'energia potenziale carica-carica indotta NON è il prodotto  $q\phi_R(r)$ , è la metà di tale prodotto**, in formula

$$U(r) = \frac{1}{2}q\phi_R(r) \quad (3.18)$$

Il fattore  $1/2$  in questa equazione è dovuto al fatto che la carica immagine non è rigida, ha valore nullo quando la carica stimolante è all'infinito e diventa eguale a  $q$  solo quando la carica stimolante tocca la sfera.

**Fig. 3.22**



Ora scegliamo l'asse  $z$  sulla retta che va dal centro alla carica stimolante e poniamo l'origine sulla superficie sferica, come in figura 22. In tal caso la coordinata della carica stimolante risulta  $z = r - r_0$  e quella della carica immagine vale

$$z' = -r_0 + \frac{r_0^2}{r} = -r_0 \frac{r - r_0}{r} = -z \frac{r_0}{r}$$

Quindi anche la coordinata  $z$  dell'immagine si ottiene dalla coordinata della particella stimolante moltiplicando per il fattore  $r_0/r$  e cambiando segno. In particolare quando la distanza dalla superficie è molto piccola rispetto ad  $r_0$ , la carica immagine non differisce apprezzabilmente da  $-q$  e la sua distanza dalla carica stimolante non differisce apprezzabilmente da  $2z$ , quindi la forza risulta

$$F(z) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2z)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z^2}$$

ed è la derivata cambiata di segno dell'energia potenziale

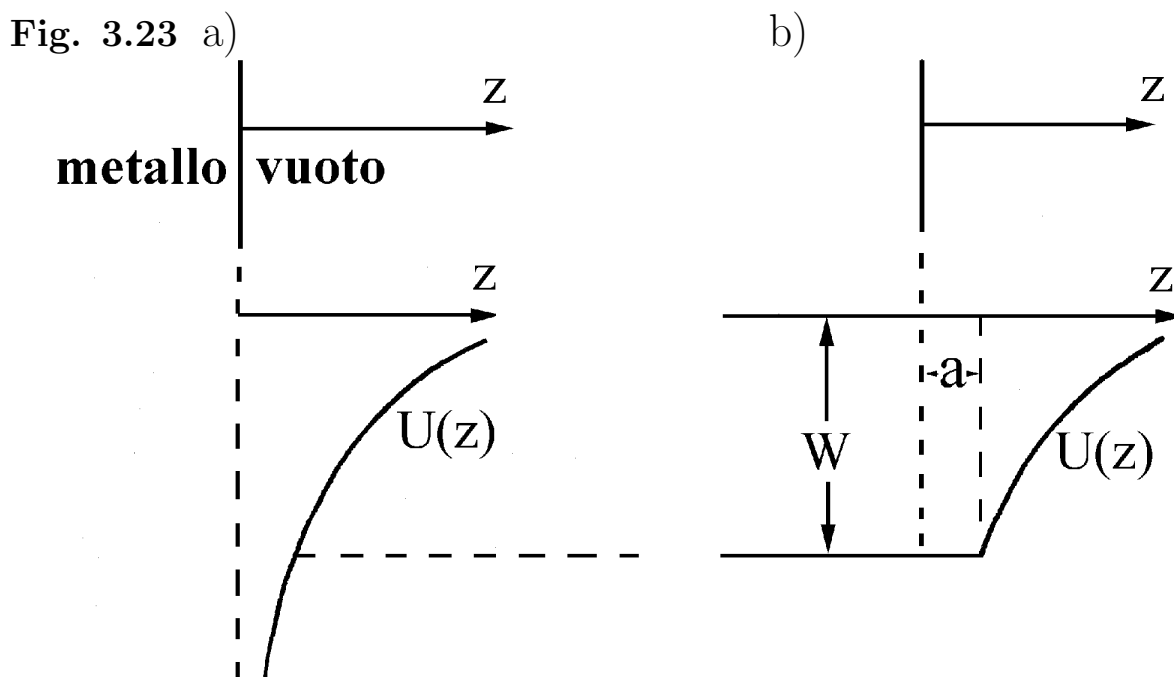
$$U(z) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z} \quad \text{valida per } z \ll r_0 \quad (3.19)$$

Lo si deduce anche approssimando  $r^2 - r_0^2$  con  $2r_0z$  nell'equazione 17).

Il metodo usato in questo paragrafo, noto come **metodo delle immagini**, verrà usato nel seguito per risolvere altri problemi importanti, qui sottolineiamo un punto da non dimenticare: **la carica immagine è fittizia**. In

realtà le cariche indotte sono distribuite sulla superficie della sfera e producono un campo opposto al campo di stimolo nella regione interna, ma uguale a quello prodotto dalla carica immagine nella regione esterna.

Come prima applicazione consideriamo un elettrone nell'atto di uscire da un metallo. A distanza  $z$  dalla superficie l'elettrone viene richiamato verso la superficie dalla carica che esso stesso induce nel metallo e ha l'energia potenziale  $U(z)$  data dall'equazione 19), come mostrato in figura 23 a). Ma se tale modello valesse davvero anche per  $z$  tendente a zero, un elettrone immerso nel metallo potrebbe uscire nel vuoto solo se avesse da spendere energia cinetica infinita. Naturalmente non è così: l'energia che dobbiamo



somministrare ad un elettrone per farlo uscire nel vuoto, misurata con il metodo fotoelettrico che descriveremo nel capitolo 10, ha valori che vanno da un paio di  $eV$  per i metalli alcalini a poco più di  $5 eV$  per metalli come l'oro e il platino, come mostrato nella tabella seguente. Per tradizione l'energia di estrazione degli elettroni dai metalli prende il nome di **funzione lavoro** e viene indicata con il simbolo  $W$  (da Work).

**Funzione lavoro di alcuni metalli in  $eV$**

Metallo	$W$	Metallo	$W$	Metallo	$W$
Cs	1.8	Zn, Al	4.0	Cu, W	4.4
K, Rb	2.2	Fe, Ag	4.2	Ni, Cr	4.6
Li, Na	2.4	Ta, Va	4.2	Au, Pt	5.2

Per tener conto dei dati sperimentali si usa descrivere l'energia potenziale dell'elettrone in funzione della distanza dalla superficie come mostrato in figura 23b): si assume che  $U(z)$  sia uguale a  $-W$  per  $z < a$  e che sia data

dall'equazione 19) per  $z > a$ . La distanza di raccordo risulta

$$a = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 W}$$

Sostituendo i valori di  $W$  riportati in tabella si vede che  $a$  è dell'ordine di un raggio atomico, infatti vale circa  $2\text{\AA}$  per i metalli alcalini ed è minore di  $1\text{\AA}$  per altri metalli. Dunque l'equazione 19) perde validità solo quando l'elettrone è ben immerso nella nuvola elettronica del metallo.

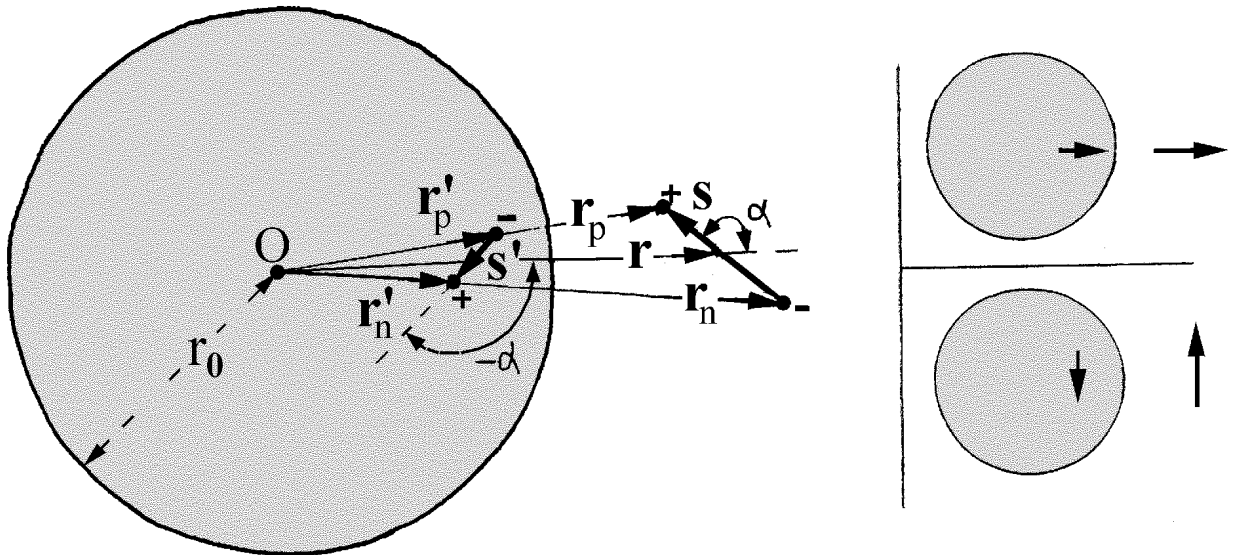
### ESERCIZI

1) Calcolare l'energia potenziale di un protone fermo a distanza  $r$  dal centro di una pallina metallica di diametro  $1\text{ cm}$  collegata a massa, nei seguenti casi: a)  $r = 10\text{ cm}$ , b)  $r = 1\text{ cm}$ , c)  $r = 0.5\text{ cm} + 10\text{\AA}$

### 3.10 Interazione dipolo-dipolo indotto

Ora pensiamo che una sfera metallica neutra ed isolata di raggio  $r_0$  sia centrata nell'origine e sia stimolata da un dipolo rigido centrato in  $\mathbf{r}$ , con  $r > r_0$ . Come mostrato in figura 24, pensiamo che il dipolo  $\mathbf{p} = q\mathbf{s}$  sia composto dalla carica  $-q$  posta in  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r} - \mathbf{s}/2$  e dalla carica  $q$  posta in  $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \mathbf{s}/2$ , con  $\mathbf{s}$  infinitesimo, ed indichiamo con  $\mathbf{r}'_n$  la posizione dell'immagine della carica negativa (che è positiva), e con  $\mathbf{r}'_p$  la posizione dell'immagine della carica positiva (che è negativa). Ricordando che  $r'_n = r_0^2/r_n$  e  $r'_p = r_0^2/r_p$  si

Fig. 3.24



vede che  $r'_n/r_p = r'_p/r_n$ , quindi i triangoli formati dal centro della sfera con le cariche stimolanti e con le cariche immagini sono simili e possiamo dire quanto segue.

• La lunghezza  $s'$  del dipolo indotto è ridotta del fattore  $(r_0/r)^2$  rispetto alla lunghezza  $s$  del dipolo stimolante, infatti

$$\frac{s'}{s} = \frac{r'}{r} = \frac{r_0^2/r}{r} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

- Il momento di dipolo indotto è ridotto del fattore  $(r_0/r)^3$  rispetto al momento di dipolo stimolante, infatti

$$p' = q's' = q\left(\frac{r_0}{r}\right)s\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = p\left(\frac{r_0}{r}\right)^3$$

- Quando il dipolo  $\mathbf{p}$  forma con  $\mathbf{r}$  l'angolo  $\alpha$ , il dipolo indotto  $\mathbf{p}'$  forma con  $\mathbf{r}$  l'angolo  $-\alpha$ . In particolare i due dipoli hanno verso concorde per  $\alpha = 0^\circ$  o  $\alpha = 180^\circ$  e hanno verso discorde per  $\alpha = \pm 90^\circ$ , come mostrato negli inserti.

A questo punto possiamo calcolare l'energia potenziale dipolo-dipolo indotto a partire dall'equazione 2.19), pur di ricordare di moltiplicare il secondo membro per il fattore  $1/2$  a tener conto che il dipolo  $\mathbf{p}'$  è indotto. Tenendo presente che  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \alpha$ , che  $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r} = p'r \cos \alpha$ , che  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = pp' \cos(2\alpha) = pp'(2 \cos^2 \alpha - 1)$ , e ricordando che la distanza tra i due dipoli non è  $r$  ma  $r - r_0^2/r$ , otteniamo

$$U(r, \alpha) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{pp'(2 \cos^2 \alpha - 1)}{(r - r_0^2/r)^3} - \frac{3pp' \cos^2 \alpha}{(r - r_0^2/r)^3} \right] = -\frac{p^2 r_0^3 (1 + \cos^2 \alpha)}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - r_0^2)^3}$$

Ciò mostra che l'energia potenziale è negativa, diminuisce in valore assoluto all'aumentare della distanza e dipende un po' dall'angolo  $\alpha$ : ha valore assoluto massimo per  $\alpha = 0^\circ$  e per  $\alpha = 180^\circ$  e valore assoluto minimo, pari alla metà del valore massimo, per  $\alpha = \pm 90^\circ$ . A grandi distanze l'energia potenziale decade con la sesta potenza della distanza, quindi la forza d'attrazione decade con la settima potenza della distanza. Si noti bene che **la forza è attrattiva qualunque sia il verso del dipolo stimolante.**

In molti casi interessa valutare il valor medio dell'energia potenziale preso su tutte le possibili orientazioni del dipolo. Poiché il valor medio di  $\cos^2 \alpha$ , preso su tutto l'angolo solido, vale

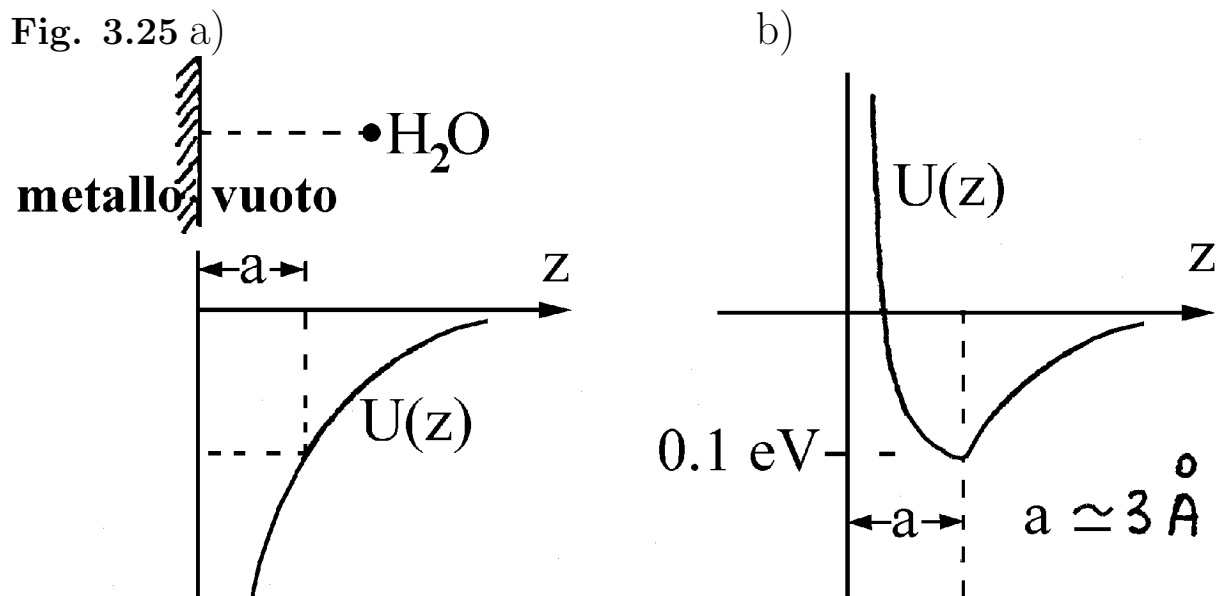
$$\int \cos^2 \alpha \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int \cos^2 \alpha d\alpha \sin \alpha d\phi = -\int_1^0 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

possiamo concludere che **l'energia potenziale media dipolo-dipolo indotto** vale

$$U(r) = -\frac{p^2 r_0^3}{6\pi\epsilon_0 (r^2 - r_0^2)^3} \quad (3.20)$$

Questo risultato consente di comprendere la natura di molti fenomeni interessanti, come vedremo più avanti, qui ci limitiamo ad applicarlo nel caso considerato in figura 25a). Una molecola d'acqua, orientata casualmente, interagisce con una superficie metallica a distanza molto minore del raggio di curvatura della superficie. In tal caso, ponendo  $r - r_0 = z$  ed  $r + r_0 \approx 2r_0$  nell'equazione 20), vediamo che l'energia potenziale media risulta

$$U(z) = -\frac{p^2}{48\pi\epsilon_0 z^3} \quad (3.21)$$

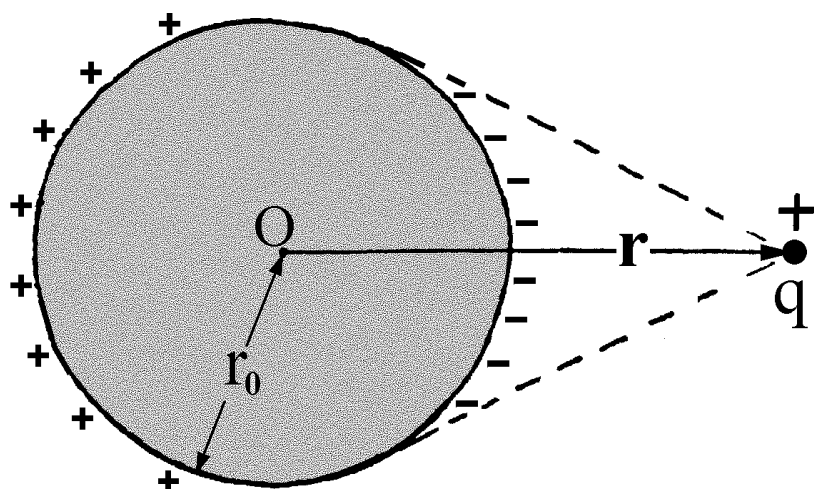


Si noti che l'energia potenziale decade con la terza potenza della distanza dalla superficie, quindi **la forza attrattiva decade con la quarta potenza della distanza**. Anche in questo caso dobbiamo pensare che  $U(z)$  sia ben descritta dall'equazione 21) solo a distanze tali che le nuvole elettroniche della molecola e del metallo siano disgiunte. A distanze minori di un diametro molecolare insorgono forze repulsive e la curva dell'energia potenziale prende l'andamento mostrato in figura 25b). Ad esempio una molecola d'acqua in interazione con superfici di metalli nobili (Cu, Ag, Au) ha energia potenziale minima dell'ordine di  $-0.1 \text{ eV}$  a distanze di circa  $3 \text{ \AA}$  dalla superficie.

### 3.11 Interazione carica-dipolo indotto

Continuiamo a considerare una sfera metallica neutra ed isolata di raggio  $r_0$  centrata nell'origine, e pensiamo che sia stimolata da una carica rigida  $q$  posta in  $\mathbf{r}$  con  $r > r_0$ .

Fig. 3.26



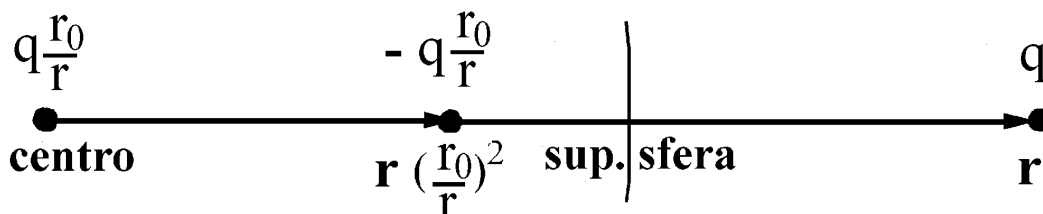
Rispetto al caso della sfera metallica collegata a massa, che abbiamo considerato nel paragrafo 9, la situazione è diversa perché la sfera rimane neutra

ed acquista la distribuzione di carica schematizzata in figura 26: una calotta superficiale a distanza  $\approx r - r_0$  dalla carica stimolante ha carica di segno opposto a quello di  $q$  ed una calotta a distanza  $\approx r + r_0$  dalla carica stimolante ha carica dello stesso segno di  $q$ . Per descrivere la situazione in modo quantitativo, cominciamo a ricordare che entro la sfera il campo ELETTRICO è nullo, quindi la tensione è uniforme e può essere calcolata fissando l'attenzione sul centro. Per tale punto il calcolo della tensione è facile perché le cariche indotte sono localizzate sulla superficie della sfera e hanno somma nulla. Quindi il potenziale di risposta nel centro è nullo e la tensione della sfera è uguale al potenziale di stimolo valutato nel centro, in formula

$$V_{sfera} = \phi_S(\text{centro}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Si noti che, sebbene la sfera sia neutra, la sua tensione aumenta con continuità quando la carica le si avvicina, raggiungendo la tensione di una sfera metallica carica con carica  $q$  quando  $r$  diventa uguale ad  $r_0$ .

**Fig. 3.27**



Ora osserviamo che la carica stimolante, la carica immagine ed una carica neutralizzante di valore  $qr_0/r$ , posta nel centro della sfera come in figura 27, producono complessivamente la tensione  $V_{sfera}$  sulla superficie della sfera. Infatti in qualunque punto della superficie i contributi alla tensione della carica stimolante e della carica immagine si cancellano, come visto nel paragrafo 9, e quello della carica neutralizzante vale

$$\frac{qr_0/r}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \phi_S(\text{centro}) = V_{sfera}$$

A questo punto, ricordando che nello spazio esterno alla sfera ed alla carica stimolante esiste una sola soluzione del problema di Dirichlet, possiamo dire che il campo ELETTRICO esterno è quello generato dalla carica  $q$ , dalla carica immagine e dalla carica neutralizzante. Ciò consente di trarre le seguenti conclusioni importanti.

- Il potenziale di risposta prodotto dalla carica immagine e dalla carica neutralizzante nella posizione occupata dalla carica stimolante risulta

$$\phi_R(r) = \frac{qr_0/r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r - r_0^2/r} \right] = \frac{qr_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 - r_0^2} \right] = -\frac{qr_0^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2(r^2 - r_0^2)}$$

quindi l'energia potenziale carica-sfera metallica neutra vale

$$U(r) = \frac{1}{2} q \phi_R(r) = -\frac{q^2 r_0^3}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2(r^2 - r_0^2)} \quad (3.22)$$

- Quando la distanza dalla superficie  $z = r - r_0$  è piccolissima rispetto ad  $r_0$  la calotta di carica concorde gioca un ruolo marginale e tutto va come se la sfera fosse collegata a massa. Lo si vede anche dall'equazione 22): sostituendo  $r^2 - r_0^2$  con  $(r + r_0)z \approx 2r_0z$  ed  $r_0/r$  con l'unità si ottiene l'equazione 21).
- Il momento di dipolo indotto è proporzionale al campo elettrico di stimolo valutato nel centro della sfera ed al volume  $\mathcal{V}$  della sfera, infatti

$$\mathbf{p} = -q \frac{r_0}{r} \mathbf{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 = 4\pi r_0^3 \epsilon_0 \left( \frac{-q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = 3\mathcal{V}\epsilon_0 \mathbf{E}_S(\text{centro})$$

Questo risultato vale sia per piccole, sia per grandi distanze e può essere generalizzato come segue: pensiamo che la sfera metallica sia centrata in  $\mathbf{r}$  e sia stimolata da un insieme di cariche esterne che complessivamente producono il campo di stimolo  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ . In tal caso, il momento di dipolo indotto nella sfera è la somma vettoriale dei momenti di dipolo indotti dalle singole cariche stimolanti, quindi è il prodotto di  $3\mathcal{V}\epsilon_0$  per la somma vettoriale dei campi creati dalle singole cariche nel centro della sfera, ovvero per  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$ . Pertanto, possiamo concludere che l'equazione

$$\mathbf{p} = 3\mathcal{V}\epsilon_0 \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \quad (3.23)$$

vale in generale: **il momento di dipolo indotto in una sfera metallica di volume  $\mathcal{V}$  è il prodotto di  $3\mathcal{V}\epsilon_0$  per il campo di stimolo valutato nel centro della sfera.** Ma il calcolo dell'energia potenziale della sfera metallica posta nel campo  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$  non è semplicissimo, lo diventa solo quando il campo di stimolo è uniforme, almeno in prossimità del centro della sfera. In tal caso il dipolo indotto è al centro della sfera e l'energia potenziale è la metà di quella data dall'equazione 2.15), ovvero

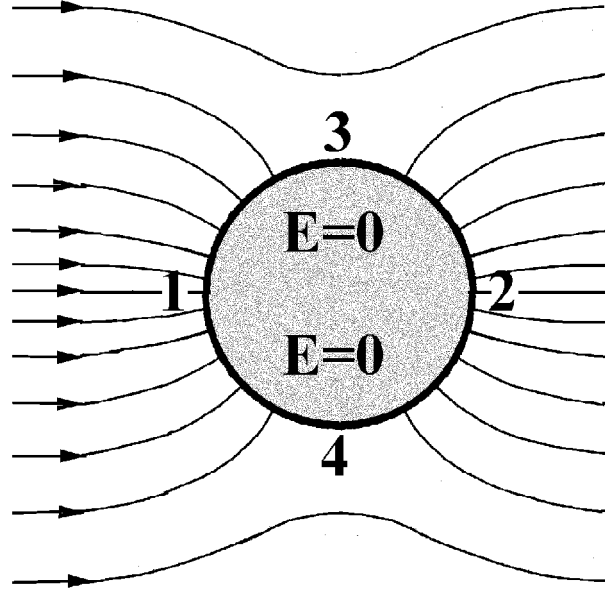
$$U(r) = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = -\frac{3\mathcal{V}\epsilon_0}{2} E_S^2(\mathbf{r}) \quad (3.24)$$

Invece, quando il campo di stimolo non è uniforme il dipolo indotto è spostato verso la regione di campo più intenso, e l'equazione 24) sottostima l'energia potenziale, ma insistiamo: l'equazione 23) è esatta anche in tal caso.

Ad evitare malintesi, ribadiamo che le cariche immagine e neutralizzante sono fittizie: in realtà la sfera metallica acquista una distribuzione di carica superficiale tale che, in qualunque punto interno, il campo elettrico di risposta cancella esattamente il campo elettrico di stimolo rendendo nullo il campo ELETTRICO. In particolare quando il campo di stimolo è uniforme basta ricordare quanto detto nel paragrafo 2.7 per convincersi che la carica è distribuita in superficie con densità  $\sigma_f(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}/\mathcal{V}$ . In tal caso il campo ELETTRICO nella regione esterna ha l'andamento mostrato in figura 28: a grandi distanze tende al campo di stimolo, mentre a contatto con la sfera è normale alla superficie con intensità

$$E(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_f(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{\epsilon_0 \mathcal{V}} = 3\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{n}$$

Fig. 3.28



Si noti che nei punti 1 e 2 il campo ELETTRICO vale  $\mathbf{E} = 3\mathbf{E}_S$  ed è tre volte più intenso del campo di stimolo. Ma nei punti 3 e 4 il campo ELETTRICO è nullo come all'interno.

### ESERCIZI

1) Un protone dista  $r$  dal centro di una pallina metallica neutra di raggio  $10 \text{ \AA}$ . In funzione di  $r$  riportare in grafico: a) il momento di dipolo indotto, b) l'energia potenziale.

2) Una pallina metallica neutra di diametro  $2 \text{ cm}$  è stimolata da due cariche puntiformi di  $+10^{-10} \text{ C}$  e  $-10^{-10} \text{ C}$ , poste a distanza di  $2 \text{ cm}$  dal centro da parti opposte. Calcolare: a) le forze agenti sulle due cariche. b) la forza agente sulla pallina, c) il momento di dipolo acquistato dalla pallina, d) la tensione della pallina.

3) Ripetere l'esercizio precedente nel caso di cariche stimolanti concordi.

4) Due palline metalliche di raggio  $r_0$  hanno cariche  $q$  uguali e hanno centri separati da distanza  $r > 2r_0$ . Mostrare che, a meno di termini importanti solo a piccolissime distanze, le due palline si respingono con forza

$$F \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 - 4\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \right]$$

AIUTO: si pensi che una pallina sia stimolata dal campo prodotto dall'altra e si consideri un sistema di quattro cariche, le due cariche date, poste nei centri delle palline, e le due cariche immagine.

5) Due palline metalliche di raggio  $r_0$  hanno cariche opposte e sono a distanza  $r > 2r_0$ . Mostrare che, a meno di termini importanti solo a piccolissime distanze, le due palline si attraggono con forza

$$F \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 + 4\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \right]$$

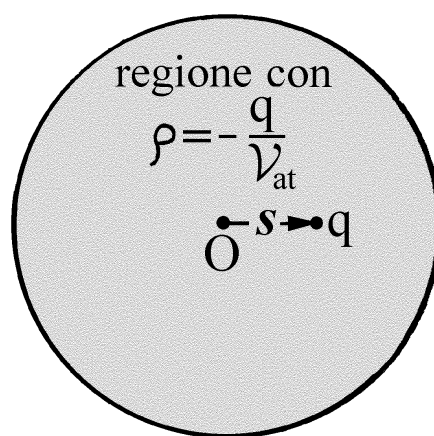


6) Immaginare che la Terra sia una sfera metallica cava con al centro una carica da  $+10^6 C$ , e che un ragazzo di  $50 kg$  riesca a volare indossando un giubbotto carico con  $+3 C$ . a) Una tale visione viola le leggi della fisica? b) A quale quota il ragazzo carico cadrebbe con accelerazione di  $9.8 m/s^2$ ?

### 3.12 Momento di dipolo indotto negli atomi

A questo punto emerge una delle ragioni che ci ha indotto a trattare estesamente l'interazione elettrostatica tra cariche, dipoli e palline metalliche: un qualunque atomo stimolato da un campo elettrostatico  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$  acquista un momento di dipolo dato dall'equazione 23), come se fosse una pallina

**Fig. 3.29**



metallica neutra di volume uguale al volume atomico  $\mathcal{V}_{at}$ . Per convincercene pensiamo che il core atomico abbia carica  $q$  e sia spostato di  $\mathbf{s}$  dal centro della nuvola elettronica carica con densità uniforme  $\rho = -q/\mathcal{V}_{at}$ , come mostrato in figura 29. Dall'equazione 2.5) sappiamo che la nuvola produce il campo elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho\mathbf{r}/3\epsilon_0$ , quindi la forza agente sul core vale  $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = q\rho\mathbf{s}/3\epsilon_0 = -q^2/3\epsilon_0\mathcal{V}_{at}$ . Dunque il core è attratto verso il centro della nuvola con forza proporzionale allo spostamento. In assenza di stimoli il core rimane al centro della nuvola elettronica, ma quando l'atomo viene stimolato da un campo  $\mathbf{E}_S$  la forza risultante agente sul core vale

$$\mathbf{F}_{ris} = q\mathbf{E}_S - \frac{q^2\mathbf{s}}{3\epsilon_0\mathcal{V}_{at}}$$

e l'equilibrio viene raggiunto con core spostato dal centro della nuvola di

$$\mathbf{s} = \frac{3\epsilon_0\mathcal{V}_{at}}{q}\mathbf{E}_S$$

Pertanto un atomo centrato in  $\mathbf{r}$  e stimolato dal campo  $\mathbf{E}_S(\mathbf{r})$  acquista davvero il momento di dipolo

$$\mathbf{p} = q\mathbf{s} = 3\mathcal{V}_{at}\epsilon_0\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) \quad (3.25)$$

Concludiamo sottolineando due fatti molto importanti.

- **L'atomo è un sistema molto rigido: anche quando il campo di stimolo è molto intenso, lo spostamento  $s$  è molti ordini di grandezza minore delle dimensioni atomiche.** Ad esempio, in un atomo con  $\mathcal{V}_{at} = 30 \text{ \AA}^3$  e  $q = e$ , stimolato da un campo da  $10^6 \text{ V/m}$ , lo spostamento della nuvola elettronica dal core non raggiunge  $10^{-14} \text{ m}$ .
- **Il momento di dipolo acquistato dall'atomo non dipende dalla carica del core,** dipende solo dal volume atomico e dal campo di stimolo.

### 3.13 Forze di van der Waals

In questo paragrafo descriviamo approssimativamente l'interazione tra due molecole non polari poste a distanza  $r$  tale che la nuvola elettronica dell'una sia disgiunta da quella dell'altra. Che due molecole non polari si attraggono è un fatto provato dal comportamento dei gas: a temperature sufficientemente basse anche i gas non polari diventano liquidi. Ad esempio, a pressione atmosferica, il tetracloruro di carbonio ( $CCl_4$ ) è liquido anche a temperatura ambiente, il metano ( $CH_4$ ) lo diventa a 110 K, l'ossigeno ( $O_2$ ) a 80 K, l'azoto ( $N_2$ ) a 77 K, il neon e l'idrogeno ( $H_2$ ) a 20 K circa e l'elio a 4.2 K.

Le forze responsabili della liquefazione dei gas prendono il nome di **forze dispersive** e possono essere giustificate solo con approccio quantistico, ma la loro origine può essere compresa qualitativamente a partire dai risultati del paragrafo 10. Anzitutto ricordiamo che un dipolo interagisce con una pallina metallica neutra di raggio  $r_0$  con energia potenziale media data dall'equazione 20) e notiamo che, per  $r \gg r_0$ , l'energia potenziale può essere riscritta nella forma

$$U(r) \approx -\frac{C_6}{r^6} \quad \text{dove} \quad C_6 = \frac{p^2 r_0^3}{6\pi\epsilon_0} \quad (3.26)$$

Pertanto possiamo aspettarci che una molecola dotata di momento di dipolo ed una molecola non polare interagiscano con energia potenziale  $-C_6/r^6$ . In realtà è davvero così, ma i valori sperimentali del coefficiente  $C_6$  sono ben maggiori di quelli previsti dall'equazione 26). Ad esempio per una molecola di  $CO$  in interazione con un atomo d'argon il valore sperimentale di  $C_6$  è più di mille volte maggiore di quello previsto dalla seconda delle equazioni 26). Ancor più sorprendentemente, gli esperimenti mostrano che anche due atomi interagiscono con energia potenziale ben descritta da  $-C_6/r^6$ , sebbene abbiano momento di dipolo nullo. Come giustificare la cosa? Uno sguardo attento all'equazione 20) mostra che l'energia potenziale è proporzionale a  $p^2$ , non a  $p$ , e fornisce la seguente chiave di interpretazione delle forze dispersive. Ammesso che il momento di dipolo atomico non sia istantaneamente nullo, ma fluttui intorno a zero con valore quadratico medio  $p^2$ , possiamo aspettarci che, ad ogni istante, un atomo induca un momento di dipolo nell'altro. E

ricordando che il dipolo ed il dipolo indotto si attraggono sempre, possiamo capire che il valor medio dell'energia d'interazione è proporzionale al valore quadratico medio del momento di dipolo e ha davvero l'andamento  $-C_6/r^6$ .

In realtà le forze dispersive agiscono anche tra molecole polari e sono sempre molto più intense delle forze induttive. In altre parole il contributo a  $C_6$  dovuto all'interazione dipolo fluttuante-dipolo indotto è sempre ben maggiore di quello dovuto all'interazione dipolo permanente-dipolo indotto, come mostrato nella tabella seguente. Si noti anche che per le coppie di molecole polari considerate in tabella un contributo a  $C_6$  proviene anche dalla interazione dipolo permanente-dipolo permanente. Ciò può sorprendere, a prima vista, infatti l'equazione 2.19) mostra che l'energia di interazione dipolo permanente-dipolo permanente decade con il cubo della distanza e può essere positiva o negativa. Pertanto il suo valor medio, preso su tutte le possibili orientazioni dei due dipoli, dovrebbe essere nullo. Tuttavia, ciascun dipolo agisce sull'altro con una coppia che tende ad orientarlo in modo da diminuire l'energia potenziale. Un calcolo statistico non semplice mostra che anche l'energia potenziale associata al riorientamento dei dipoli permanenti decade con la sesta potenza della distanza e contribuisce al valore di  $C_6$ . Il meccanismo di riorientamento è contrastato dall'agitazione termica e diventa trascurabile ad alte temperature, ma per due molecole di vapor d'acqua a temperatura ambiente fornisce il contributo a  $C_6$  più importante, come mostrato nella seguente tabella.

### Contributi percentuali a $C_6$ per coppie di molecole polari

SISTEMA	dipolo-dipolo indotto	dipolo fluttuante-dipolo indotto	riorientamento dipolare a 300 K
$CO - CO$	0.085	99.91	0.005
$HCl - HCl$	4	81	15
$NH_3 - NH_3$	5	50	45
$H_2O - H_2O$	4	19	77

Aggiungiamo che le energie potenziali d'interazione per due molecole sono ben descritte da  $-C_6/r^6$  solo per distanze ben maggiori delle dimensioni atomiche. A piccole distanze è necessario tener conto dei seguenti fatti.

- I dipoli indotti non sono centrati sulle molecole ed il termine  $-C_6/r^6$  sottovaluta l'energia potenziale di dispersione. Per tenerne conto possiamo farci guidare ancora una volta dall'equazione 20) e notare che

$$U(r) = -\frac{C_6}{(r^2 - r_0^2)^3} = -\frac{C_6}{r^6(1 - r_0^2/r^2)^3} \approx -\frac{C_6}{r^6} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)^3 \approx -\frac{C_6}{r^6} - \frac{C_8}{r^8} - \frac{C_{10}}{r^{10}} - \dots$$

Ma non si pretenda di valutare i **coefficienti multipolari**  $C_6$ ,  $C_8$ ,  $C_{10}$ ,... con questo approccio, devono essere calcolati con metodi quantistici.

- Quando le nuvole elettroniche cominciano a sovrapporsi intervengono forze repulsive molto intense e l'energia potenziale acquista un termine positivo che

aumenta vertiginosamente al diminuire della distanza. Per una data coppia di atomi l'energia potenziale complessiva si annulla ad una distanza indicata con  $\sigma$  e diventa molto grande a distanze minori di  $\sigma$ . Un'approssimazione molto usata per descrivere l'energia potenziale complessiva è fornita dal

$$\text{potenziale di Lennard - Jones} \quad U(r) = \frac{C_6}{r^6} \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 - 1 \right]$$

Infine diciamo che le forze di riorientamento, induttive e dispersive, complessivamente, prendono il nome di **forze di van der Waals**.

## ESERCIZI

1) Riportare in grafico il potenziale di Lennard-Jones e valutare: a) la distanza di equilibrio  $r_m$  (distanza alla quale la forza è nulla), b) la profondità della buca di potenziale (energia potenziale minima).

### 3.14 Polarizzazione di una sfera dielettrica

Finora abbiamo considerato palline metalliche, ora consideriamo una pallina dielettrica neutra di costante dielettrica  $\epsilon = 1 + \chi$ , stimolata da un campo elettrico  $\mathbf{E}_S$  uniforme. Rispetto al caso della pallina metallica la situazione è diversa perché nella pallina dielettrica il campo di risposta  $\mathbf{E}_R$  non è sufficiente a compensare il campo di stimolo, quindi il campo ELETTRICO non è nullo. Per descrivere la situazione in modo quantitativo cominciamo a ricordare che il campo di polarizzazione  $\mathbf{P}$  è legato al campo ELETTRICO dalla relazione

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi [\mathbf{E}_S + \mathbf{E}_R]$$

Poi ricordiamo che la pallina acquista la densità di carica superficiale  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , e ricordiamo che tale distribuzione di carica genera il campo di risposta dato dall'equazione 2.11')

$$\mathbf{E}_R = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$$

Dalle due relazioni possiamo trarre le seguenti conclusioni.

- Il campo di polarizzazione entro la sfera dielettrica risulta

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{3\chi}{\chi + 3} \mathbf{E}_S \quad (3.27)$$

- La sfera acquista il momento di dipolo

$$\mathbf{p} = 3\epsilon_0 \mathcal{V} \frac{\chi}{\chi + 3} \mathbf{E}_S \quad (3.28)$$

Si noti che, rispetto al momento di dipolo indotto dallo stesso campo di stimolo in una pallina metallica di ugual volume, il momento di dipolo indotto nella pallina dielettrica risulta ridotto del fattore

$$\frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

- Il campo ELETTRICO entro la sfera dielettrica ha sempre lo stesso verso del campo di stimolo, ma è meno intenso e vale

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \chi} = \frac{3}{\chi + 3} \mathbf{E}_S \quad (3.29)$$

Dunque possiamo dire che il dielettrico scherma la regione interna tanto più efficacemente quanto più grande è la costante dielettrica.

A questo punto crediamo opportuno prevenire un possibile malinteso. Le equazioni 28) e 29) inducono a pensare che una pallina dielettrica con  $\chi$  molto grande si comporti come una pallina metallica: le due palline acquistano la stessa distribuzione di carica elettrica e schermano efficacemente il campo di stimolo rendendo quasi nullo o nullo il campo ELETTRICO interno. Ma non si deve dimenticare che le due palline rispondono in modo diverso ai transienti ed agli stimoli armonici: le palline metalliche rispondono con correnti di conduzione che dissipano energia, quelle dielettriche con correnti di polarizzazione che conservano l'energia. Per tale ragione conviene insistere nel dire che una pallina metallica ha suscettività nulla, senza pensare che  $\mathbf{p}/\mathcal{V}$  sia il campo di polarizzazione al suo interno.

## ESERCIZI

1) Una pallina dielettrica di diametro  $2 \text{ cm}$  è uniformemente polarizzata con  $P = 10^6 \text{ C/m}^2$ . Descrivere la distribuzione di carica e calcolare: a) la densità di carica superficiale, b) il campo elettrico prodotto dalla pallina al suo interno. Si noti che non è stato necessario conoscere  $\epsilon$  per rispondere alle domande poste finora. Ora porre  $\epsilon = 4$  e calcolare c) il campo ELETTRICO interno, d) il campo elettrico di stimolo

2) Una sferetta metallica di raggio  $1 \text{ mm}$ , carica con  $Q = 10^{-12} \text{ C}$ , è al centro di una sfera dielettrica di raggio  $10 \text{ cm}$  ed  $\epsilon = 4$ . Calcolare i salti di: a)  $D$  all'interfaccia metallo-dielettrico, b)  $D$  ed  $E$  all'interfaccia dielettrico-vuoto. c) Le densità di carica di polarizzazione alle interfacce metallo-dielettrico e vuoto-dielettrico.

3) Una pallina dielettrica di diametro  $2 \text{ cm}$ , stimolata da un campo elettrico da  $1000 \text{ V/m}$ , ha campo ELETTRICO interno di  $200 \text{ V/m}$ . Calcolare: a) la costante dielettrica del materiale, b) il momento di dipolo della pallina.

4) A temperatura ambiente l'acqua liquida ha costante dielettrica  $80$ . Una nebbiolina con gocce di diametro  $10 \text{ }\mu\text{m}$  e densità di  $10^9 \text{ gocce/m}^3$  è posta in un campo elettrico uniforme di  $1000 \text{ V/m}$ . Calcolare: a) il momento di dipolo di una goccia, b) il campo ELETTRICO entro le gocce, c) il campo di polarizzazione nella nebbiolina, d) la costante dielettrica della nebbiolina.

5) La nebbiolina descritta nell'esercizio precedente entra tra le armature di un condensatore sferico con elettrodi di diametri  $1 \text{ cm}$  ed  $1 \text{ m}$ , alimentato con tensione di  $1000 \text{ V}$ . Che cosa avviene?

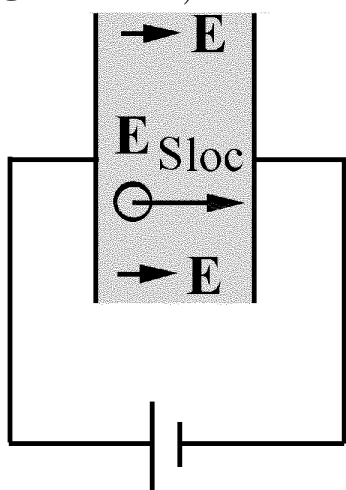
### 3.15 Campo elettrico di stimolo locale

Cominciamo ad affrontare il problema illustrato in figura 30a). Entro un dielettrico omogeneo di costante dielettrica  $\epsilon = 1 + \chi$ , permeato dal campo ELETTRICO  $\mathbf{E}$ , individuiamo idealmente una sferetta e domandiamo: quale **campo elettrico di stimolo locale**  $\mathbf{E}_{Sloc}$  agisce sulla sferetta? In altre parole: quale campo elettrico stimola la sferetta quando il campo ELETTRICO interno è uguale ad  $\mathbf{E}$ ? Quest'ultima formulazione rende chiaro che il problema è l'inverso di quello affrontato nel paragrafo precedente. Quindi basta partire dall'equazione 29) per rispondere

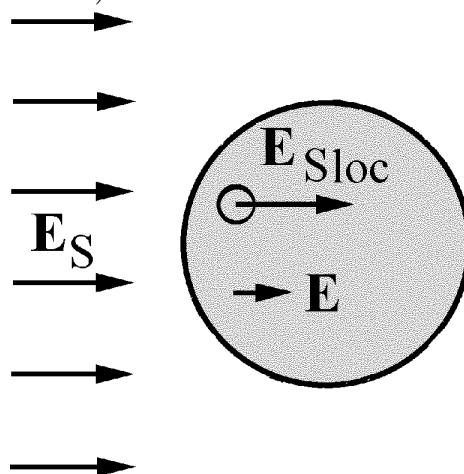
$$\mathbf{E}_{Sloc} = \frac{\chi + 3}{3} \mathbf{E} \quad (3.30)$$

Passiamo a considerare la situazione illustrata in figura 30b). Una microsferetta dielettrica è individuata idealmente entro una pallina dello stesso dielettrico stimolata dal campo uniforme  $\mathbf{E}_S$ . Domandiamo: quale campo elettrico di stimolo locale agisce sulla microsferetta? La risposta è semplicissima: il campo ELETTRICO nella pallina è dato dall'equazione 29), quindi il campo elettrico che stimola la microsferetta, dato dall'equazione 30), coincide con il campo elettrico che stimola la pallina. Si noti, però, che questa conclusione vale perché anche la pallina ha forma sferica. Se la microsferetta fosse individuata entro una barretta cilindrica l'equazione 30) varrebbe ancora, ma l'equazione 29) dovrebbe essere sostituita da una relazione dipendente dall'angolo formato dalla barretta con il campo di stimolo.

Fig. 3.30 a)



b)



### 3.16 Modello di Clausius-Mossotti

Ora ci proponiamo di descrivere la polarizzazione di una pallina dielettrica alla luce del modello proposto indipendentemente da Clausius e da Mossotti verso la metà dell'800. Il modello è appropriato per la classe di materiali

costituiti da atomi o molecole non polari che interagiscono solo con forze dispersive, ad esempio per l'azoto, l'argon ed il tetracloruro di carbonio. Per questi materiali dielettrici possiamo pensare che gli atomi o le molecole siano microsferette metalliche di volume  $\mathcal{V}_{at}$  ben isolate l'una dall'altra. E possiamo pensare che una goccia sferica di volume  $\mathcal{V}$ , contenente  $N$  molecole del materiale abbia **volume polarizzabile** pari a  $N\mathcal{V}_{at}$ . Pertanto la frazione di volume polarizzabile vale

$$\frac{N\mathcal{V}_{at}}{\mathcal{V}} = n\mathcal{V}_{at}$$

dove  $n = N/\mathcal{V}$  è la densità di atomi o molecole. Dal paragrafo precedente sappiamo che una molecola immersa nella goccia è stimolata dallo stesso campo che stimola la goccia, quindi possiamo aspettarci che il momento di dipolo acquistato dalla goccia sia  $n\mathcal{V}_{at}$  volte minore di quel che sarebbe se la goccia fosse metallica. Ciò suggerisce di identificare il fattore  $n\mathcal{V}_{at}$  con il fattore  $\chi/(\chi + 3)$  che entra nell'equazione 28), e conduce all'equazione di Clausius-Mossotti

$$\mathcal{V}_{at} = \frac{1}{n} \frac{\chi(n)}{\chi(n) + 3} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{V}_{at} = \frac{1}{n} \frac{\epsilon(n) - 1}{\epsilon(n) + 2} \quad (3.31)$$

Abbiamo scritto  $\chi(n)$  ed  $\epsilon(n)$  per mettere in evidenza che tali grandezze dipendono dalla densità di molecole. In realtà le misure di suscettività dielettrica per gas e vapori non polari mostrano che  $\chi(n)/(\chi(n) + 3)$  è davvero proporzionale alla densità in un intervallo molto esteso che giunge sino alle densità dei liquidi. Quindi  $\mathcal{V}_{at}$  non dipende dalla densità e ciò conferma l'idea che le equazioni 31) individuino davvero il volume molecolare, inteso come "volume polarizzabile" della singola molecola.

Invertendo le equazioni 31) si ottiene

$$\chi(n) = \frac{3n\mathcal{V}_{at}}{1 - n\mathcal{V}_{at}} \quad \text{oppure} \quad \epsilon(n) = \frac{1 + 2n\mathcal{V}_{at}}{1 - n\mathcal{V}_{at}} \quad (3.32)$$

e ciò consente di stimare la costante dielettrica di gas e liquidi non polari in funzione della frazione  $n\mathcal{V}_{at}$  di volume polarizzabile. Ad esempio, ammettendo che un liquido abbia  $n\mathcal{V}_{at}$  uguale ad  $1/2$ , possiamo prevedere che  $\epsilon$  non sia molto diverso da 4, cosa in ragionevole accordo con i valori tipici della costante dielettrica di liquidi non polari.

Aggiungiamo che si usa scrivere le equazioni 31) e 32) ponendo  $\alpha = 3\mathcal{V}_{at}$  e si usa attribuire il nome di **polarizzabilità atomica o molecolare alla grandezza  $\alpha$** . I valori di  $\alpha$  per alcune sostanze sono riportati nella tabella.

### Polarizzabilità $\alpha = 3\mathcal{V}_{at}$ di alcune molecole in $\text{\AA}^3$

<i>He</i>	2.5	<i>H<sub>2</sub></i>	10	<i>H<sub>2</sub>O</i>	19
<i>Ne</i>	5.0	<i>O<sub>2</sub></i>	19	<i>CH<sub>4</sub></i>	33
<i>Ar</i>	20	<i>N<sub>2</sub></i>	22	<i>CO<sub>2</sub></i>	33
<i>Xe</i>	51	<i>CO</i>	24	<i>CCL<sub>4</sub></i>	127

Infine diciamo due parole sulla costante dielettrica dei materiali composti da molecole polari. Si può essere indotti a pensare che un solido costituito da molecole polari sia permanentemente polarizzato, ma non è così: a meno di casi molto particolari, quando le molecole si uniscono a formare il solido i dipoli rigidi perdono individualità oppure rimangono liberi di ruotare indipendentemente l'uno dall'altro. Nel primo caso abbiamo un solido con una distribuzione di carica rilassata  $\rho_0(\mathbf{r})$  che risponde ad un campo elettrico polarizzandosi come un qualunque solido con molecole non polari. Nel secondo caso i dipoli molecolari rimangono liberi di ruotare anche nel solido, come nel liquido o nel gas, e dobbiamo descrivere il sistema rilassato come un "gas di dipoli rigidi, ciascuno orientato casualmente. In questo caso la presenza di un campo di stimolo può **orientare** preferenzialmente i dipoli e generare un campo di polarizzazione molto maggiore di quello che, a parità di condizioni, viene prodotto nei solidi e liquidi non polari. Per questa ragione la costante dielettrica dell'acqua è molto grande. Naturalmente l'agitazione termica contrasta l'orientamento preferenziale dei dipoli nella direzione del campo, quindi la costante dielettrica dei materiali polari diminuisce all'aumentare della temperatura. Aggiungiamo che quando la frequenza di oscillazione del campo diventa dell'ordine di  $10^{12} \text{ s}^{-1}$  o maggiore l'effetto di orientamento diventa trascurabile perché i core atomici, essendo pesanti, cessano di rispondere al campo di stimolo. Per questa ragione, a frequenze ottiche la costante dielettrica dell'acqua è quasi cinquanta volte minore di quella statica.

## ESERCIZI

1) Una pallina composta da molecole inerti non polari di peso molecolare 120 ha densità relativa 1.2 e costante dielettrica 4. Calcolare: a) la densità di molecole, b) la polarizzabilità delle molecole, c) il momento di dipolo acquistato da una molecola quando la pallina viene posta in un campo di stimolo da  $10^6 \text{ V/m}$ , d) il campo ELETTRICO entro la pallina nelle condizioni c).

2) La molecola d'azoto ha polarizzabilità di  $22 \text{ \AA}^3$  e peso molecolare 28. L'azoto liquido ha densità relativa (all'acqua) 0.8 circa. a) Valutare la costante dielettrica del gas contenuto in una bombola piena di azoto a pressione di  $200 \text{ Atm}$  ed a temperatura ambiente. b) Valutare la costante dielettrica dell'azoto liquido. Poi considerare una goccia d'azoto liquido di volume  $1 \text{ mm}^3$  stimolata da un campo elettrico uniforme da  $10^6 \text{ V/m}$  e calcolare: c) il campo ELETTRICO interno alla goccia, d) il campo di stimolo agente su una molecola. e) Infine pensare che il campo elettrico che stimola la goccia passi gradualmente da  $10^6 \text{ V/m}$  a  $5 \cdot 10^5 \text{ V/m}$  nel passare dal piano  $z = 0$  al piano  $z = 10 \text{ cm}$  e calcolare la forza agente sulla goccia quando è nell'origine e quando è sul piano  $z = 10 \text{ cm}$ .



# Capitolo 4

## Magnetostatica

In questo capitolo introduciamo le leggi della magnetostatica e descriviamo il campo magnetico prodotto da correnti “magnetiche” ed elettriche stazionarie. Poi studiamo le forze esercitate dal campo magnetico su correnti elettriche e su magnetini elementari.

### 4.1 Magnetismo preamperiano, campo magnetico $\mathbf{B}$

Al magnetismo è dedicata la prima opera scientifica dell’era moderna: il “De Magnete” di William Gilbert, pubblicato all’alba del 1600. A quei tempi la bussola magnetica era già in uso da quattro secoli ed aveva una straordinaria importanza strategica. Anche il campo magnetico terrestre era ben conosciuto: erano da tempo disponibili mappe di declinazione magnetica e cominciarono ad apparire le prime mappe di inclinazione. Come mostrato in figura 1 l’inclinazione  $i_m$  è l’angolo che un ago magnetico libero di ruotare intorno al baricentro forma con il piano orizzontale, mentre la declinazione  $d_m$  è l’angolo che la proiezione orizzontale dell’ago magnetico forma con il Nord geografico.

Fig. 4.1

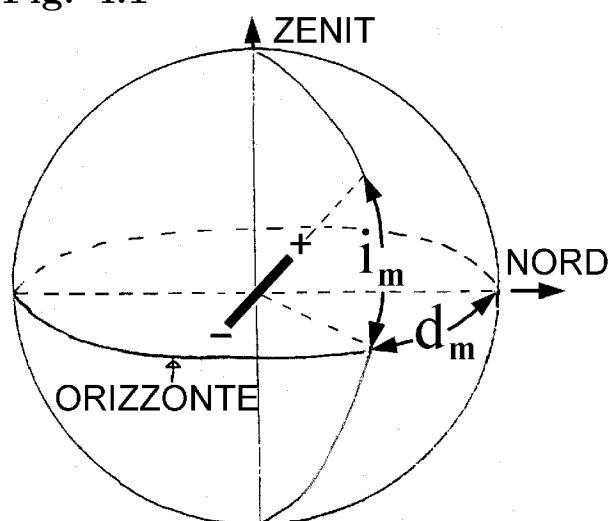
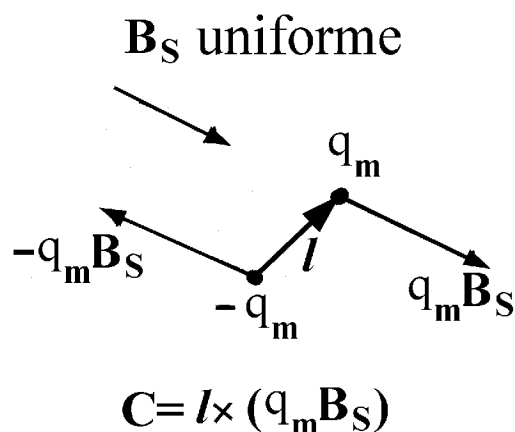


Fig. 4.2



Gilbert descrive il metodo della limatura di ferro per visualizzare il campo di forze magnetiche, mostra visivamente che i frammenti di aghi magnetici,

comunque spezzati, conservano natura dipolare, propone il modello a magneti per giustificare il magnetismo terrestre e descrive i processi termici di magnetizzazione e smagnetizzazione.

Nel 1789 Coulomb, ingegnere militare esperto nella tecnologia degli aghi magnetici, misura il momento risultante delle forze agenti su un ago magnetico lungo e sottile posto in presenza di un secondo ago lungo e sottile, variamente orientato rispetto al primo, ed apre la via per una descrizione quantitativa degli effetti magnetici. Coulomb interpreta i risultati dei suoi esperimenti pensando che gli estremi di un ago, detti poli, abbiano “carica magnetica”  $\pm q_m$ , e pensando che i poli di aghi diversi interagiscano con una legge di forza bipolare analoga a quella elettrica. Il segno positivo per la “carica magnetica” viene attribuito, per convenzione, al polo che volge al Nord quando l’ago è sottratto all’azione di altri aghi o magneti. Il prodotto della “carica magnetica”  $q_m$  per il vettore  $\mathbf{l}$  che congiunge il polo negativo con quello positivo è il **momento magnetico** dell’ago e viene indicato con  $\mathbf{m} = q_m \mathbf{l}$ . Il campo magnetico  $\mathbf{B}_S$  che stimola un aghetto viene definito descrivendo con  $\pm q_m \mathbf{B}_S$  le forze che esercita sui poli dell’aghetto, come mostrato in figura 2. Pertanto, su un aghetto di momento magnetico  $\mathbf{m}$  il campo magnetico  $\mathbf{B}_S$  esercita una coppia di momento

$$\mathbf{C} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_S$$

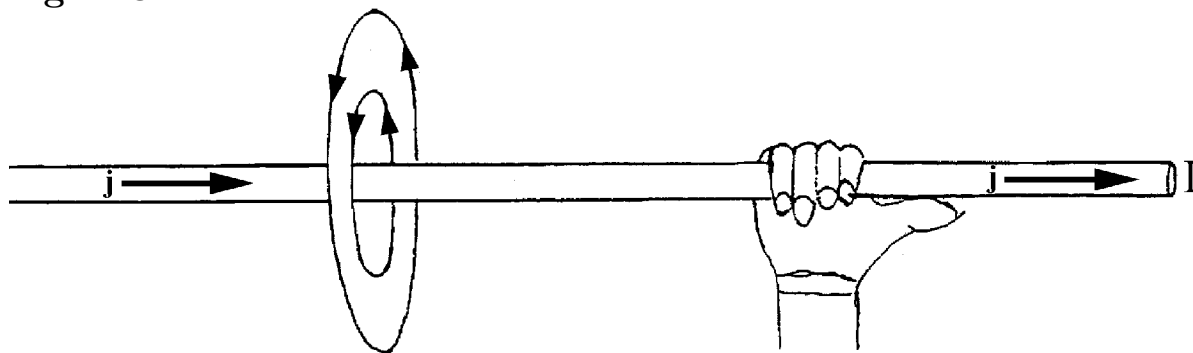
Abbiamo scritto “cariche magnetiche” tra virgolette, e continueremo a farlo sistematicamente, per ricordare che la “carica magnetica” è un ente fittizio: una carica magnetica isolata (monopolo magnetico) non è mai stata scoperta. Tuttavia, per una ragione che presto risulterà chiara, l’approccio di Coulomb rimane lecito e fruttuoso, pur di ricordare che **le “cariche magnetiche” di un segno sono sempre legate a “cariche magnetiche” di ugual valore e segno opposto.**

Le idee di Gilbert e le misure di Coulomb consentono di attribuire un ben preciso momento magnetico al nucleo terrestre ma l’origine del magnetismo rimane misteriosa sino al 1820. Qualche anno prima, in un esperimento d’aula, Ørsted aveva osservato che un ago magnetico tende a disporsi ortogonalmente ad un filo conduttore percorso da corrente e aveva così scoperto che una corrente elettrica stazionaria genera un campo magnetico. Nel 1820 Biot e Savart descrivono quantitativamente il campo magnetico prodotto da correnti: a distanza  $R$  da un filo rettilineo molto lungo percorso da corrente  $I$  il campo magnetico ha intensità

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

dove  $\mu_0$  è una costante dipendente dalle unità di misura scelte. Come mostrato in figura 3,  $\mathbf{B}$  circola intorno al filo nel verso dal polso alle dita di una mano destra che impugni il filo con pollice nel verso della corrente. Il fatto

Fig. 4.3



che  $B$  decresca come l'inverso della distanza vale solo a distanze ben minori della lunghezza del filo: vedremo presto che, a grandi distanze dai circuiti o dai magneti, il campo magnetostatico decade con il cubo (o con potenze superiori) della distanza.

### ESERCIZI

1) Nel SI l'unità di misura di  $\mathbf{B}$  prende il nome di *tesla* ( $T$ ), quella del flusso di  $\mathbf{B}$  prende il nome di *weber* ( $Wb$ ) ed il prodotto  $\Omega s$  prende il nome di *henry* ( $H$ ). Alla costante dimensionata  $\mu_0$  viene attribuito il valore esatto  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ . Mostrare che; a)  $T = HA/m^2 = Vs/m^2 = Wb/m^2$ , b) l'unità di misura del momento magnetico è il  $J/T = Am^2$ , c) l'unità di misura della "carica magnetica" è il  $N/T = Am$ .

2) L'equipaggio mobile di una bussola magnetica è formato da quattro aghi paralleli, ciascuno con  $m = 0.1 J/T$ , ed è vincolato a ruotare nel piano orizzontale in un sito con inclinazione magnetica di  $60^\circ$ . Il campo magnetico terrestre ha intensità  $\approx 5 \cdot 10^{-5} T$ . Calcolare il momento delle forze agenti sull'equipaggio mobile quando devia di  $30^\circ$  dal nord magnetico.

3) Un ago con  $m = 0.01 J/T$  e momento di inerzia  $10^{-6} kgm^2$ , libero di ruotare intorno al baricentro, vibra con frequenza  $\omega = 30 s^{-1}$ . Quale intensità ha il campo magnetico che lo stimola?

4) Calcolare il momento delle forze agenti su un aghetto magnetico con  $m = 0.01 J/T$  posto a distanza di  $50 cm$  da un filo rettilineo molto lungo percorso da corrente di  $10 A$ , nei seguenti casi: a) aghetto parallelo al filo, b) aghetto ortogonale al filo, in un piano contenente il filo, c) aghetto ortogonale al filo, in un piano ortogonale al filo.

## 4.2 Unificazione elettro-magnetica

A questo punto entra in scena Ampère e, con misure sistematiche accompagnate da straordinarie intuizioni, unifica le forze elettriche e magnetiche in un unico quadro. In realtà la via indicata da Ampère è un po' diversa da quella che Maxwell seguirà più tardi e che giunge ai nostri giorni, ma qui falsiamo un po' la storia ed esponiamo le idee di Ampère con il linguaggio

di Maxwell: quando diremo “Ampère dice...” si dovrà intendere “Maxwell esprime l’idea di Ampère dicendo...”

Anzitutto Ampère nega l’esistenza delle “cariche magnetiche” considerate da Coulomb. Ciò si esprime dicendo che la divergenza del campo magnetico  $\mathbf{B}$  è nulla ovunque e sempre, ovvero che vale la

$$\text{II equazione di Maxwell} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (4.1)$$

Dunque non esistono sorgenti dalle quali  $\mathbf{B}$  diverga: **non esistono i monopoli magnetici**. Di conseguenza **il flusso di  $\mathbf{B}$  uscente da una qualunque superficie chiusa è nullo**, ovvero **i flussi di  $\mathbf{B}$  attraverso superfici diverse orlate da una stessa curva chiusa sono uguali**.

L’idea che le sorgenti di  $\mathbf{B}$  siano le correnti viene espressa dalla

$$\text{legge di Ampère} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Questa equazione dice che la circolazione del campo magnetostatico lungo una qualunque curva chiusa è proporzionale alla corrente che attraversa una qualunque superficie orlata dalla curva. Dunque  $\mathbf{B}$  non diverge dalle “cariche magnetiche”, ma circola intorno alle correnti elettriche e “magnetiche”. Queste sono le vere sorgenti del campo  $\mathbf{B}$ .

Ampère scopre anche che un filo conduttore percorso da corrente continua e stimolato da un campo magnetico è sottoposto ad una forza ortogonale al

Fig. 4.4

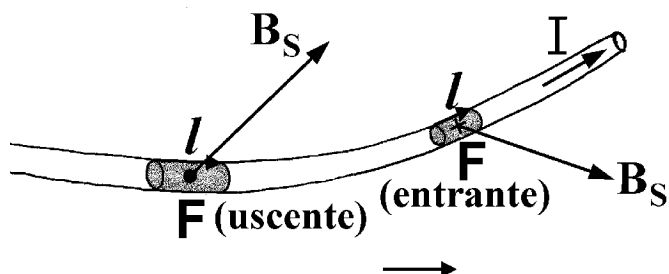
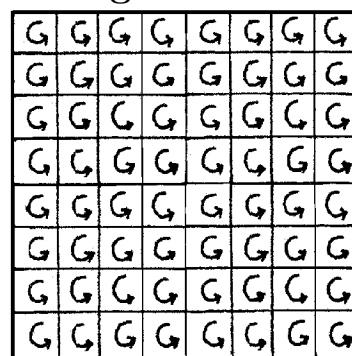


Fig. 4.5



filo ed al campo. Precisamente, su un pezzo di filo disposto lungo il vettore  $\mathbf{l}$  e percorso dalla corrente  $I$  agisce la forza  $\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}_S$ , come mostrato in figura 4. Quando il pezzo di filo ha anche carica elettrica  $q$ , la forza complessiva risulta

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_S + I\mathbf{l} \times \mathbf{B}_S \quad (4.2)$$

Dividendo ambo i membri per il volume  $\mathcal{V}$  del pezzo di filo e tenendo conto che  $I\mathbf{l}/\mathcal{V} = \mathbf{j}$  è la densità di corrente, vediamo che la densità di forza, la densità di carica, la densità di corrente ed i campi elettrico e magnetico di stimolo sono legati dalla

$$\text{legge di forza locale} \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_S(\mathbf{r}) \quad (4.2')$$

Il primo termine a secondo membro è la densità di forza elettrica o coulombiana, il secondo è la densità di forza magnetica o amperiana. Il prodotto  $\mathbf{f}(\mathbf{r})dV$  è la forza agente sull'elemento di materia contenuto nel volumetto  $dV$  centrato nel punto  $\mathbf{r}$ .

Infine Ampère interpreta le forze esercitate dal campo magnetico sugli aghi magnetici attribuendole all'azione del campo magnetico sulle correnti “magnetiche” confinate negli atomi o molecole degli aghi, e stabilisce l'equivalenza di dipoli magnetici e spire circolari percorse da corrente. Con linguaggio locale l'equivalenza di correnti “magnetiche” e dipoli magnetici è espressa dalla relazione fondamentale introdotta nel paragrafo 1.10:

$$\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(t, \mathbf{r}) \quad (4.3)$$

relazione che associa la densità di corrente “magnetica”  $\mathbf{j}_m(t, \mathbf{r})$  alla densità di momento magnetico  $\mathbf{M}(t, \mathbf{r})$ . Partendo dall'equazione 3), abbiamo visto che una barra uniformemente magnetizzata ha correnti “magnetiche” distribuite solo sul mantello con densità lineare  $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$ . Per aiutare l'intuizione consideriamo il modello illustrato in figura 5: pensiamo che una barra di sezione quadrata sia uniformemente magnetizzata con  $\mathbf{M}$  normale al foglio e sia composta da cubetti contigui, tutti magnetizzati nel verso di  $\mathbf{M}$ . Attribuendo il momento magnetico dei cubetti a correnti circolanti come in figura, si vede che le correnti “magnetiche” sono nulle entro la barra e sono presenti solo sul mantello, infatti ogni punto interno si trova sulle facce di due cubetti contigui percorse da correnti opposte, mentre ogni punto del mantello si trova sulla faccia di un solo cubetto.

Ad evitare malintesi, diciamo che l'equazione 3) ha validità generale, ma le correnti “magnetiche” non possono essere descritte con modelli microscopici classici, non solo perché le particelle microscopiche non seguono le leggi della meccanica classica, ma anche perché il loro moto classico non è consistente con l'equazione 3). Ad esempio, la corrente associata ad un elettrone in moto classico intorno ad un protone non è una corrente “magnetica”. Infatti, se l'elettrone orbitasse intorno al protone come un pianeta intorno al sole, un volumetto attraversato periodicamente dall'elettrone avrebbe densità di carica dipendente dal tempo, quindi la divergenza di  $\mathbf{j}_m$  non sarebbe nulla e l'equazione 3) sarebbe violata. In realtà nell'atomo di idrogeno eccitato ed in alcuni atomi rilassati può avvenire che un elettrone, invece di essere distribuito in una nuvola a simmetria sferica, sia distribuito in un anello centrato sul nucleo e rotante su se stesso come un anello di fumo. In tal caso la densità di carica rimane inalterata nel tempo e la corrente è il prototipo delle correnti “magnetiche” orbitali. Oltre a tali correnti “magnetiche” esistono correnti “magnetiche” associate alle singole particelle elementari, ed è proprio la corrente “magnetica” associata all'elettrone ad essere la principale responsabile del comportamento dei magneti. Un vecchio modello classico

descrivere l'elettrone come una trottola (spin in inglese) ed associava il momento magnetico che l'elettrone manifesta negli esperimenti alla rotazione della trottola carica. Oggi sappiamo che tale modello classico è inconsistente, ma continuiamo ad usare la dizione **momento magnetico di spin** per il momento magnetico intrinseco delle particelle elementari.

Si noti che le virgolette in correnti “magnetiche” stanno a ricordare che il nome è improprio: le correnti “magnetiche” sono correnti elettriche non descrivibili con modelli classici, ma esistono eccome ! Invece, le virgolette in “carica magnetica” stanno a ricordare che tale ente è fittizio.

A questo punto, prima di proseguire nello studio dei fenomeni magnetici, riportiamo alcune note sul Sistema Internazionale (SI) di unità di misura. Con le unità usate un tempo il valore della costante dimensionata  $\mu_0$  risultava tanto vicino a  $4\pi 10^{-7} H/m$  che, a partire dal 1946, si è deciso di porre  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$  per definizione, lasciando che i progressi metrologici possano cambiare il campione di  $H/m$ , ma non il valore numerico di  $\mu_0$ . Nel 1967 è stato scelto come unità di misura degli intervalli di tempo il secondo scandito da un particolare orologio atomico e nel 1983 si è deciso di fissare una volta per tutte il valore numerico della grandezza  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  che, vedremo, risulta essere la velocità della luce nel vuoto. Si è posto  $c = 299\,792\,458\, m/s$ , lasciando che il progresso metrologico possa cambiare il campione di metro, ma non il valore numerico di  $c$ . Pertanto anche la costante dimensionata  $\epsilon_0$  ha un valore esatto dato da  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ . Il campione di massa rimane il famoso cilindro di platino-rodio conservato a Parigi. Aggiungiamo che il gauss ( $G$ ) è oggi definito come sottomultiplo del tesla, precisamente  $1\, G = 10^{-4}\, T$ .

## ESERCIZI

- 1) Mostrare che l'unità di misura SI di  $M$  è  $A/m$ .
- 2) Pensare che un'interfaccia sia percorsa da correnti “magnetiche” con densità lineare  $M$  e mostrare che: a) qualunque sia  $M$  le proiezioni di  $\mathbf{B}$  sulla normale all'interfaccia sono uguali dalle due parti, b) le proiezioni di  $\mathbf{B}$  sul piano d'interfaccia differiscono di  $\mu_0 M$ .
- 3) Una superficie è attraversata da conduttori variamente orientati, con l' $i$ -esimo conduttore percorso da corrente  $I_i$ , positiva o negativa a seconda che attraversi la superficie in un verso o nell'altro. Calcolare la circolazione di  $\mathbf{B}$  sull'orlo della superficie.
- 4) Una barra con densità atomica  $1.1 \cdot 10^{29}\, atomi/m^3$  è magnetizzata con  $M = 10^6\, A/m$ . Calcolare il momento magnetico di un atomo e commentare.

## 4.3 Legge di Ampère-Maxwell, campo magnetico $\mathbf{H}$

Ora introduciamo un'idea di Maxwell che ha prodotto una rivoluzione nella fisica, nella tecnologia e nella vita quotidiana. L'idea ha origine da un'osser-

vazione molto semplice: la legge di Ampère non può valere quando la densità di carica elettrica dipende dal tempo. Infatti se scrivessimo  $\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  dovremmo ammettere che la divergenza di  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  sia sempre nulla, e cadremmo in contraddizione con la legge di conservazione della carica. Per superare questa inconsistenza Maxwell introduce la legge di

$$\text{Ampère – Maxwell} \quad \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \left[ \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right] \quad (4.4)$$

Per convincersi che questa legge è davvero consistente con la legge di conservazione della carica basta prendere la divergenza di ambo i membri e ricordare la legge di Gauss. Dunque le sorgenti del campo  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  non sono solo le densità di correnti elettriche e “magnetiche”, ma anche una densità di corrente di nuovo tipo, data da  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) / \partial t$ . Vedremo il significato fisico e l’importanza straordinaria di questo termine più avanti, per ora riscriviamo l’equazione 4) in forma diversa, sostituendo la densità di corrente  $\mathbf{j}$  con la sovrapposizione introdotta nel primo capitolo,

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{P}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}(t, \mathbf{r})$$

Sostituendo nell’equazione 4) e riarrangiando i termini otteniamo

$$\nabla \times [\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) - \mu_0 \mathbf{M}(t, \mathbf{r})] = \mu_0 \left[ \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{r})] \right]$$

Ricordando che  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  è il campo di spostamento elettrico  $\mathbf{D}$  ed introducendo il nuovo campo  $\mathbf{H}$  tale che

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{M}(t, \mathbf{r})] \quad (4.5)$$

la legge di Ampère-Maxwell diventa la

$$\text{IV equazione di Maxwell} \quad \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (4.6)$$

( La terza equazione di Maxwell verrà introdotta nel capitolo 6.)

Le ragioni che rendono il campo  $\mathbf{H}$  molto utile emergeranno quando studieremo l’energia elettromagnetica, ma già nei prossimi paragrafi potremo apprezzare la ragione che ha indotto i pionieri ad introdurlo.

#### 4.4 Teorema di equivalenza di Ampère, sfera magnetizzata e solenoide sferico

In condizioni stazionarie i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$  non dipendono dal tempo, quindi le equazioni generali del campo magnetostatico  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  sono

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r})] \quad (4.7)$$

Impareremo a calcolare  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  partendo direttamente da queste equazioni nel paragrafo 8, per ora notiamo che  $\mathbf{j}_f$  e  $\mathbf{j}_m$  vi giocano ruoli equivalenti ed enunciamo il **teorema di equivalenza di Ampère: distribuzioni di correnti con ugual densità producono lo stesso campo  $\mathbf{B}$ , qualunque sia la loro natura**. Tenendone conto possiamo calcolare il campo magnetostatico  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  con un metodo basato sulle conoscenze acquisite in elettrostatica. Cominciamo a notare che, in condizioni stazionarie e con correnti di conduzione nulle ovunque, l'equazione 6) si riduce a  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , mentre le equazioni 1) e 5) comportano che  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ . Dunque, in assenza di correnti di conduzione, il campo magnetostatico  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  soddisfa le equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.8)$$

identiche in forma alle equazioni differenziali elettrostatiche, **con  $\mathbf{E}$  sostituito da  $\mathbf{H}$  e con  $\rho/\epsilon_0$  sostituito dalla**

$$\text{densità di "carica magnetica" } \rho_m(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (4.9)$$

Pertanto, **in assenza di correnti di conduzione**, tutti i metodi di calcolo del campo elettrostatico possono essere usati per calcolare il campo  $\mathbf{H}$ . Ad esempio, il campo  $\mathbf{H}$  generato da un magnete permanente è descritto da

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathcal{V}' \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.10)$$

proprio come il campo elettrostatico è descritto dall'equazione 2.2). Noto  $\mathbf{M}$  e calcolato  $\mathbf{H}$ , basta usare l'equazione 5) per calcolare  $\mathbf{B}$ .

L'equazione 9) mostra che il campo  $\mathbf{M}$  gioca un ruolo analogo a quello del campo  $\mathbf{P}$ : la densità di "carica magnetica" è la divergenza di  $\mathbf{M}$  cambiata di segno come la densità di carica di polarizzazione è la divergenza di  $\mathbf{P}$  cambiata di segno. Quindi possiamo calcolare la densità superficiale di "carica magnetica" sulla superficie di un corpo magnetizzato proiettando  $\mathbf{M}$  sul versore normale esterno, precisamente

$$\sigma_m(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

Come primo esempio consideriamo una sfera di volume  $\mathcal{V}$  magnetizzata con  $\mathbf{M}$  uniforme come in figura 6. Dai risultati del paragrafo 2.7 possiamo dedurre quanto segue.

- Il campo  $\mathbf{H}$  è generato da una distribuzione di "carica magnetica" localizzata sulla superficie della sfera, con densità superficiale

$$\sigma_m(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$$

- Esternamente alla sfera,  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  coincide con il campo prodotto da un dipolo magnetico di momento  $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathcal{V}$  posto nel centro, ovvero

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$



Fig. 4.6

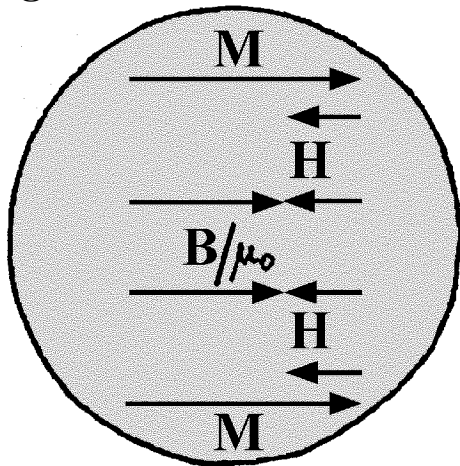
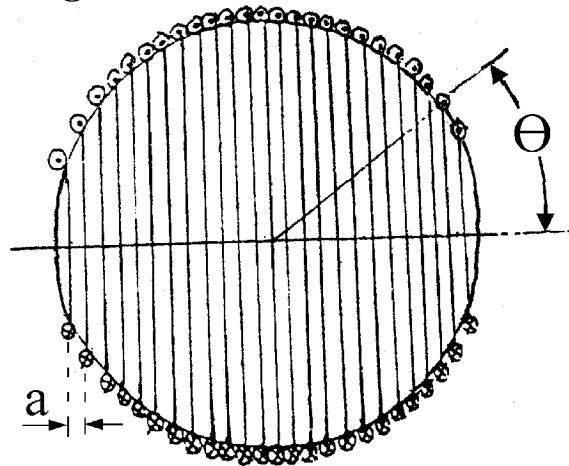


Fig. 4.7



- Entro la sfera  $\mathbf{H}$  è uniforme e vale

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{M}}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$$

Si noti bene che entro la sfera  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$  hanno versi opposti.

- Le linee di flusso di  $\mathbf{H}$  copiano quelle tracciate in figura 2.18:  $\mathbf{H}$  diverge dalle lunette di “carica magnetica”, uscendo dalla lunetta positiva ed entrando in quella negativa sia all’interno della sfera, sia all’esterno.

Insomma, **la sfera uniformemente magnetizzata produce il campo**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad \text{all'esterno e} \quad \mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} \quad \text{all'interno} \quad (4.12)$$

Ora consideriamo il **solenoido sferico** schematizzato in figura 7. Sulla superficie di una sfera vuota avvolgiamo un sottile filo di rame isolato avendo cura che i centri delle spire giacciono su un diametro a distanza  $a$  l’uno dall’altro, e facciamo passare la corrente  $I$  nell’avvolgimento. Poiché la distanza sul mantello tra due spire contigue vale  $a/\sin\theta$ , la densità lineare di corrente sulla superficie sferica vale  $(I/a)\sin\theta$  ed equivale a quella di una sfera di ugual raggio uniformemente magnetizzata con  $M = I/a$ . In realtà le correnti “magnetiche” nella sfera uniformemente magnetizzata sono spalmate sul mantello, mentre le correnti di conduzione nel solenoide sferico sono addensate entro spire più o meno distanziate, ma trascurando questa differenza, rilevante solo in prossimità delle spire, possiamo concludere che il solenoide sferico produce il campo  $\mathbf{B}$  dato dalle equazioni 12) con  $M = I/a$ . Dunque entro il solenoide sferico il campo magnetico  $\mathbf{B}$  ha intensità

$$B = \frac{2}{3}\mu_0 \frac{I}{a} \quad (4.13)$$

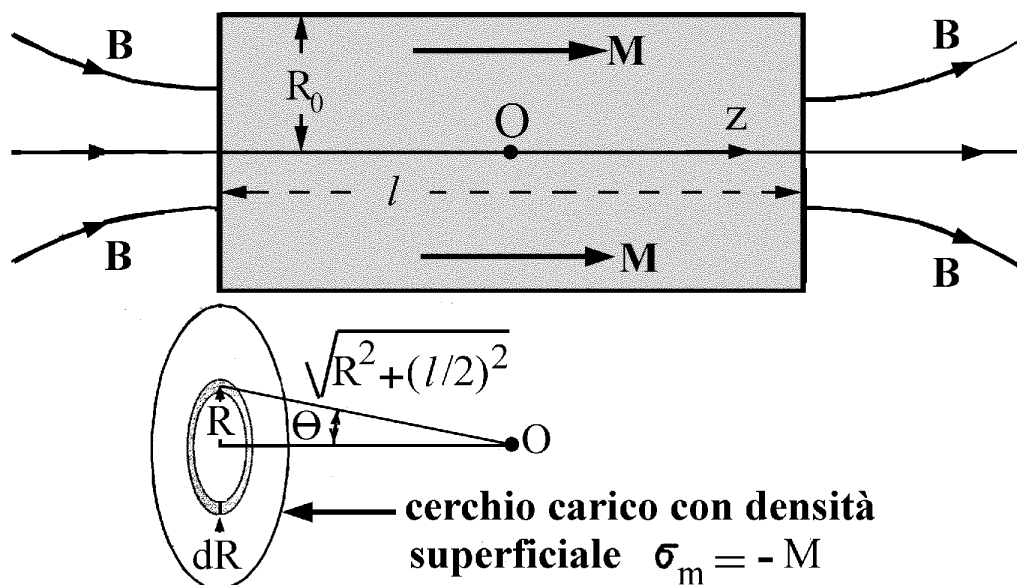
Ma attenzione: il campo  $\mathbf{H}$  entro il solenoide sferico vale  $\mathbf{B}/\mu_0$  ed è ben diverso da quello della sfera uniformemente magnetizzata. Ciò fa emergere un altro merito del campo  $\mathbf{H}$ : è vero che il solenoide sferico e la sfera di ugual raggio, uniformemente magnetizzata con  $M = I/a$ , producono lo stesso

campo  $\mathbf{B}$ , ma è anche vero che sono sistemi diversi, uno è vuoto, l'altro è pieno, l'uno richiede che un generatore faccia circolare corrente, l'altro è permanentemente magnetizzato. Dunque il campo  $\mathbf{B}$ , da solo, non individua lo stato magnetico del sistema che lo produce, ma  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  insieme danno una descrizione completa del sistema magnetostatico.

## 4.5 Barre magnetizzate e solenoidi lineari

Con riferimento alla figura 8, consideriamo una barra cilindrica di raggio  $R_0$  e lunghezza  $l$ , uniformemente magnetizzata con  $\mathbf{M}$  assiale. Tenendo conto dell'equazione 11) possiamo dire che la barra ha basi cariche con densità superficiale di "carica magnetica"  $\sigma_m = \pm M$ , pertanto siamo alle prese con il seguente problema di tipo elettrostatico: calcolare il campo  $\mathbf{H}$  prodotto da due cerchi paralleli, uno centrato in  $z = -l/2$ , carico con densità superficiale di "carica magnetica"  $-M$ , l'altro centrato in  $z = l/2$ , carico con densità superficiale di "carica magnetica"  $+M$ . Con un modesto calcolatore

Fig. 4.8



potremmo calcolare il campo magnetico in qualunque punto, ma qui ci limitiamo a calcolare il campo sull'asse con approccio analitico. Cominciamo a notare che al centro della barra il campo  $\mathbf{H}$  è diretto verso sinistra e riceve contributi uguali dai due cerchi di "carica magnetica". Per calcolare  $H_{centro}$  scomponiamo il cerchio di sinistra in anelli concentrici e consideriamo l'anello compreso tra  $R$  ed  $R + dR$ . Poiché l'angolo  $\theta$  mostrato in figura ha coseno  $(l/2)/\sqrt{R^2 + (l/2)^2}$ , l'anello contribuisce ad  $H_{centro}$  con

$$dH_{centro} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R dR M}{R^2 + (l/2)^2} \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + (l/2)^2}} = -\frac{Ml}{8} \frac{d(R^2)}{[R^2 + (l/2)^2]^{3/2}}$$

Integrando su  $R$  da 0 ad  $R_0$ , e moltiplicando il risultato per 2, a tener conto dei due cerchi, otteniamo

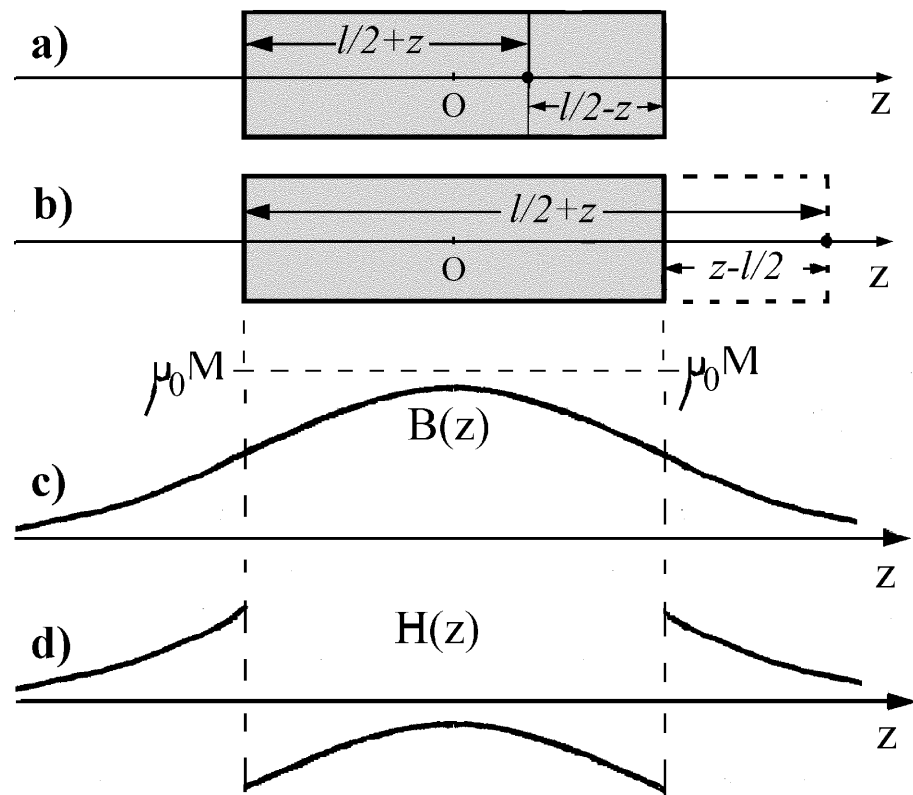
$$H_{centro} = -2 \frac{Ml}{8} \int_{(l/2)^2}^{R_0^2 + (l/2)^2} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = M \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + 4R_0^2/l^2}} - 1 \right] \quad (4.14)$$

Infine, ricordando che  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , vediamo che

$$B_{centro} = \frac{\mu_0 M}{\sqrt{1 + 4R_0^2/l^2}} \quad (4.15)$$

Per calcolare  $B(z)$  in altri punti dell'asse, invece di procedere con calcolo diretto, teniamo presente che  $\mathbf{B}$  è prodotto da correnti distribuite uniformemente sul mantello e, con riferimento alla figura 9, notiamo quanto segue.

**Fig. 4.9**



- Agli estremi della barra  $B$  vale la metà di quel che varrebbe al centro di una barra di lunghezza doppia. Pertanto il valore di  $B$  agli estremi si ottiene sostituendo  $l$  con  $2l$  nell'equazione 15) e dividendo per due:

$$B_{estremi} = \frac{\mu_0 M}{2\sqrt{1 + R_0^2/l^2}} \quad (4.16)$$

- Per  $0 \leq z \leq l/2$ ,  $B(z)$  è la somma dei valori che prende agli estremi delle due barre considerate in figura 9a). La barra di sinistra ha lunghezza  $l/2 + z$ , quella di destra ha lunghezza  $l/2 - z$ , quindi

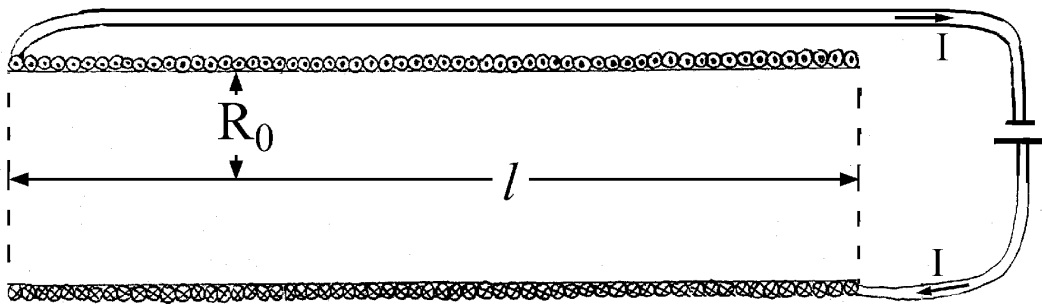
$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2/(l/2 - z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2/(l/2 + z)^2}} \right] \quad (4.17)$$

• Per  $z \geq l/2$   $B(z)$  è la differenza dei valori che prende agli estremi delle due barre considerate in figura 9b), entrambe a sinistra del punto considerato. La prima ha lunghezza  $l/2 + z$ , la seconda ha lunghezza  $z - l/2$ , quindi

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2/(l/2 + z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2/(l/2 - z)^2}} \right] \quad (4.17')$$

Come mostrato in figura 9c),  $B(z)$  è continuo ovunque, ha valore massimo al centro della barra e conserva ovunque lo stesso segno. Naturalmente  $H(z)$  è uguale a  $B(z)/\mu_0 - M$  entro la barra ed a  $B(z)/\mu_0$  all'esterno, quindi cambia segno nell'attraversare le basi e, in valore assoluto, è ben minore al centro che agli estremi, come mostrato in figura 9d). In particolare, quando  $l$  è molto maggiore di  $R_0$  il campo  $\mathbf{H}$  nella regione centrale è molto piccolo, infatti l'equazione 14) si riduce a  $H_{centro} \approx -2M(R_0/l)^2$ . Si ricordi anche che  $\mathbf{H}$  è il campo prodotto dalle "cariche magnetiche" delle basi, quindi nella regione centrale di una barra lunga e sottile  $\mathbf{H}$  rimane piccolissimo rispetto ad  $\mathbf{M}$  anche esternamente alla barra, di conseguenza  $\mathbf{B}$  è quasi uguale a  $\mu_0 \mathbf{M}$  all'interno ed è quasi nullo all'esterno.

**Fig. 4.10**



Passiamo a considerare il solenoide lineare mostrato in figura 10: sulla superficie di un cilindro vuoto di lunghezza  $l$  e raggio  $R_0$  è avvolto un sottile filo di rame ben isolato, a formare uno strato di  $N$  spire elicoidali a stretto contatto. Indichiamo con  $N/l$  la densità lineare di spire e notiamo che, quando l'avvolgimento è percorso da corrente  $I$ , la densità lineare di corrente nell'avvolgimento vale  $IN/l$ . Ammettendo che l'avvolgimento formi uno strato molto sottile e compatto, possiamo dire che il solenoide produce lo stesso campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  di una barra magnetizzata con  $M = IN/l$ , quindi il valore di  $B$  sull'asse è dato dalle equazioni 17) e 17') con  $M$  sostituito da  $IN/l$ . Naturalmente il campo  $\mathbf{H}$  interno al solenoide vale  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$  ed è ben diverso da quello interno alla barra magnetizzata.

## ESERCIZI

1) Attribuire il magnetismo terrestre ad un dipolo posto al centro della Terra, ricordare che alle nostre latitudini  $B \approx 500 \text{ mG}$ , che il raggio terrestre è di  $6300 \text{ km}$ , e calcolare: a) il momento del dipolo, b) i valori del campo all'equatore magnetico ed ai poli magnetici.

2) Una barretta cilindrica di diametro  $5\text{ mm}$  e lunghezza  $50\text{ cm}$  è magnetizzata in direzione assiale con  $M = 10^6\text{ A/m}$ . Calcolare: a)  $B$  al centro ed agli estremi, b)  $H$  agli estremi, dentro e fuori, c)  $\mathbf{B}$  sull'asse a distanza di  $10\text{ m}$  dal centro.

## 4.6 Dischi magnetizzati e spire circolari

Con riferimento alla figura 11, consideriamo un disco di spessore  $l$  molto minore del suo raggio  $R_0$ , magnetizzato uniformemente con  $\mathbf{M}$  normale alle facce. Ponendo  $z \approx l/2$  nelle equazioni 17) e 17') si vede che in prossimità delle facce, sia all'interno, sia all'esterno, il campo  $\mathbf{B}$  ha intensità ben approssimata da

Fig. 4.11

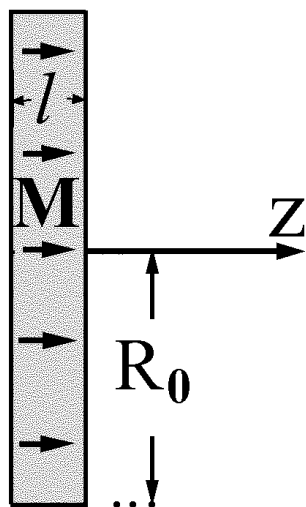
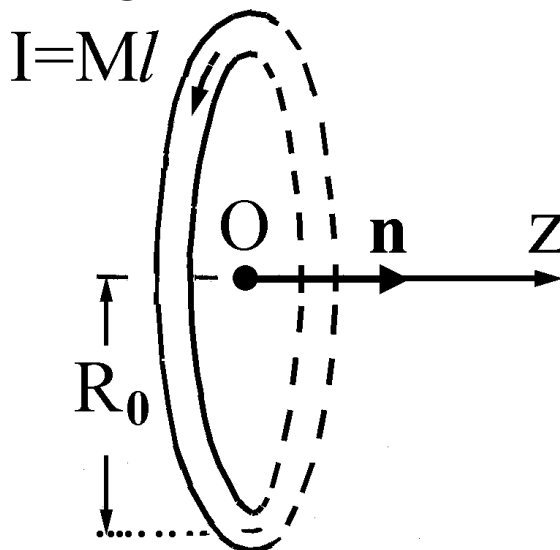


Fig. 4.12



mità delle facce, sia all'interno, sia all'esterno, il campo  $\mathbf{B}$  ha intensità ben approssimata da

$$B = \frac{\mu_0 M l}{2R_0}$$

Il fatto che, nella regione centrale,  $B$  sia tanto più debole quanto più grande è il disco non deve sorprendere: quando  $R_0$  è grande le correnti di mantello sono distanti dalla regione centrale. Si noti anche che un disco illimitato produce un campo  $\mathbf{B}$  nullo ovunque, infatti le sue facce sono cariche con densità di "carica magnetica"  $\pm M$ , quindi il campo  $\mathbf{H}$  è nullo all'esterno e vale  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$  all'interno. Di conseguenza il campo  $\mathbf{B}$  è nullo all'esterno, dove  $\mathbf{H}$  è nullo, ed è nullo all'interno, dove  $\mathbf{H} + \mathbf{M} = 0$ .

Ora, con riferimento alla figura 12, consideriamo una spira di raggio uguale a quello del disco, percorsa dalla corrente  $I = Ml$ . Tale spira ha correnti equivalenti a quelle del disco, quindi produce lo stesso campo  $\mathbf{B}$ . In particolare, sull'asse ed in prossimità del centro il campo  $\mathbf{B}$  ha intensità

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R_0}$$

Quando le dimensioni del disco e della spira sono piccolissime, entrambi gli oggetti forniscono una descrizione classica di un magnetino elementare e producono campi dipolari. Indicata con  $S$  l'area di una faccia del disco o della spira e con  $\mathbf{n}$  il versore normale orientato con la regola della mano destra, il momento di dipolo magnetico vale

$$\mathbf{m} = M\mathcal{V} = MlS = \mathbf{n}MlS \quad \text{per il disco e} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n}IS \quad \text{per la spira}$$

## 4.7 Toroide magnetizzato e solenoide toroidale

Pensiamo che una barra magnetizzata assialmente sia tanto lunga e sottile da poterla piegare impercettibilmente sino a formare un anello completo, come in figura 13. Con tale operazione le “cariche magnetiche” di segno opposto,

Fig. 4.13

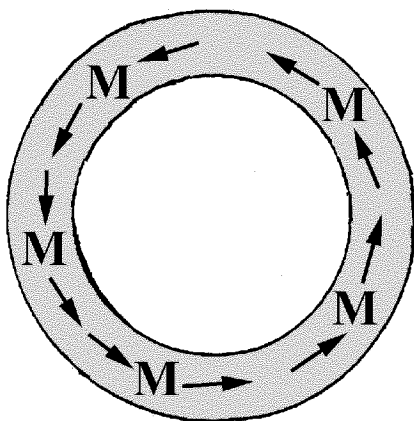
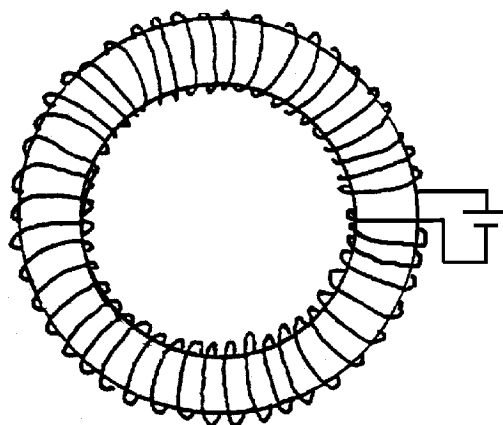


Fig. 4.14



inizialmente presenti sulle basi, vengono a contatto e si annullano. E poiché la densità di corrente di conduzione  $\mathbf{j}_f$  è nulla ovunque,  $\mathbf{H}$  ha divergenza e rotore nulli, sia all'interno, sia all'esterno dell'anello. In generale, la nullità della divergenza e del rotore di un campo non comporta che il campo sia nullo, ad esempio un campo uniforme ha divergenza e rotore nulli ovunque. Ma nel caso presente il campo  $\mathbf{H}$  deve essere invariante quando l'anello gira come una ruota intorno al mozzo, quindi è nullo ovunque! Pertanto **il campo  $\mathbf{B}$  è nullo esternamente all'anello ed è uguale a  $\mu_0\mathbf{M}$  entro l'anello**, proprio come nella regione centrale della barra dalla quale siamo partiti.

Passiamo al solenoide toroidale mostrato in figura 14:  $N$  spire percorse da corrente  $I$  sono avvolte su un anello vuoto di circonferenza media  $l$ . La densità lineare di corrente sul mantello copia quella di un anello magnetizzato con  $M = IN/l$ , quindi il campo  $\mathbf{B}$  è nullo all'esterno e ha intensità

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

sulla circonferenza media. Alla stessa conclusione giungiamo ricordando che la circolazione di  $\mathbf{H}$  lungo la circonferenza media vale  $Hl = NI$  e che, nel vuoto,  $\mathbf{B}$  è uguale a  $\mu_0\mathbf{H}$ .

## 4.8 Potenziale vettore di Ampère

Usando il modello di Coulomb, abbiamo imparato a calcolare il campo magnetostatico  $\mathbf{H}$  quando le correnti elettriche sono nulle ed è dato  $\mathbf{M}$ . Poi, usando il teorema di equivalenza di Ampère, abbiamo imparato a calcolare i campi  $\mathbf{B}$  prodotti da correnti elettriche equivalenti alle correnti “magnetiche” di sistemi già studiati con approccio di tipo elettrostatico. Ora affrontiamo il problema magnetostatico generale: **data una distribuzione di correnti elettriche e “magnetiche” stazionarie, limitata spazialmente, calcolare il campo  $\mathbf{B}$  che soddisfa le equazioni differenziali 7) e che si annulla all’infinito**. Per procedere è opportuno armarsi della seguente regola di calcolo che sarà utile in molte circostanze.

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] = -\nabla^2 \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] \quad (M.13)$$

dove  $\nabla^2 \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  è il campo di componenti  $\nabla^2 C_x(t, \mathbf{r})$ ,  $\nabla^2 C_y(t, \mathbf{r})$  e  $\nabla^2 C_z(t, \mathbf{r})$ . Lasciamo la verifica dell’equazione M.13) per esercizio e veniamo al problema magnetostatico generale. Per risolverlo conviene introdurre il **potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$**  tale che

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Questa equazione assicura che, qualunque sia il campo  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , il campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  ha divergenza nulla come richiesto dalla prima delle equazioni 7). Perché il campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  soddisfi anche la seconda delle equazioni 7),  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  deve essere scelto in modo che il rotore del suo rotore valga  $\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Usando l’equazione M.13), vediamo che il potenziale vettore deve soddisfare l’equazione

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Da questa equazione risulta evidente che il problema di determinare il campo  $\mathbf{A}$  con la condizione che si annulli all’infinito è risolubile anche quando imponiamo l’ulteriore condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

In tal caso, infatti, rimaniamo alle prese con le tre equazioni di Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

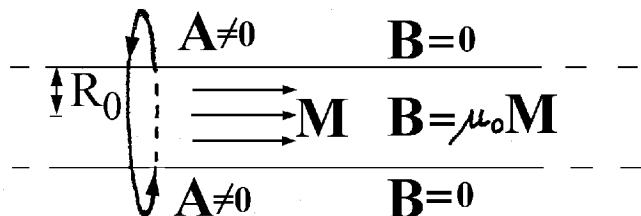
che abbiamo imparato a risolvere nel paragrafo 2.6. Le soluzioni sono riassunte dalla equazione vettoriale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathcal{V}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.19)$$

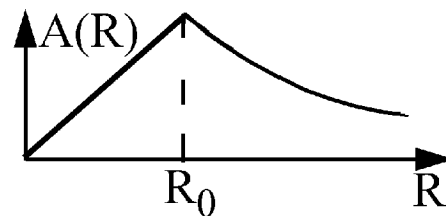
Questo campo prende il nome di **potenziale di Ampère**, non perché l’abbia introdotto Ampère, ma perché consente di calcolare il campo magnetostatico partendo dalle correnti, senza introdurre cariche magnetiche fittizie.

In realtà in magnetostatica è spesso più facile calcolare dapprima il campo magnetico poi il potenziale vettore. Come primo esempio consideriamo una barra cilindrica di raggio  $R_0$  uniformemente magnetizzata in direzione assiale, come in figura 15a). Pensando che la barra sia illimitata possiamo dire subito che  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$  è uniforme all'interno ed è nullo all'esterno. Per calcolare  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

Fig. 4.15 a)



b)



ricordiamo che l'equazione  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  comporta che la circolazione di  $\mathbf{A}$  lungo una circonferenza di raggio  $R$  centrata sull'asse e contenuta in un piano normale ad  $\mathbf{M}$  deve essere uguale al flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie orlata dalla circonferenza. Tale flusso vale  $\pi R^2 B$  per  $R < R_0$  e vale  $\pi R_0^2 B$  per  $R > R_0$ . D'altra parte  $\mathbf{A}$  non può avere componenti radiali perché ha divergenza nulla, quindi è tangente alla circonferenza e ha circolazione  $2\pi R A(R)$ . Ciò consente di concludere che

$$A(R) = \frac{BR}{2} \quad \text{per } R < R_0 \quad \text{e} \quad A(R) = \frac{BR_0^2}{2R} \quad \text{per } R > R_0$$

Sottolineiamo che **nella regione esterna alla barra il campo magnetico è nullo, ma il potenziale vettore è tutt'altro che nullo**, come mostrato in figura 15b). Si noti anche che entro la barra, dove il campo magnetico è uniforme, il potenziale di Ampère può essere scritto nella forma vettoriale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

In realtà questo potenziale vettore viene usato sistematicamente quando il campo magnetico è uniforme nella regione di interesse, senza preoccuparsi di precisare l'origine del sistema di coordinate e senza preoccuparsi di limitare la sua validità alla regione di interesse.

Infine sottolineiamo che **il potenziale di Ampère di un sistema fisico reale è univocamente determinato dall'equazione 4.19)**, ma tutti i campi che differiscono dal potenziale di Ampère per il gradiente di un qualunque campo scalare hanno rotore uguale al campo magnetico, quindi possono essere usati come potenziale vettore.

## 4.9 Potenziale vettore di dipolo magnetico

Quando una corrente  $I$  percorre un filo conduttore di sezione  $S$  piccolissima possiamo calcolare  $\mathbf{A}$  esternamente al filo con l'approccio illustrato in figura



16. Scomponiamo il filo in elementi  $ds$  centrati in punti  $\mathbf{r}'(s)$  individuati dalla coordinata curvilinea  $s$ . Poniamo  $d\mathcal{V}'\mathbf{j} = Sds \mathbf{j} = Ids$  nell'equazione 19) e notiamo che il potenziale di Ampère si riduce all'integrale di linea del contributo

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Ids}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(s)|} \quad (4.20)$$

In parole: **in un punto esterno ad un circuito, il contributo  $d\mathbf{A}$  dell'elemento di circuito  $ds$  ha il verso di  $ds$ , è proporzionale alla corrente  $I$  e inversamente proporzionale alla distanza dall'elemento.** Ma attenzione:  $d\mathbf{A}(\mathbf{r})$  non ha divergenza nulla e non può essere inteso come potenziale di Ampère di un elemento di corrente, ha significato fisico solo il suo integrale esteso ad un intero circuito stazionario. La ragione è che un pezzo di filo isolato percorso da corrente continua non può essere stazionario: i suoi estremi si caricano con cariche di segno opposto dipendenti linearmente dal tempo. Preciseremo questo punto nel capitolo 9, per ora limitiamo l'attenzione a circuiti chiusi e stazionari.

Fig. 4.16

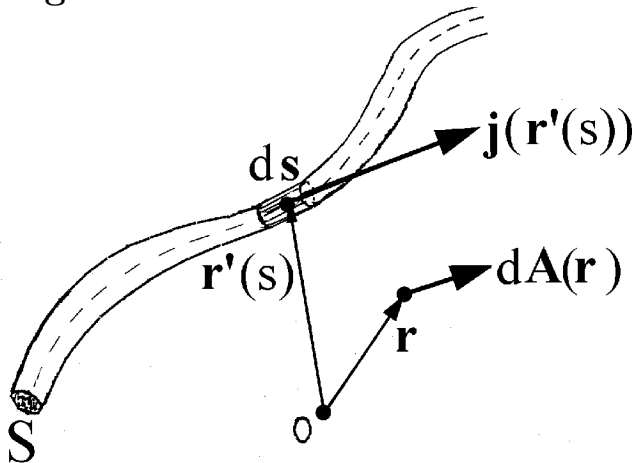
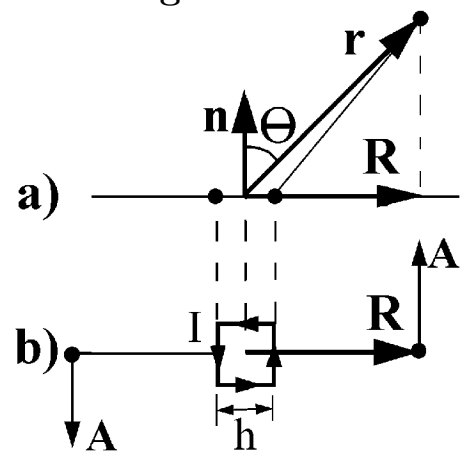


Fig. 4.17



Come prima applicazione calcoliamo il potenziale vettore prodotto da una spira di area infinitesima centrata nell'origine ed orientata con versore normale  $\mathbf{n}$ . Come mostrato in figura 17a) indichiamo con  $\theta$  l'angolo formato da  $\mathbf{r}$  con  $\mathbf{n}$  e pensiamo che la spira sia un quadratino di area  $S = h^2$  orientato come in figura 17b). Con tale modello, certamente lecito perché la spira è infinitesima, risulta evidente che i due lati equidistanti dal punto di osservazione danno contributi opposti al potenziale vettore, mentre gli altri due lati danno un contributo complessivo diretto come la corrente nel lato più vicino, con intensità

$$A(r, \theta) = \frac{\mu_0 Ih}{4\pi} \left[ \frac{1}{r - (h/2) \sin \theta} - \frac{1}{r + (h/2) \sin \theta} \right] = \frac{\mu_0 Ih^2}{4\pi r^2} \sin \theta$$

Sostituendo  $\sin \theta$  con  $|\mathbf{n} \times \mathbf{r}| / r$ , notando che  $\mathbf{A}$  è nel verso di  $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$  e ricordando che

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}Ih^2 = \mathbf{n}IS \quad (4.21)$$

è il momento magnetico della spira, possiamo scrivere il risultato nella forma vettoriale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (4.22)$$

Per convincersi che questo potenziale vettore conduce al campo di dipolo dato dalla prima delle equazione 12) basta prendere il rotore e ricordare l'equazione M.7), infatti

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

Ora torniamo a considerare un generico circuito stazionario e, invece di integrare  $d\mathbf{A}$  sul circuito per poi prendere il rotore del risultato, prendiamo il rotore del contributo elementare  $d\mathbf{A}$  dato dall'equazione 20), riservandoci di integrarlo in seguito. Si vede così che il contributo  $d\mathbf{B}$  di un elemento del circuito è dato dalla **formula di Laplace**

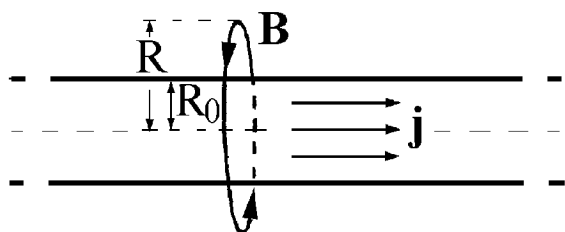
$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I ds \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(s))}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(s)|^3} \quad (4.23)$$

Naturalmente anche  $d\mathbf{B}$  non ha significato fisico autonomo, ha significato solo il suo integrale esteso ad un intero circuito stazionario.

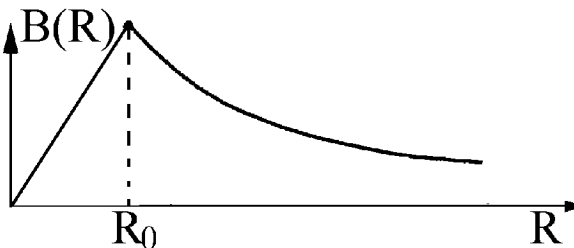
## 4.10 Correnti con simmetria cilindrica e planare

Quando le distribuzioni di correnti sono ben approssimate da distribuzioni ideali dotate di simmetria cilindrica o planare, il calcolo del campo magnetico può essere semplificato tenendo conto della simmetria. Come primo esempio consideriamo un lunghissimo cilindro di raggio  $R_0$  percorso da corrente assiale di densità  $\mathbf{j}$  uniforme, come mostrato in figura 18a). Anzitutto notiamo che, in qualunque punto,  $\mathbf{B}$  è perpendicolare a  $\mathbf{j}$ , perché ciò è vero per i campi generati da ciascun elemento di corrente. Inoltre  $B$  deve essere invariante per rotazione del cilindro intorno all'asse ed è solenoidale, quindi ha proiezione su  $\mathbf{R}$  nulla ovunque. Insomma  $\mathbf{B}$  è normale sia a  $\mathbf{j}$ , sia ad  $\mathbf{R}$ , ed è nullo sull'asse. Ciò significa che  $\mathbf{B}$  è tangente alle circonferenze centrate sull'asse contenute in piani normali a  $\mathbf{j}$ . La circolazione di  $\mathbf{B}$  lungo tali circonferenze

Fig. 4.18 a)



b)



vale  $2\pi RB(R)$  ed è uguale a  $\mu_0\pi R^2 j$  per  $R < R_0$  e a  $\mu_0\pi R_0^2 j$  per  $R > R_0$ , come richiesto dalla legge di Ampère, quindi

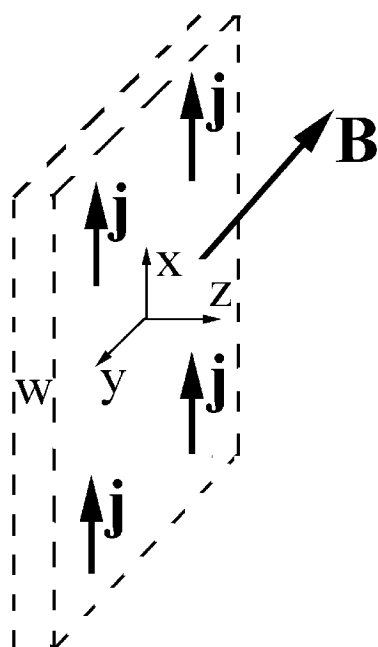
$$B(R) = \frac{\mu_0 j R}{2} \quad \text{per } R < R_0 \quad \text{e} \quad B(R) = \frac{\mu_0 j R_0^2}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{per } R > R_0$$

Insomma, il campo magnetico all'esterno del cilindro è quello previsto dalla legge di Biot e Savart, mentre il campo magnetico entro il cilindro risulta

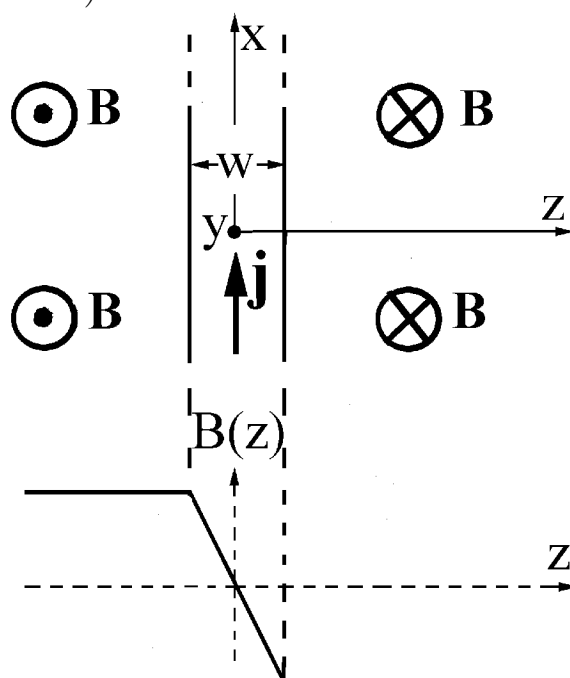
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{j} \times \mathbf{r}$$

Ora, con riferimento alla figure 19a) e b), consideriamo una lastra piana indefinita di spessore  $w$  percorsa da corrente di densità  $\mathbf{j}$  uniforme. Anzitutto notiamo che  $\mathbf{B}$  è ovunque perpendicolare a  $\mathbf{j}$  perché ciò è vero per tutti i contributi elementari. Poi notiamo che  $\mathbf{B}$  è ovunque parallelo alla

Fig. 4.19 a)



b)



lastra, infatti se la componente normale non fosse nulla dovrebbe avere segno opposto dalle due parti, cosa impossibile perché  $\mathbf{B}$  ha divergenza nulla. Infine notiamo che  $\mathbf{B}$  è nullo sul piano di mezzeria dove riceve contributi opposti dalle mezze lastre di destra e di sinistra. Con la scelta degli assi mostrata in figura, le componenti  $B_x$  e  $B_z$  sono nulle ovunque, mentre la componente  $B_y$  dipende solo da  $z$ , perché il sistema è invariante per traslazioni parallele alla lastra. Pertanto la legge di Ampère si riduce all'equazione  $-\partial B_y(z)/\partial z = \mu_0 j$ . Integrandola con la condizione  $B_y(0) = 0$ , si ottiene

$$B_y(z) = -\mu_0 j z \quad \text{per } |z| < w/2 \quad \text{e} \quad B_y = -\mu_0 j w/2 \quad \text{per } |z| > w/2$$

Si noti che esternamente alla lastra  $\mathbf{B}$  è uniforme in ciascun semispazio, ma ha versi opposti dalle due parti.

## ESERCIZI

1) Un tubo a parete sottile di raggio  $R_0$  è percorso da corrente assiale  $I$  distribuita uniformemente nella parete. a) Quanto vale  $\mathbf{B}$  entro il tubo. b) Di quanto varia  $B$  nel passare dall'interno all'esterno.

2) Come mostrato in figura 20, un cilindro conduttore contiene una cavità cilindrica con asse spostato di  $s$  dall'asse del cilindro. L'intercapedine è percorsa da corrente uniforme assiale. Dimostrare che, entro la cavità,  $\mathbf{B}$  è uniforme e vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{j} \times \mathbf{s}$$

AIUTO: Si pensi che il cilindro grande sia percorso da corrente uniforme anche nella cavità e che la cavità sia percorsa da corrente opposta.

Fig. 4.20

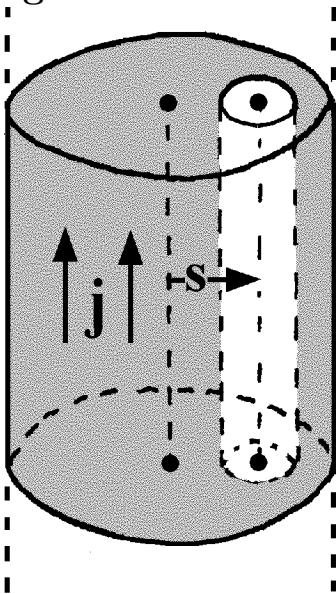
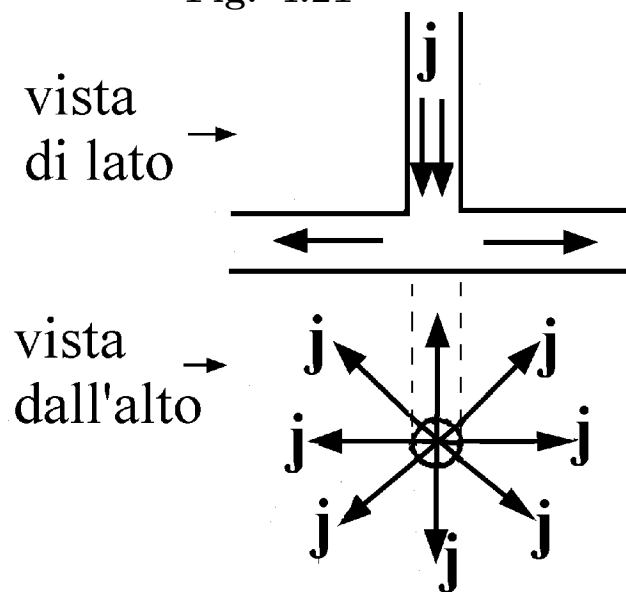


Fig. 4.21



3) Un cilindro seminfinito è ortogonale ad una lastra illimitata come in figura 21. Le due viste mostrano che la corrente percorre il cilindro e si dirama a raggiera nella lastra. Si dimostri che: a) sotto la lastra  $\mathbf{B}$  è nullo, b) sopra la lastra  $\mathbf{B}$  è uguale al campo prodotto da un cilindro esteso all'infinito da entrambe le parti percorso dalla stessa corrente.

AIUTO: si usi la legge di Ampère dopo aver osservato quanto segue.

- La proiezione di  $\mathbf{B}$  sull'asse è ovunque nulla in quanto ogni elemento di corrente che fornisce un contributo assiale ha un compagno che fornisce un contributo opposto.
- $B$  non dipende dall'angolo azimutale perché il sistema è invariante per rotazione intorno all'asse.
- $\mathbf{B}$  ha proiezione nulla su rette passanti per l'asse perché è solenoidale.

5) Considerare due lastre piane parallele di spessore  $w$ , percorse da densità di corrente uniformi ed opposte  $\pm \mathbf{j}$  e dimostrare che: a) nello spazio tra le lastre  $\mathbf{B}$  è uniforme, parallelo alle lastre ed ortogonale a  $\mathbf{j}$ , con intensità  $B = \mu_0 j w$ , b)  $B$  è nullo all'esterno.

## 4.11 Interazioni magnetiche

Con riferimento alla figura 22, pensiamo che due fili conduttori paralleli e indefiniti siano separati da distanza  $d$  e siano percorsi da correnti  $I_1$  ed  $I_2$ .

Fig. 4.22

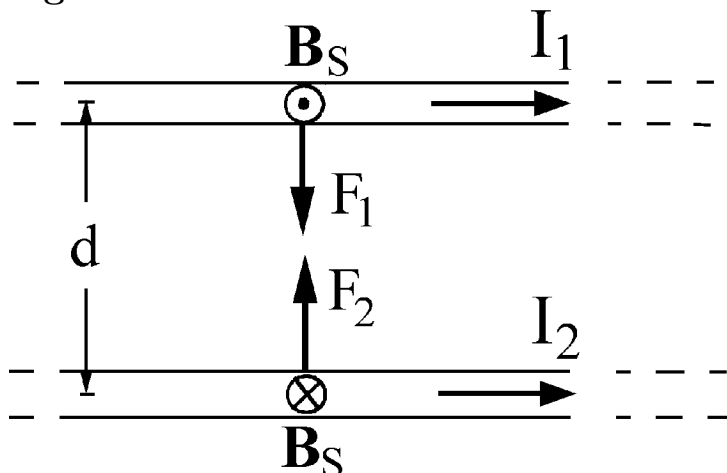
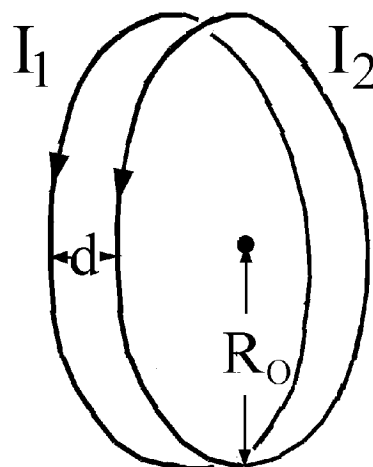


Fig. 4.23



In tal caso il campo  $\mathbf{B}$  che stimola un pezzo di lunghezza  $l$  del secondo filo è prodotto dal primo filo, ha intensità  $\mu_0 I_1 / 2\pi d$  e circola come mostrato in figura. Ricordando l'equazione 2) si vede che il pezzo del secondo filo è soggetto alla forza

$$F = -\mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

Il segno meno dice che la forza è attrattiva quando le correnti sono concordi e repulsiva quando le correnti sono discordi. Si noti che lo stesso risultato si ottiene pensando che il campo prodotto dal secondo filo stimoli un pezzo di lunghezza  $l$  del primo. Soprattutto si noti che, **quando tutte le regole della mano destra sono sostituite da regole della mano sinistra, i campi  $\mathbf{B}$  cambiano verso, ma le forze agenti rimangono inalterate**, come devono: il fatto che **le correnti si attraggono quando sono concordi e si respingono quando sono discordi** non può dipendere dalle nostre convenzioni.

Ora, con riferimento alla figura 23, pensiamo che due spire di raggio  $R_0$  siano separate da distanza  $d \ll R_0$  e siano percorse da correnti  $I_1$  ed  $I_2$ . In tal caso è lecito calcolare il campo che stimola un elemento di lunghezza  $dl$  infinitesima della seconda spira trascurando la curvatura della prima spira. Quindi la forza agente sull'elemento infinitesimo vale  $dF = -\mu_0 I_1 I_2 dl / 2\pi d$  e la forza agente tra le due spire risulta

$$F = -\frac{\mu_0 R_0 I_1 I_2}{d}$$

Passiamo a descrivere l'azione di un campo magnetico di stimolo su un magnetino elementare ragionando come se il modello di Coulomb fosse corretto. Quando il magnetino è rigido, ovvero quando il suo momento magnetico

$\mathbf{m}$  non è modificato dal campo di stimolo  $\mathbf{B}_S(\mathbf{r})$ , il momento della coppia agente sul magnetino vale

$$\mathbf{C} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_S(\mathbf{r}) \quad (4.24)$$

e fa il lavoro  $2mB_s(\mathbf{r})$  quando, ad  $\mathbf{r}$  fisso, il magnetino passa dalla situazione di equilibrio instabile e quella di equilibrio stabile.

L'energia potenziale del magnetino rigido nel campo di stimolo si ottiene sostituendo  $\mathbf{p}$  con  $\mathbf{m}$  ed  $\mathbf{E}_S$  con  $\mathbf{B}_S$  nell'equazione 2.15) e risulta

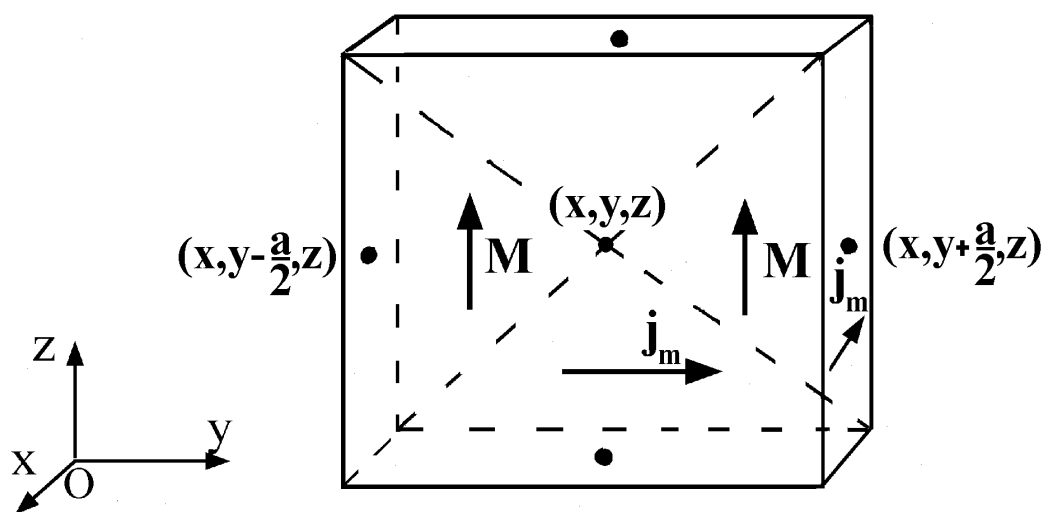
$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_S(\mathbf{r}) \quad (4.25)$$

Infine, nel caso che il magnetino sia indotto dal campo di stimolo il risultato elettrostatico 3.24) suggerisce che

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_S(\mathbf{r}) \quad (4.26)$$

Anche in questo caso il fattore  $1/2$  tiene conto che  $\mathbf{m}$  è proporzionale a  $\mathbf{B}_S(\mathbf{r})$ , ed anche in questo caso il risultato vale in approssimazione di dipolo centrale, ovvero quando il campo di stimolo non varia apprezzabilmente nella regione occupata dall'elemento di materia.

Fig. 4.24



Per dimostrare che le equazioni 24), 25) e 26) sono davvero corrette dobbiamo dedurle partendo dal modello di Ampère. A tal fine conviene pensare che il magnetino sia un cubetto di spigolo  $a$  magnetizzato con  $\mathbf{M}$  nel verso di uno spigolo, come in figura 24, e conviene pensare che  $\mathbf{M}$  non vari bruscamente nel passare dall'interno all'esterno, ma decresca linearmente esternamente al cubetto annullandosi a distanza  $h$  infinitesima dalle pareti. In tal caso i quattro strati di spessore  $h$  a contatto con le pareti parallele ad  $\mathbf{M}$  sono percorsi da densità di corrente "magnetica"  $j_m = M/h$ , mentre il resto dello spazio ha densità di corrente nulla. Quindi la densità di forza vale  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_S(\mathbf{r})$  nei quattro strati ed è nulla altrove. Ora indichiamo

con  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  le componenti del campo di stimolo, riservandoci di porre  $B_x = B_y = 0$  quando il magnetino è indotto, e cominciamo a calcolare la componente  $z$  della forza risultante. Tenendo conto che  $a^2h$  è il volume di ciascuno strato si vede che

$$F_z = a^2h \frac{M}{h} \left[ -B_x\left(x + \frac{a}{2}, y, z\right) + B_x\left(x - \frac{a}{2}, y, z\right) \right] + \\ + a^2h \frac{M}{h} \left[ -B_y\left(x, y + \frac{a}{2}, z\right) + B_y\left(x, y - \frac{a}{2}, z\right) \right] = -Ma^3 \left[ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right] = m \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito  $Ma^3$  con il momento magnetico  $m$  del cubetto e abbiamo tenuto conto che  $\partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = -\partial B_z/\partial z$  perché  $\mathbf{B}_S$  è solenoidale. Il calcolo delle componenti  $x$  ed  $y$  della forza risultante è più semplice:

$$F_x = a^2h \frac{M}{h} \left[ B_z\left(x + \frac{a}{2}, y, z\right) - B_z\left(x - \frac{a}{2}, y, z\right) \right] = m \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ F_y = a^2h \frac{M}{h} \left[ B_z\left(x, y + \frac{a}{2}, z\right) - B_z\left(x, y - \frac{a}{2}, z\right) \right] = m \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

Riassumendo, le componenti della forza risultante sono

$$F_x = m \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad , \quad F_y = m \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad , \quad F_z = m \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Per un magnetino rigido  $m$  è una costante e può essere portato sotto derivata, il prodotto  $mB_z$  è null'altro che  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_S$ , quindi la forza risultante può essere scritta nella forma vettoriale  $\mathbf{F} = \nabla[\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_S(\mathbf{r})]$ . Ciò dimostra che l'energia potenziale del magnetino rigido stimolato dal campo  $\mathbf{B}_S(\mathbf{r})$  è davvero data dall'equazione 25).

Per un magnetino indotto,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}_S$  sono allineati, con  $\mathbf{M}$  proporzionale a  $\mathbf{B}_S$ , quindi possiamo porre  $m = \alpha B_z$ , con  $\alpha$  costante, e possiamo riscrivere la componente  $x$  della forza risultante nella forma

$$F_x = \alpha B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \alpha B_z^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_S$$

Risultati analoghi si ottengono per  $F_y$  ed  $F_z$ , quindi l'energia potenziale del dipolo indotto dal campo di stimolo è davvero data dall'equazione 26).

Per calcolare il momento risultante delle forze agenti sul magnetino rigido notiamo che le forze originate dalla componente  $B_z$  del campo di stimolo sono perpendicolari alle quattro pareti, quindi danno contributo nullo, mentre le forze originate dalle componenti  $B_x$  e  $B_y$  tendono a far ruotare il magnetino intorno agli assi  $y$  ed  $x$  rispettivamente. Precisamente le componenti del momento risultante sono

$$C_x = -a^2h \frac{M}{h} B_y a = -m B_y \quad , \quad C_y = a^2h \frac{M}{h} B_x a = m B_x \quad , \quad C_z = 0$$

Anche in questo caso il modello di Ampère conferma il risultato previsto dal modello di Coulomb.

Insomma, sebbene il modello di Ampère ed il modello di Coulomb siano diversi, la forza risultante ed il momento risultante agenti su un magnetino rigido o indotto possono essere calcolate indifferentemente con l'uno o l'altro dei due modelli. Ma i risultati sperimentali che presentiamo nel prossimo paragrafo dimostrano che il modello di Coulomb è inadeguato.

## 4.12 Misure di suscettività magnetica

Nei materiali ferromagnetici può avvenire che  $\mathbf{M}$  sia molti ordini di grandezza maggiore di  $\mathbf{H}$ , che i campi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  non siano allineati, che esista un mosaico di regioni magnetizzate in modo diverso come se fossero magnetini non paralleli, che ad uno stesso campo  $\mathbf{B}$  corrispondano campi  $\mathbf{H}$  molto diversi, e che entrambi i campi dipendano dalla storia dei trattamenti meccanici e termici, oltre che dai campi di stimolo prodotti da altri magneti o da solenoidi. Insomma i materiali ferromagnetici hanno comportamenti molto complicati e richiedono uno studio particolare che rinviemo al capitolo 8. Qui consideriamo la vasta classe dei materiali Lineari, Omogenei ed Isotropi (LOI) nei quali i campi MAGNETICI  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$  sono legati dalla

$$\text{relazione costitutiva interna} \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \quad (4.27)$$

Il parametro adimensionale  $\mu$  è caratteristico del materiale e prende il nome di **permeabilità magnetica**. Anche in questo caso abbiamo scritto campi MAGNETICI, con caratteri maiuscoli, ad intendere i campi complessivi, sovrapposizioni dei campi di stimolo e di risposta. Nella grande maggioranza dei materiali  $\mu$  differisce pochissimo dall'unità, ma in seguito non poniamo limiti ai valori di  $\mu$ , lasciando agli esperimenti il compito di determinarli. Tenendo conto della relazione 27) e ricordando che  $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$ , si vede che  $\mathbf{M}$  ed  $\mathbf{H}$  sono legati dalla relazione

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{r}) = (\mu - 1)\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \quad (4.28)$$

Il parametro  $\chi_m = \mu - 1$  prende il nome di **suscettività magnetica** e può essere misurato con un metodo semplice, ma molto sensibile ed accurato: il metodo della bilancia magnetica descritto in figura 25. Un solenoide lineare con diametro quasi uguale alla lunghezza è disposto con asse verticale e genera il campo magnetico di stimolo  $\mathbf{B}_S(\mathbf{r})$  mostrato qualitativamente in figura. Sull'asse del solenoide, in prossimità di un estremo, viene centrata una pallina omogenea, sospesa mediante un filo sottile ad uno dei bracci di una bilancia di precisione. Con la bilancia misuriamo la differenza tra i "pesi" della pallina prima e dopo il lancio della corrente nel solenoide. Domandiamo: il "peso" in presenza di corrente è maggiore o minore del peso in assenza di corrente? Ovvero, la pallina viene attratta o respinta dal solenoide? Prima di rispondere consideriamo l'analoga situazione elettrica mostrata in figura



Fig. 4.25

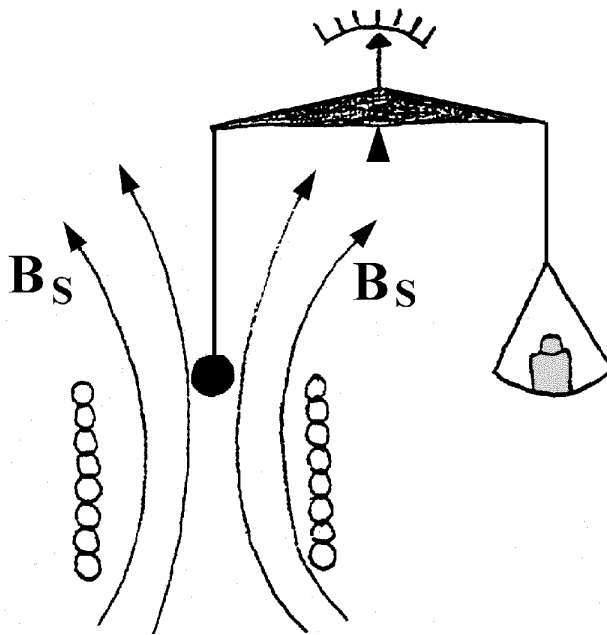
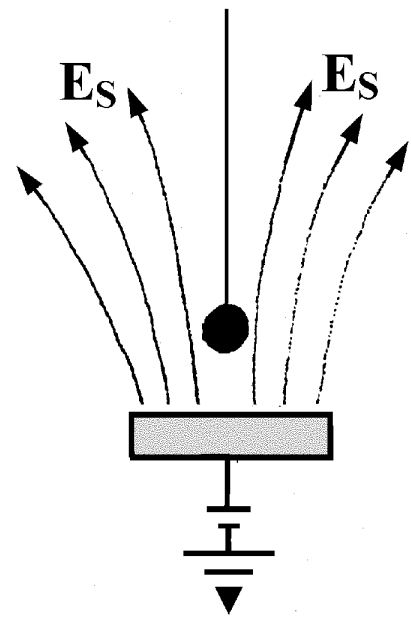


Fig. 4.26



26: una pallina neutra, metallica o dielettrica, viene sospesa al di sopra di un piattello carico. In questo caso non possiamo avere dubbi: la pallina neutra viene attratta dal piattello qualunque sia il segno della carica sul piattello, ovvero la pallina tende ad andare dove il campo elettrico di stimolo è più intenso. Ciò è dovuto al fatto che le cariche indotte nella regione vicina alla carica stimolante sono discordi da questa e ne sono attratte più di quanto non siano respinte quelle concordi indotte lontano. Quando la pallina è dielettrica la forza è ridotta del fattore  $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = \chi/(\chi + 3)$  rispetto a quella agente su una pallina metallica di ugual volume, ma la pallina viene attratta comunque. Se i fenomeni magnetici fossero davvero originati dalle “cariche magnetiche” ipotizzate da Coulomb dovremmo aspettarci che anche la pallina sospesa sopra il solenoide tenda ad andare dove il campo magnetico di stimolo è più intenso, ovvero verso il centro del solenoide. Ma non è così: alcune palline lo fanno, e si dice che sono **paramagnetiche**, altre tendono ad andare dove il campo magnetico è debole, e si dice che sono **diamagnetiche**. Secondo il modello di Ampère l’attrazione o la repulsione sono da imputarsi all’insorgere di correnti “magnetiche” indotte: quando queste sono concordi con quelle stimolanti si ha attrazione, altrimenti si ha repulsione.

Per calcolare la forza magnetica agente sulla pallina dobbiamo partire dall’equazione 26), quindi dobbiamo conoscere il campo  $\mathbf{B}_S(\mathbf{r})$  prodotto dal solenoide e dobbiamo calcolare il momento magnetico  $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathcal{V}$  indotto nella pallina. Per procedere con semplicità pensiamo che la pallina sia tanto piccola da poter ritenere che il campo di stimolo sia uniforme al suo interno. In tal caso anche il campo  $\mathbf{M}$  è uniforme e genera all’interno il campo di risposta  $\mathbf{H}_R = -\mathbf{M}/3$ . Ma all’interno vale l’equazione 28), quindi

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \chi_m [\mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R] = \chi_m [\mathbf{H}_S - \frac{\mathbf{M}}{3}]$$

Ciò fornisce la relazione

$$\mathbf{M} = \frac{3\chi_m}{\chi_m + 3} \mathbf{H}_S = 3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathbf{H}_S \quad (4.29)$$

tra la densità di momento magnetico acquistato dalla pallina ed il campo di stimolo. Ad evitare malintesi sottolineiamo che **il campo di stimolo  $\mathbf{H}_S(\mathbf{r})$  è ovunque la stessa cosa di  $\mathbf{B}_S(\mathbf{r})/\mu_0$** : è il campo che sarebbe presente se la pallina non ci fosse. Quando  $|\chi_m|$  è molto piccolo rispetto all'unità, come avviene nella grande maggioranza dei materiali, l'equazione 29) è ben approssimata da  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_S$ , quindi il momento magnetico acquistato dalla pallina si riduce a

$$\mathbf{m} = \mathcal{V} \chi_m \mathbf{H}_S(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{V} \chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}_S(\mathbf{r}) \quad \text{valida per } |\chi_m| \ll 1$$

dove  $\mathbf{r}$  è la posizione del centro. Sostituendo nell'equazione 26), prendendo il gradiente e cambiando segno si vede che la forza agente sulla pallina vale

$$\mathbf{F} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \mathcal{V} \nabla B_S^2(\mathbf{r}) \quad \text{valida per } |\chi_m| \ll 1 \quad (4.30)$$

### Suscettività magnetica di alcuni materiali

Azoto liquido	$-0.7 \times 10^{-5}$	Sodio	$+0.7 \times 10^{-5}$
Acqua	$-0.9 \times 10^{-5}$	Alluminio	$+2.2 \times 10^{-5}$
Rame	$-1.0 \times 10^{-5}$	Ossido di rame	$+26 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2.2 \times 10^{-5}$	Platino	$+28 \times 10^{-5}$
Argento	$-2.4 \times 10^{-5}$	Uranio	$+41 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-17 \times 10^{-5}$	Ossigeno liquido	$+350 \times 10^{-5}$

Le misure della forze agenti su palline di volume noto, ottenute con la bilancia magnetica, forniscono i valori di  $\chi_m$  riportati in tabella. La colonna di sinistra si riferisce a materiali diamagnetici ( $\chi_m < 0$ ), che tendono a fuggire le regioni di campo intenso, quella di destra a materiali paramagnetici ( $\chi_m > 0$ ), che tendono ad andare nelle regioni di campo intenso.

Un esempio estremo di comportamento diamagnetico è fornito dai materiali superconduttori di prima specie. Questi materiali rispondono al campo magnetico con correnti di mantello tali da annullare il campo MAGNETICO  $\mathbf{B}$  al loro interno. Il fenomeno prende il nome di effetto Meissner e può presentare un aspetto spettacolare: il campo magnetico di stimolo può esercitare sulle correnti indotte una forza tale da compensare il peso e far levitare la pallina. Per descrivere il fenomeno basta notare che la nullità del campo MAGNETICO  $\mathbf{B}$  implica che i campi  $\mathbf{M}$  ed  $\mathbf{H}$  sono opposti entro il materiale, dunque la suscettività magnetica di un superconduttore di prima specie vale  $\chi_m = -1$ , e l'equazione 29) si riduce a  $\mathbf{M} = -(3/2)\mathbf{H}_S$ . Sostituendo

$\mathbf{m}$  con  $\mathbf{M}\mathcal{V}$  nell'equazione 26), prendendo il gradiente e cambiando segno si vede che la forza agente sulla pallina vale

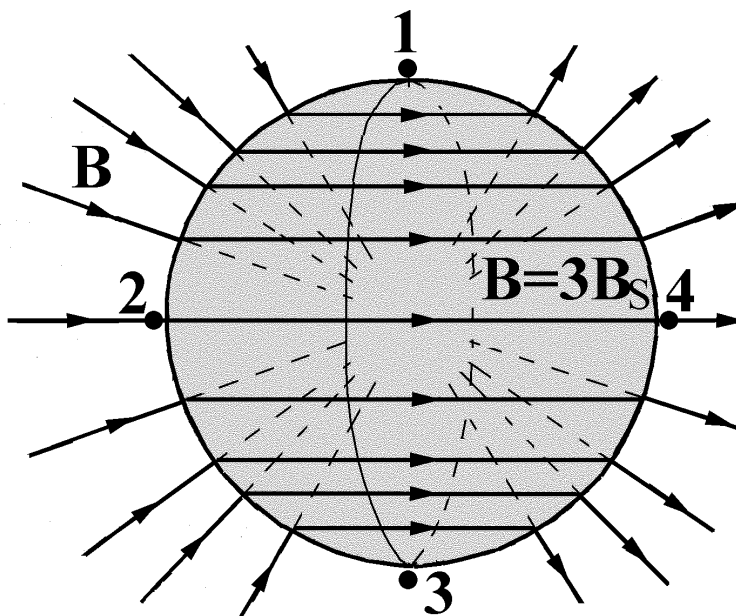
$$\mathbf{F} = -\frac{3}{4\mu_0}\mathcal{V} \nabla B_S^2(\mathbf{r}) \quad \text{valida per } \chi_m = -1$$

Un altro caso estremo si presenta quando la pallina è costituita da materiali magnetici lineari di altissima permeabilità, ad esempio  $\mu = 10000$ . In tal caso l'equazione 29) mostra che il campo  $\mathbf{M}$  differisce molto poco da  $3\mathbf{H}_S$ , quindi il momento magnetico acquistato dalla pallina non differisce significativamente da  $\mathbf{m} = \mathcal{V}\mathbf{M} = 3\mathcal{V}\mathbf{H}_S(\mathbf{r})$  e la forza agente risulta

$$\mathbf{F} = \frac{3}{2\mu_0}\mathcal{V} \nabla B_S^2(\mathbf{r}) \quad \text{valida per } \chi_m \gg 1$$

In tal caso il campo MAGNETICO  $\mathbf{B}$  entro la pallina e nelle immediate vicinanze ha le linee di flusso mostrate in figura 27:  $\mathbf{B}$  è quasi normale alla

**Fig. 4.27**



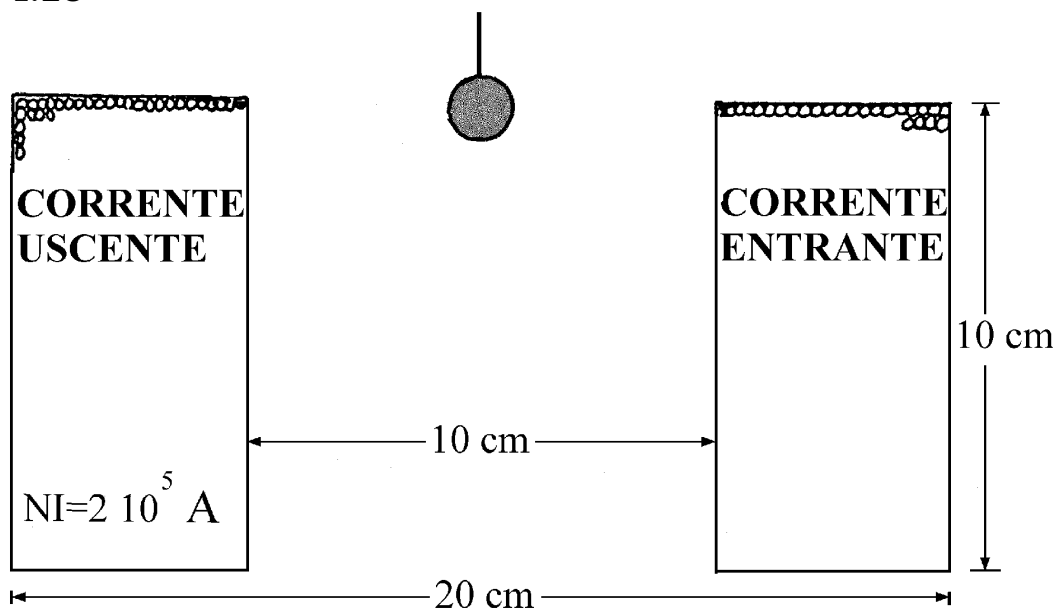
superficie esterna ed è quasi uguale a  $3\mathbf{B}_S$  all'interno. Per convincercene cominciamo a notare che  $\mathbf{M} \approx 3\mathbf{H}_S$ , quindi entro la pallina il campo di risposta vale  $\mathbf{H}_R = -\mathbf{M}/3 \approx -\mathbf{H}_S$ , il campo  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R$  è quasi nullo ed il campo  $\mathbf{B} \approx \mu_0\mathbf{M}$  è davvero quasi uguale a  $3\mathbf{B}_S$ . Poi ricordiamo che nel passare dal materiale al vuoto la proiezione parallela di  $\mathbf{H}$  si conserva, quindi all'esterno  $\mathbf{H}$  è quasi normale alla superficie. Ma all'esterno  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$  quindi anche  $\mathbf{B}$  è quasi normale alla superficie. In particolare,  $\mathbf{B}$  è quasi nullo nei punti 1 e 3 ed è quasi uguale a  $3\mathbf{B}_S$  nei punti 2 e 4.

### ESERCIZI

1) Una pallina di permeabilità 100 è stimolata da un campo magnetico uniforme da 0.1 T. Calcolare: a) il campo MAGNETICO  $H$  interno, b) il campo MAGNETICO  $B$  interno e sulla superficie esterna, c) Il momento di dipolo acquistato dalla pallina.

- 2) Ripetere l'esercizio 1) per una pallina di permeabilità 100000.
- 3) Una pallina superconduttrice di diametro 2 *cm* è posta in un campo magnetico inhomogeneo. Al centro della pallina il campo di stimolo vale 0.5 *T* mentre sulla superficie della pallina, in punti opposti, il campo di stimolo vale 0.4 *T* e 0.6 *T*. Calcolare: a) il campo *M* al centro della pallina, b) il campo *H* al centro della pallina, c) il momento di dipolo magnetico acquistato dalla pallina, d) la forza agente.
- 4) La pallina considerata nell'esercizio precedente viene sostituita da una pallina di permeabilità magnetica 10000. Il resto rimane inalterato. Rispondere alle domande a), b), c) e d) poste nell'esercizio precedente.
- 5) Una pallina superconduttrice di diametro 1 *cm* e massa 5 *gr*, posta in un laboratorio terrestre, levita ed è in equilibrio quando è centrata in un punto dove il campo magnetico di stimolo vale 0.5 *T*. Nella regione occupata dalla pallina descrivere (graficamente e numericamente): a) il campo magnetico di stimolo, b) il campo MAGNETICO **B**, c) il campo magnetico **H**, d) le correnti indotte.
- 6) Il solenoide lineare in figura 27 è lungo 10 *cm*, ha diametro interno di 10 *cm*, diametro esterno di 20 *cm* e ha la corona cilindrica riempita da 2000 spire percorse dalla corrente di 100 *A*. Calcolare approssimativamente il gradiente di  $B^2$  sull'asse.
- 7) Il solenoide di figura 28 viene usato per misurare la suscettività magnetica di palline di volume 1 *cm*<sup>3</sup> centrate sull'asse a 5 *cm* dal centro. a) Quale suscettività ha una pallina attratta con forza di 5 *mN*? b) Come cambia la forza quando la corrente viene dimezzata? c) Come cambia la forza quando la corrente viene invertita? d) Valutare la forza agente sulla pallina e dire la ragione che suggerisce di centrare la pallina ad un estremo del solenoide.

Fig. 4.28



# Capitolo 5

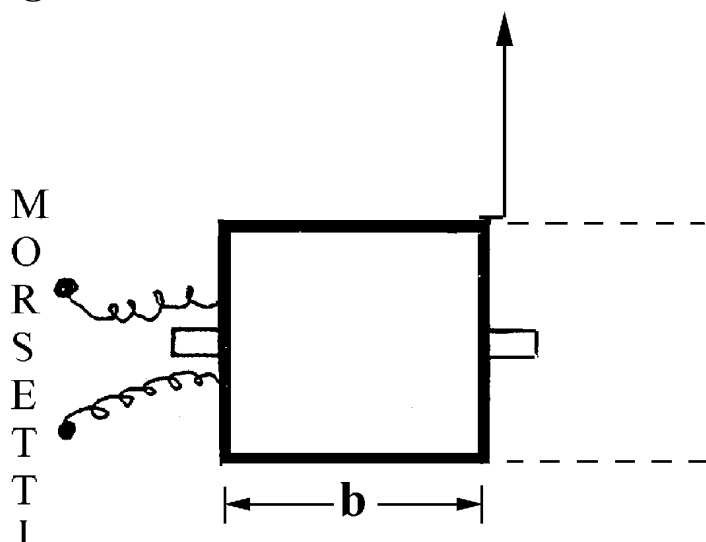
## Energia elettrica

In questo capitolo descriviamo alcuni metodi di misura di grandezze quasi stazionarie ed impariamo a calcolare la potenza dissipata nei conduttori e la densità di energia elettrica immagazzinata nei dielettrici e nel vuoto.

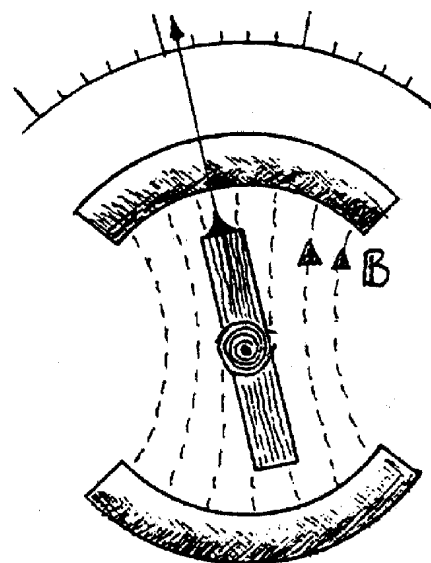
### 5.1 Amperometri e voltmetri

Un amperometro a bobina mobile, adatto a misurare correnti continue o lentamente variabili, è schematizzato in figura 1. La bobina, costruita con filo di rame di sezione  $a^2$  verniciato con un buon isolante, ha  $N$  spire avvolte nella gola di un telaietto quadrato di lato  $b$ . Il telaietto è provvisto di perni su un asse mediano ed è montato in modo che possa ruotare con il minimo attrito tra le espansioni polari di un magnete permanente. Una molla di richiamo a spirale agisce in modo che, in assenza di corrente, la lancetta sia sullo zero della scala graduata. Quando il filo di rame è percorso dalla

Fig. 5.1 vista di lato



vista di fronte



corrente  $I$ , il momento delle forze agenti sulla bobina vale  $N I b^2 B - k \alpha$ , dove  $\alpha$  è l'angolo di rotazione della bobina e  $k$  è la costante elastica angolare della molla. Pertanto l'angolo di equilibrio è proporzionale alla corrente. Conoscendo  $N$ ,  $b$ ,  $B$  e  $k$ , possiamo graduare la scala angolare in correnti. Si

noti che, a parità d'ingombro, due bobine costruite con fili di diametro diverso possono avere resistenze enormemente diverse. Infatti il volume occupato dal filo vale  $\mathcal{V} \approx 4ba^2N$ , mentre la resistenza della bobina risulta

$$R = N \frac{4b}{ga^2} = \frac{\mathcal{V}}{ga^4}$$

ed è inversamente proporzionale alla quarta potenza del diametro. Ad esempio una bobina di volume  $1 \text{ cm}^3$  ha resistenza  $R \approx 0.02 \Omega$  quando il filo di rame ha diametro  $1 \text{ mm}$ , e ha resistenza  $R \approx 2 \cdot 10^6 \Omega$  quando il filo di rame ha diametro  $10 \mu\text{m}$ .

Uno strumento con alta resistenza interna è adatto a misurare tensioni e prende il nome di **voltmetro**, uno strumento con bassa resistenza interna è adatto a misurare correnti e prende il nome di **amperometro**. Aggiungiamo che, molto spesso, gli amperometri sono costruiti collegando ai morsetti di un voltmetro di resistenza interna  $R_V$  una piccola **resistenza di shunt**  $R$  ben nota. In tal caso la scala dello strumento viene graduata in modo che la lettura sia la somma della corrente che attraversa la resistenza di shunt e della corrente che attraversa la bobina.

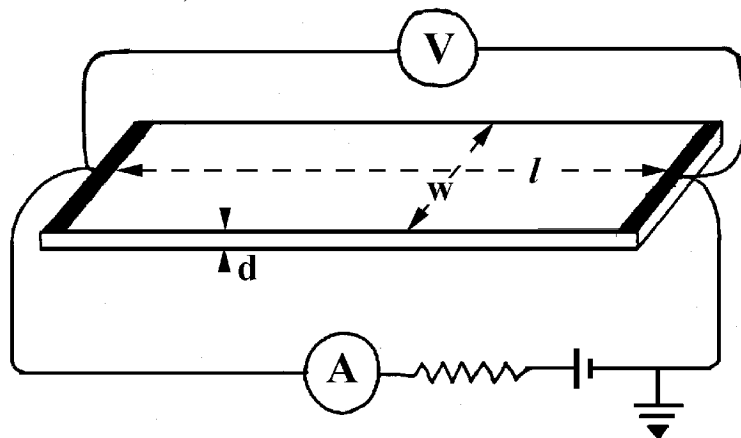
## ESERCIZI

1) Uno strumento a bobina mobile ha campo magnetico di  $0.5 \text{ T}$ , molla di richiamo con costante elastica angolare da  $10^{-3} \text{ Nm}$ , e bobina costituita da 1000 spire di filo di rame di diametro  $30 \mu\text{m}$ , avvolte su un telaio di area  $5 \times 4 \text{ cm}^2$ . La scala graduata copre  $\pm 30^\circ$ . Calcolare: a) la resistenza dello strumento, b) la corrente e la tensione ai capi quando lo strumento è a fondo scala, c) la resistenza di shunt da inserire tra i morsetti per ottenere un amperometro con fondo scala di  $50 \text{ mA}$ .

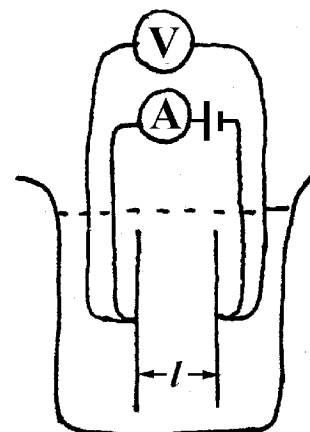
## 5.2 Misure stazionarie di conducibilità

Con riferimento alla figura 2a), pensiamo che un nastro conduttore o semiconduttore omogeneo di spessore  $d$ , larghezza  $w$  e lunghezza  $l$  sia alimentato da una batteria con amperometro in serie. Un voltmetro di resistenza  $R_V$ , collegato ai due depositi metallici spessi rappresentati in neretto nella figura, misura la tensione  $V$  ai capi del nastro. Si noti che le resistenze dei cavetti che vanno al voltmetro, detti voltmetrici, e dei cavi che portano corrente, detti amperometrici, non influiscono sul risultato della misura. Infatti la resistenza dei cavetti voltmetrici è comunque trascurabile rispetto a quella del voltmetro, e la corrente  $I$  nel nastro viene ottenuta dalla lettura  $I_A$  dell'amperometro come  $I = I_A - V/R_V$ , senza dover conoscere la resistenza del circuito amperometrico. Questo schema, detto **voltamperometrico**, è adatto a misurare anche resistenze molto piccole. Misurati  $d$ ,  $w$ ,  $l$ ,  $V$  ed  $I$ ,

Fig. 5.2 a)



b)



la conducibilità risulta

$$g = \frac{j_f}{E} = \frac{Il}{Vwd}$$

Nel caso di liquidi debolmente conduttori si procede inserendoli tra due lastre metalliche parallele di area  $S$  separate da una piccola distanza  $l$ , come mostrato in figura 2b). La conducibilità si ottiene dalle misure voltamperometriche come nel caso precedente, con  $w d$  sostituito da  $S$ . Nella tabella seguente riportiamo le resistività  $1/g$  di alcuni materiali. Si noti che la resistività dell'acqua dipende dalla densità di ioni in soluzione e può raggiungere valori di alcuni  $M\Omega m$  dopo trattamenti di distillazione e di osmosi.

**Resistività  $1/g$  di materiali a temperatura ambiente, in  $\Omega m$**

Argento	$1.6 \times 10^{-8}$	Acqua di mare	0.3
Rame	$1.7 \times 10^{-8}$	Terreno umido	1 – 100
Alluminio	$2.8 \times 10^{-8}$	Acqua potabile	10 – 100
Tungsteno	$5.6 \times 10^{-8}$	Acqua ultradist.	$10^6$
Ferro	$1.0 \times 10^{-7}$	Germanio puro	0.5
Platino	$1.1 \times 10^{-7}$	Silicio puro	$6.4 \times 10^2$
Ottone	$7.0 \times 10^{-8}$	Neoprene	$10^9$
Manganina	$4.5 \times 10^{-7}$	Vetro	$10^{10} - 10^{14}$
Nichelcromo	$1.0 \times 10^{-6}$	Teflon	$10^{14}$
Carbone	$\approx 10^{-4}$	Paraffina	$10^{16}$

Aggiungiamo che, spesso, la resistività viene indicata con  $\rho$ , ma noi preferiamo indicarla con  $1/g$  per evitare di confonderla con la densità di carica.

### 5.3 Modello a tempo di rilassamento

In questo paragrafo presentiamo un modello che si rivelerà prezioso nel descrivere i fenomeni di conduzione. Per semplicità limitiamo l'attenzione alla classe dei **materiali con mobilità unipolare**, nei quali un fluido di portatori è mobile entro una distribuzione di cariche libere fisse. Ad esempio nei

metalli nobili, nei metalli alcalini e nei semiconduttori pesantemente drogati  $n$  i portatori sono elettroni mobili entro una distribuzione di ioni positivi vibranti intorno a posizioni fisse. Indichiamo con  $q = \pm e$  la carica di un portatore e con  $m$  la sua massa, senza preoccuparci di precisarne il valore, ed indichiamo con  $\mathbf{v}(t)$  la velocità media dei portatori in presenza del campo ELETTRICO  $\mathbf{E}(t)$ . In realtà i portatori si muovono con velocità grandissime, anche dell'ordine di  $10^7$   $m/s$  nei metalli, ma la velocità media  $\mathbf{v}(t)$  è nulla in condizioni rilassate e raggiunge raramente  $1$   $m/s$  anche in presenza di campi ELETTRICI molto intensi. Ammettiamo anche che i portatori siano frenati dalla forza d'attrito media  $\mathbf{F}_A(t) = -m\mathbf{v}(t)/\tau$ , riservandoci di mostrare che questa ipotesi è consistente con la legge di Ohm locale e riservandoci di valutare il tempo  $\tau$ . Con tale modello, l'equazione del moto del portatore medio risulta

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = q\mathbf{E}(t) - \frac{1}{\tau} m\mathbf{v}(t)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\tau/m$  e riarrangiando i termini, rimaniamo alle prese con l'equazione fondamentale dei materiali con mobilità unipolare

$$\tau \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} + \mathbf{v}(t) = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E}(t) \quad (5.1)$$

Per dare significato al tempo  $\tau$ , cominciamo a pensare che il campo ELETTRICO abbia agito nel passato, ma sia nullo a partire dal tempo zero. In tal caso, dal tempo zero in poi l'equazione 1) si riduce a

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{v}(t)}{\tau} \quad \text{e ha soluzione} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{-t/\tau}$$

dove  $\mathbf{v}(0)$  è la velocità media dei portatori al tempo zero. Ciò mostra che  $\tau$  è il **tempo di rilassamento** della velocità media dei portatori.

Nel capitolo 10 useremo l'equazione 1) per studiare la conduzione in regime armonico, per ora pensiamo che il campo ELETTRICO e la velocità del fluido di portatori siano stazionari sin dal lontano passato. In tal caso l'equazione 1) si riduce a

$$\mathbf{v} = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E} \quad (5.2)$$

e la densità di corrente in un materiale con densità di portatori  $n$  risulta

$$\mathbf{j}_f = qn\mathbf{v} = \frac{e^2 n \tau}{m} \mathbf{E} \quad (5.3)$$

Dunque l'ipotesi che la conduzione nei materiali unipolari sia contrastata da una forza d'attrito proporzionale alla velocità media dei portatori è consistente con la legge di Ohm locale. Dall'equazione 3) si vede anche che la conducibilità è legata ai parametri del modello dalla relazione

$$g = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (5.4)$$



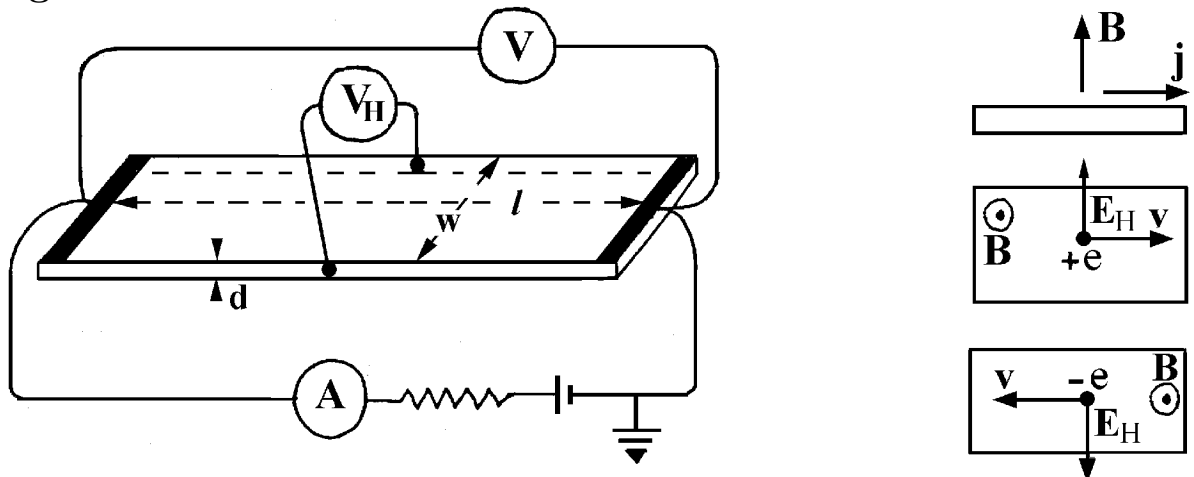
## ESERCIZI

1) Ammettere che nel rame sia libero un elettrone per atomo e ricordare che il rame ha peso atomico 63, densità relativa 8.9 e conducibilità  $6 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$ . Valutare: a) la densità dei portatori, b) il tempo di rilassamento  $\tau$  nell'ipotesi che la massa dei portatori sia quella dell'elettrone libero ( $m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ ), d) la velocità del fluido di portatori quando la densità di corrente raggiunge  $10 A/mm^2$ .

### 5.4 Misure Hall di densità, segno e mobilità dei portatori, misure di B con sonda Hall

Con riferimento alla figura 3, pensiamo che un nastro conduttore o semiconduttore omogeneo abbia anche due contatti laterali ben contrapposti collegati ai morsetti di un voltmetro, e pensiamo che le resistenze dei voltmetri

Fig. 5.3



“longitudinale” e “trasverso” siano tanto grandi da non doverci preoccupare di correggere le letture. A regime l’ampmetro misura la corrente  $I$  nel nastro, il voltmetro longitudinale misura la tensione  $V$  ai capi del nastro ed il voltmetro trasverso misura tensione nulla (i contatti sono contrapposti).

Ora introduciamo il nastro tra le espansioni polari di un magnete avendo cura che il suo piano sia ortogonale al campo magnetico. In tal caso può avvenire che il voltmetro trasverso segni una tensione  $V_H$  positiva o negativa. L’indice  $H$  viene usato per ricordare Hall che ha scoperto l’effetto nel tardo 800. Per capire l’origine e la straordinaria importanza dell’effetto Hall, cominciamo ad osservare che, in condizioni stazionarie, la densità di corrente  $\mathbf{j}_f$  nel nastro è longitudinale e viene letta dall’ampmetro come  $j_f = I/(wd)$ . Invece il campo ELETTRICO nel nastro ha una componente longitudinale che viene letta come  $E_l = V/l$ , e ha una componente trasversa che viene letta come  $E_H = V_H/w$ . Dunque la presenza del campo MAGNETICO rende anisotropa la conduzione: il campo ELETTRICO e la densità

di corrente formano un angolo  $\theta_H$ , detto **angolo di Hall**, che può essere positivo o negativo ed è determinato dal rapporto

$$\tan \theta_H = \frac{E_H}{E_l} = \frac{V_H}{V} \frac{l}{w}$$

In generale l'effetto Hall può coinvolgere vari tipi di portatori e la sua interpretazione può essere molto complicata, ma diventa semplice nei materiali con mobilità unipolare. In tal caso la nuvola di portatori è soggetta alla densità di forza  $nq[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  e si muove con velocità assiale, quindi  $E_H + vB$  deve essere nullo e l'equazione 2) deve essere sostituita da  $v = q\tau E_l/m$ . Pertanto la tangente dell'angolo di Hall vale

$$\tan \theta_H = \frac{E_H}{E_l} = \frac{-vB}{mv/q\tau} = -\frac{q\tau}{m} B \quad (5.5)$$

e ha segni opposti per lacune ed elettroni, come mostrato negli inserti della figura. Le misure del valore assoluto di  $\tan \theta_H$  e di  $B$  forniscono i valori di una grandezza molto importante, la

$$\text{mobilità dei portatori} \quad \frac{e\tau}{m} = \frac{|\tan \theta_H|}{B}$$

Questa grandezza viene indicata con  $\mu_n$  oppure con  $\mu_p$  a seconda che i portatori siano negativi o positivi ed è importantissima proprio perché può essere misurata senza dover fare ipotesi sul tempo di rilassamento e sulla massa dei portatori. Per questa ragione, le misure di mobilità, condotte in funzione della temperatura e dei livelli di drogaggio, sono alla base della fisica e della tecnologia dei semiconduttori, e sono eseguite sistematicamente nei laboratori e nelle industrie che studiano e producono dispositivi a semiconduttore.

L'equazione 5) è importantissima anche per un'altra ragione: disponendo di un nastro con portatori unipolari di mobilità ben nota, possiamo costruire una **sonda Hall** capace di misurare il campo magnetico con grande accuratezza. Infatti le misure di  $\theta_H$  per varie orientazioni del nastro forniscono modulo e verso del campo magnetico.

## ESERCIZI

1) Mostrare che la mobilità ha dimensione inversa di quella del campo magnetico  $B$ .

2) A  $T$  ambiente un metallo ha mobilità  $\mu_n \approx 2 \cdot 10^{-3} T^{-1}$  e conducibilità elettrica  $g \approx 5 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$ . Valutare la densità di portatori.

3) Un nastro di lunghezza  $10 \text{ cm}$ , spessore  $0.1 \text{ cm}$  e larghezza  $5 \text{ mm}$  è perpendicolare ad un campo magnetico da  $1 T$ . Quando il nastro è percorso dalla corrente di  $1 \text{ mA}$  la tensione ai capi e la tensione Hall risultano  $10 V$  e  $1 V$ . Ammesso che il nastro abbia mobilità unipolare, calcolare: a) la velocità dei portatori, b) la densità di portatori.

## 5.5 Effetto Joule; regole di Kirchhof

Il fatto che un conduttore percorso da corrente si scaldi e ceda calore all'ambiente circostante ha il merito storico di aver richiamato l'attenzione sugli aspetti energetici dell'elettromagnetismo. A questo proposito diciamo che le leggi della termodinamica e dell'elettromagnetismo erano già ben stabilite nella seconda metà dell'800, ma allora la localizzazione spaziale dell'energia elettromagnetica presentava notevoli difficoltà concettuali: non era facile accettare l'idea che il vuoto potesse essere sede di energia elettromagnetica. Gli esperimenti sugli effetti termici delle correnti e gli esperimenti sugli scambi di energia tra le batterie e le varie parti dei circuiti elettrici hanno avuto un ruolo fondamentale nel far maturare le idee. Crediamo che debbano avere lo stesso ruolo negli approcci didattici moderni e, a partire da questo paragrafo, iniziamo un lungo percorso che ci porterà a capire cosa sia l'energia elettromagnetica e come si propaghi da un sistema all'altro anche attraverso il vuoto.

Con riferimento alla figura 4, pensiamo che ai capi di un elemento filiforme di materia immerso in un calorimetro siano collegati cavetti voltamperometrici, che il circuito amperometrico sia alimentato da una batteria con interruttore in serie, e che la tensione  $V$  ai capi dell'elemento sia misurata da un voltmetro di resistenza interna tanto grande da poter trascurare la corrente nel circuito voltmetrico. In tal caso, la corrente  $I$  letta dall'amperometro è proprio quella che attraversa l'elemento di materia. Non avanziamo ipotesi sul meccanismo di conduzione, non pretendiamo che  $V$  ed  $I$  siano legati dalla legge di Ohm, non escludiamo che estraendo l'elemento dal calorimetro, o ponendolo in un campo magnetico,  $V$  ed  $I$  possano cambiare, ci limitiamo a misurarle. A partire dall'istante di chiusura del circuito leggiamo la temperatura  $T(t)$  del bagno calorimetrico, la corrente  $I(t)$  e la tensione  $V(t)$  in funzione del tempo. Con misure di questo tipo, valutando accuratamente l'equivalente in acqua del calorimetro e la capacità termica del sistema immerso, Joule ha mostrato che la potenza  $W(t)$  ceduta dall'elemento di materia al calorimetro è legata alla tensione ed alla corrente dalla relazione

$$W(t) = I(t)V(t)$$

Sottolineiamo che questo risultato vale anche nel caso che l'elemento di materia non sia omogeneo e non abbia sezione costante, vale qualunque sia il meccanismo di conduzione e vale anche quando il calorimetro viene immerso in un campo magnetico, perché in tal caso la densità di forza magnetica è ortogonale a  $\mathbf{j}$  e non compie lavoro sui portatori.

In particolare la potenza dissipata in un nastro omogeneo di lunghezza  $l$  e sezione  $S$  costante può essere scritta nella forma

$$W(t) = I(t)V(t) = j_f(t)SE_l(t)l = j_f(t)E_l(t)\mathcal{V} = \mathbf{j}_f(t) \cdot \mathbf{E}(t)\mathcal{V}$$

dove  $E_l(t) = V(t)/l$  è la proiezione longitudinale del campo ELETTRICO  $\mathbf{E}(t)$  e  $\mathcal{V}$  è il volume del nastro. Ciò induce a pensare che  $w(t) = \mathbf{j}_f(t) \cdot \mathbf{E}(t)$  sia la densità di potenza dissipata nel materiale omogeneo e che

$$w(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (5.6)$$

sia la **densità di potenza dissipata** in un intorno del punto  $\mathbf{r}$  di un generico materiale. La potenza  $w(t, \mathbf{r})d\mathcal{V}$  viene ceduta irreversibilmente dal campo ELETTRICO alla materia contenuta nel volumetto  $d\mathcal{V}$  centrato in  $\mathbf{r}$ . Possiamo anche dire che il rapporto tra  $w(t, \mathbf{r})$  e la temperatura  $T(t, \mathbf{r})$  è il tasso di creazione di entropia, intendendo l'“entropia creata per unità di volume e per unità di tempo”.

Ora possiamo rispondere alla domanda: dove va a finire la potenza chimica  $\mathcal{E}I$  fornita da una batteria percorsa da corrente continua  $I$  quando non vi sono parti del circuito in moto? Viene dissipata un po' nella batteria ed un po' nel circuito esterno che comprende gli strumenti di misura. Il prodotto della tensione ai morsetti  $V$  per la corrente  $I$  è la potenza elettrica dissipata nel circuito esterno, mentre  $(\mathcal{E} - V)I$  è la potenza dissipata entro la batteria. Si noti che questa risulta positiva sia in fase di carica, sia in fase di scarica: la batteria si scalda ed emette calore comunque.

Fig. 5.4

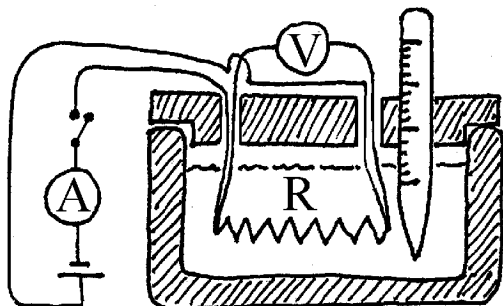
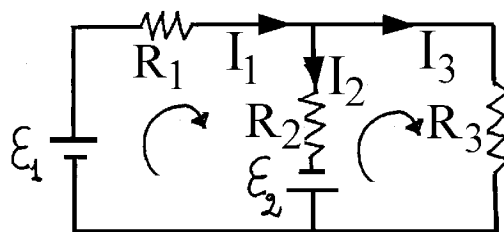


Fig. 5.5



Negli esercizi di questo paragrafo e nel seguito del corso saranno utili due regole che abbiamo già usato in molte circostanze senza enunciarle esplicitamente. Sono note come **leggi di Kirchhoff** e derivano da leggi fondamentali che abbiamo già studiato. La prima è una conseguenza della legge di conservazione della carica, dice che **la somma algebrica delle correnti entranti in un nodo circuitale stazionario è nulla**. La seconda legge di Kirchhoff è conseguenza del fatto che **la circolazione del campo ELETTRICO stazionario lungo una qualunque maglia circuitale è nulla**. Dice che **la somma algebrica delle (cadute di) tensioni nei lati di una maglia circuitale è uguale alla somma algebrica delle forze elettromotrici inserite nella maglia**. Ad esempio, per calcolare le correnti nel circuito in figura 5, date le forze elettromotrici e le resistenze, possiamo scegliere un nodo e due maglie e scrivere il sistema

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0, \quad -R_2 I_2 + R_3 I_3 + \mathcal{E}_2 = 0$$

## ESERCIZI

1) Una batteria con  $\mathcal{E}$  ed  $R_i$  note viene chiusa su una resistenza  $R$ . a) Calcolare la potenza dissipata nella resistenza. b) Scegliere  $R$  in modo da dissipare la massima potenza. c) Dire se la resistenza che dissipa la massima potenza dissipa anche la massima energia nel processo di scarica completo.

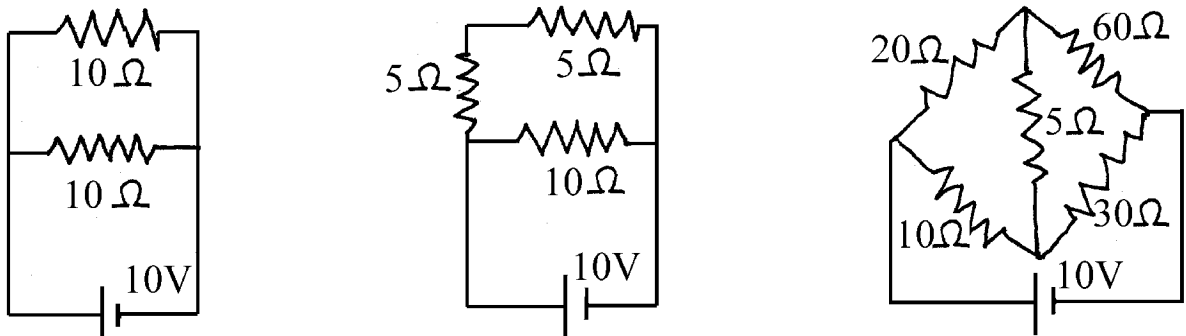
2) Una batteria, inizialmente scarica, viene caricata con tensione di  $13\text{ V}$  e corrente di  $10\text{ A}$  per  $5$  ore, poi alimenta un carico con corrente di  $1\text{ A}$  e tensione di  $11\text{ V}$ . Dopo  $50$  ore la batteria è scarica. Calcolare il rendimento.

3) In una pentola metallica contenente acqua potabile viene immerso un cucchiaio metallico. La pentola ed il cucchiaio vengono collegati ai morsetti di una batteria da  $\mathcal{E} = 12\text{ V}$ , carica con energia chimica di  $1\text{ MJ}$ . Ammettere che la tensione tra pentola e cucchiaio rimanga costante a  $10\text{ V}$  e crolli bruscamente solo alla fine. Calcolare l'energia ceduta all'acqua e l'energia dissipata nella batteria.

4) Una sonda Hall è costruita con un nastro omogeneo di spessore  $10\ \mu\text{m}$ , larghezza  $2\text{ mm}$ , lunghezza  $10\text{ mm}$ , con portatori di mobilità  $10\text{ T}^{-1}$  e densità  $n = 10^{14}/\text{cm}^3$ . a) Calcolare la resistenza del nastro. b) Scegliere la tensione di alimentazione in modo che la densità di potenza dissipata non superi  $1\text{ W}/\text{cm}^3$ . c) Ammettere che il voltmetro trasverso abbia sensibilità di  $1\ \mu\text{V}$  e valutare la sensibilità della sonda.

5) Calcolare le correnti e le potenze dissipate nelle resistenze in figura 6.

Fig. 5.6



6) Un resistore di resistenza nominale  $10^8\ \Omega$  è un cilindretto di diametro  $3\text{ mm}$  e lunghezza  $2\text{ cm}$ . Calcolarne la resistenza nel caso che le superfici laterali siano coperte da un velo d'acqua di spessore  $100\ \text{\AA}$  e conducibilità pari a quella dell'acqua che beviamo normalmente. Poi ammettere che il resistore coperto dal velo d'acqua sia alimentato con tensione di  $1000\text{ V}$  e calcolare la potenza dissipata nel velo d'acqua.

7) Due sfere metalliche di diametro  $1\text{ m}$  sono immerse in acqua di mare alla distanza di  $100\text{ m}$  e sono collegate ai morsetti di una batteria da  $12\text{ V}$  e resistenza interna  $0.1\ \Omega$  mediante cavi metallici di sezione  $1\text{ cm}^2$ , ricoperti da vernice isolante. Valutare la corrente e la potenza dissipata. AIUTO:

pensare che una sfera sia sostituita da un pallone enorme che circondi l'altra sfera e calcolare la resistenza d'elettrodo. Poi disegnare qualitativamente le linee di flusso del campo ELETTRICO tra le due sfere, ricordando che sono anche linee di flusso della densità di corrente, e arguire che la resistenza del circuito esterno è poco diversa dalla somma delle due resistenze d'elettrodo.

8) La densità di potenza dissipata in un conduttore di rame è  $0.2 \text{ W/cm}^3$ . Valutare: a) il campo ELETTRICO nel rame, b) la densità di corrente, c) la velocità del fluido di portatori.

9) Una stufa elettrica costruita con filo di nichelcromo di sezione  $1 \text{ mm}^2$  e lunghezza  $2 \text{ m}$  viene alimentata con  $V = 200 \text{ V}$ . Calcolare: a) la potenza dissipata, b) il campo ELETTRICO nel filo, c) la densità di corrente, d) la velocità del fluido di portatori.

## 5.6 Misure statiche della costante dielettrica

In questo paragrafo descriviamo un metodo di misura della costante dielettrica che ha un certo interesse didattico, ma ha valore sperimentale molto modesto; descriveremo un metodo di misura concreto dopo aver studiato le correnti alternate.

Fig. 5.7

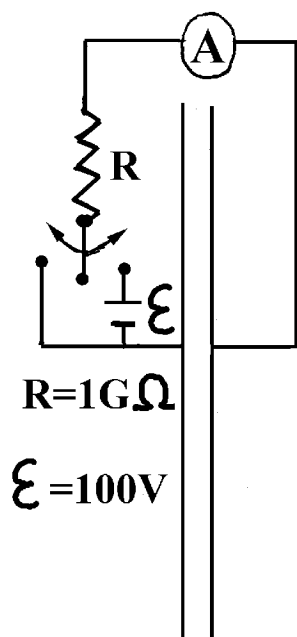
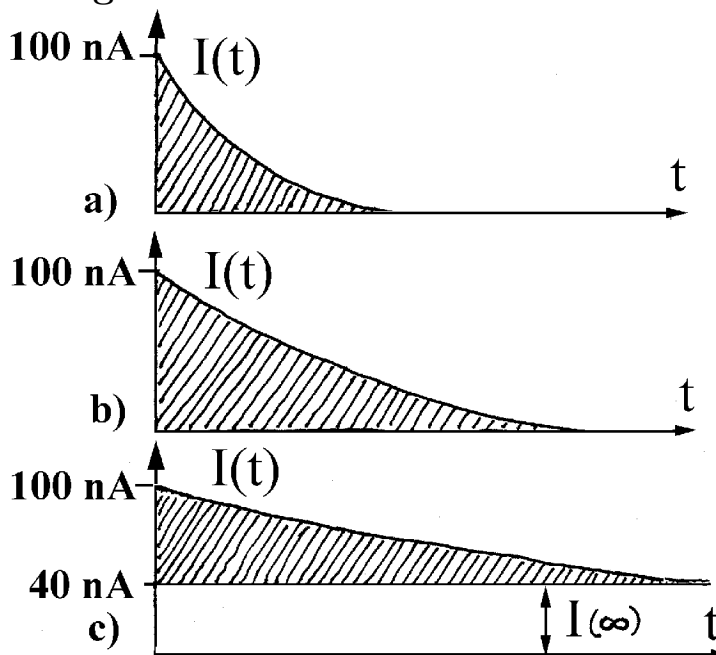


Fig. 5.8



Con riferimento alla figura 7, pensiamo che un condensatore con armature di area  $S = 2 \text{ m}^2$ , separate dalla distanza  $h = 1 \text{ mm}$ , sia inserito in un circuito comprendente una batteria da  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ , una **resistenza di carico**  $R_c = 1 \text{ G}\Omega$ , un amperometro che misura la corrente  $I(t)$ , ed un deviatore che consente di sostituire la batteria con un conduttore di **corto circuito**. Dapprima pensiamo che il condensatore sia vuoto e che il circuito sia chiuso sul corto da molto tempo. Al tempo zero chiudiamo il circuito sulla batteria

e procediamo a misurare la corrente ad istanti successivi, ottenendo i risultati mostrati in figura 8a). A questo punto scarichiamo il condensatore sul corto, riempiamo lo spazio tra le lastre con un materiale omogeneo e ripetiamo la misura ottenendo il grafico b). Poi cambiamo materiale e procediamo ad una nuova misura, ottenendo il grafico c).

Nei casi a) e b) la corrente diventa nulla a tempi lunghi, quindi la tensione  $V$  tra le armature diventa uguale ad  $\mathcal{E}$  e la carica  $Q$  sull'armatura positiva prende i valori rappresentati dalle "aree" tratteggiate nei due grafici. Il rapporto tra le cariche misurate nei casi b) ed a) è la costante dielettrica del materiale. Nel caso c) il dielettrico non è perfetto: a tempi lunghi la corrente raggiunge un valore stazionario non nullo, pari a  $I(\infty) = 40 \text{ nA}$ . In tal caso la carica  $Q$  è misurata dall'area tratteggiata, la tensione finale vale  $V = \mathcal{E} - RI(\infty) = 60 \text{ V}$  e la costante dielettrica del materiale è il rapporto tra la capacità  $Q/V$  e la capacità misurata nel caso a).

## 5.7 Densità di energia elettrica

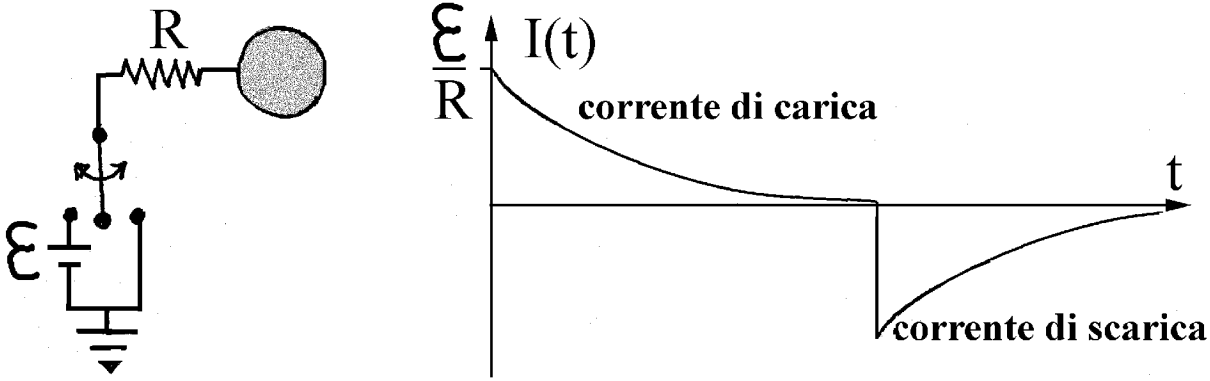
Ora poniamo le domande: quanta energia dobbiamo fornire ad una sfera metallica immersa in un dielettrico omogeneo per portarla a tensione  $V$  rispetto alla massa? Quanta energia viene dissipata durante la fase transitoria? Alla prima domanda possiamo rispondere in modo astratto: pensiamo che la tensione della sfera sia nulla all'inizio ed osserviamo che, dopo il trasferimento sulla sfera della carica  $q$ , la tensione diventa  $V(q) = q/C$ . Per trasferire l'ulteriore carica  $dq$  dalla massa alla sfera dobbiamo compiere il lavoro  $dqV(q) = dq q/C = dq^2/(2C)$ . Integrando da carica nulla a carica  $Q$  troviamo che l'energia ceduta al sistema vale

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}$$

La risposta è corretta, ma abbiamo calcolato l'energia ceduta al sistema, non l'energia necessaria per caricarlo. Il ragionamento astratto che abbiamo fatto nasconde un po' la fisica del problema e non consente di rispondere alla seconda domanda. Pertanto seguiamo un approccio più concreto facendo riferimento alla figura 9. Pensiamo che il deviatore, tenuto sul corto nel passato, sia chiuso istantaneamente sulla batteria al tempo zero. Indichiamo con  $R$  la resistenza complessiva della batteria, dei cavi di collegamento e della resistenza di carico, con  $I(t)$  la corrente, con  $V(t)$  la tensione della sfera, con  $\mathcal{E} - V(t)$  la tensione ai capi della resistenza e con  $q(t) = CV(t)$  la carica erogata dalla batteria e trasferita alla sfera al tempo  $t$ . Al tempo  $t$  la batteria ha erogato l'energia  $q(t) \mathcal{E}$  mentre la resistenza ha dissipato l'energia

$$\int_0^t [\mathcal{E} - V(t')] I(t') dt' = q(t) \mathcal{E} - \int_0^t \frac{q(t')}{C} dq(t') = q(t) \mathcal{E} - \frac{q^2(t)}{2C}$$

Fig. 5.9



Ciò mostra che l'energia erogata dalla batteria è maggiore di quella dissipata ed induce a pensare che l'energia  $q^2(t)/2C = V(t)q(t)/2$  sia immagazzinata nel sistema. Quando il dielettrico è perfetto, la tensione raggiunge il valore  $V = \mathcal{E}$ , la carica della sfera raggiunge il valore  $Q = C\mathcal{E}$  e l'energia immagazzinata diventa

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

In questo caso l'energia dissipata nella resistenza non dipende dalla resistenza ed è uguale all'energia accumulata nel sistema: metà dell'energia chimica fornita dalla batteria viene dissipata e metà viene immagazzinata nel sistema sotto forma di **energia elettrostatica**.

E quando il dielettrico è parzialmente conduttore? Certamente le ultime conclusioni non valgono e la batteria continua ad erogare potenza anche in condizioni stazionarie:  $V$  non raggiunge  $\mathcal{E}$ ,  $Q$  non raggiunge  $C\mathcal{E}$ , ma rimane vero che l'energia elettrostatica immagazzinata vale

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2$$

In ogni caso, per caricare il sistema dobbiamo fornire una quantità di energia almeno doppia di quella che viene immagazzinata!

A riprova che l'energia  $CV^2/2$  è presente da qualche parte nel condensatore carico a tensione  $V$  si pensi che il deviatore, chiuso sulla batteria sin dal lontano passato, venga portato istantaneamente sul corto al tempo zero. In tal caso la tensione della sfera alimenta la resistenza e genera la corrente  $I(t) = V(t)/R$ . D'altra parte la corrente provoca la diminuzione della tensione con legge  $I(t) = -CdV(t)/dt$ , dunque

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{V(t)}{RC} \quad \implies \quad V(t) = V e^{-t/RC}$$

Pertanto durante il processo di scarica la resistenza dissipa l'energia

$$U_{diss} = \int_0^\infty V(t)I(t)dt = \int_0^\infty \frac{V^2(t)}{R}dt = \frac{V^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2}CV^2$$



che era stata accumulata durante la fase di carica. Si noti che il processo di scarica è tanto più veloce quanto più piccola è la resistenza, ma l'energia dissipata non dipende da  $R$ .

Domandiamo ora: dov'è il magazzino dell'energia elettrostatica  $U_e$ ? Per rispondere cominciamo a considerare la situazione in un condensatore piano con armature di area  $S$  separate da distanza  $h$ . In tal caso, ricordando che  $V = Eh$  e che  $Q = SD$ , vediamo che

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}EDhS = \frac{1}{2}ED\mathcal{V}$$

dove  $\mathcal{V}$  è il volume racchiuso tra le armature. Ciò suggerisce l'idea che l'energia elettrica sia distribuita tra le armature con densità  $u_e = ED/2$ . Per verificare se si possa estendere questa idea anche al caso di una sfera immersa in un dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo, ammettiamo che l'energia sia distribuita davvero nel dielettrico con densità

$$u_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}E(\mathbf{r})D(\mathbf{r})$$

Ricordando che  $D(r)$  ed  $E(r)$  sono legate alla carica  $Q$  ed alla tensione  $V$  della sfera dalle relazioni  $D(r) = Q/(4\pi r^2)$ ,  $E(r) = Vr_0/r^2$ , si vede che l'energia immagazzinata vale

$$\int_{r_0}^{\infty} 4\pi r^2 dr u_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{\infty} 4\pi r^2 dr \frac{QVr_0}{4\pi r^4} = \frac{QV}{2} \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{r_0}{r^2} = \frac{QV}{2}$$

Dunque sembra davvero che l'energia elettrostatica sia distribuita nei dielettrici: vi si accumula durante le fasi transitorie quando il dielettrico si polarizza. Non è sorprendente: la polarizzazione è un fenomeno simile al caricamento di una molla e nessuno può sorprendersi che immagazzini energia. Ma la sorpresa diventa lecita quando dobbiamo ammettere che anche il vuoto può accumulare energia.

## ESERCIZI

Nei primi quattro esercizi pensiamo che due armature metalliche parallele, di sezione  $10 \times 10 \text{ cm}^2$ , distanti  $1 \text{ mm}$ , siano alimentate da una batteria con  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$  e  $R_i = 10 \Omega$ .

1) Lo spazio tra le armature è riempito omogeneamente con un materiale di costante dielettrica  $\epsilon = 8$  e conducibilità elettrica  $10^{-5} (\Omega m)^{-1}$ . Calcolare l'energia immagazzinata e la potenza dissipata a regime.

2) Tra le armature sono inseriti due strati paralleli di spessori  $0.2 \text{ mm}$  e  $0.8 \text{ mm}$  con costanti dielettriche 4 ed 8 rispettivamente. Uno dei due strati ha conducibilità elettrica trascurabile. Calcolare: a) l'energia immagazzinata, b) le densità d'energia nei due strati.

3) Lo spazio tra le armature è riempito a metà da un dielettrico di costante dielettrica 8. Calcolare: a) le densità di energia nelle due parti, b) l'energia totale immagazzinata.

4) Pensare che le armature non siano fisse, ma siano tenute separate da un dielettrico omogeneo interposto. Tenere presente che un'armatura non esercita forze su se stessa e dedurre che: a) **la forza agente su ciascuna armatura vale  $QE/2$** , b) **la pressione agente nel dielettrico vale  $ED/2$ , proprio come la densità d'energia.**

5) Un pezzo di cavo coassiale lungo  $100m$  ha conduttore interno di diametro  $1\text{ mm}$  e guaina metallica di spessore  $0.1\text{ mm}$  con diametro interno  $5\text{ mm}$ . L'intercapedine è riempita da un materiale con  $\epsilon = 2.1$  e conducibilità trascurabile (teflon). Un estremo del cavo è alimentato da una batteria da  $12\text{ V}$  e resistenza interna trascurabile. L'altro estremo è aperto nel caso a) ed è chiuso su un resistore da  $10\ \Omega$  nel caso b). Nei due casi calcolare l'energia elettrostatica accumulata nel dielettrico.

## 5.8 Processi di succhiamento del dielettrico

In questo paragrafo partiamo dalla conoscenza dell'energia elettrica di un semplice sistema isolato fuori equilibrio e calcoliamo la forza che tende a far evolvere il sistema verso lo stato di equilibrio. Precisamente consideriamo la situazione illustrata in figura 10: tra due armature metalliche parallele, di sezione  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ , tenute fisse alla distanza di  $1\text{ mm}$ , viene introdotta la parte iniziale di una lastra di costante dielettrica  $\epsilon = 5$ . La lastra ha larghezza lievemente minore di  $10\text{ cm}$  e spessore lievemente minore di  $1\text{ mm}$ , così da entrare ed uscire dalle armature con il minimo attrito. Poniamo il

Fig. 5.10

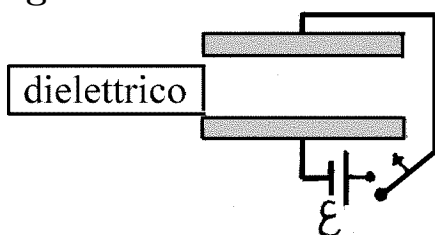
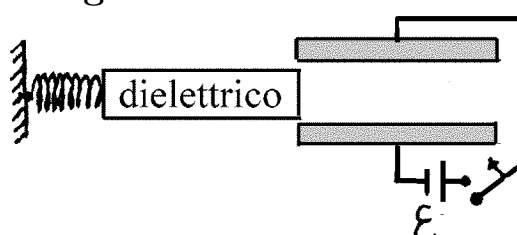


Fig. 5.11



problema: calcolare la forza agente sulla lastra in funzione della lunghezza  $x$  della parte già entrata, nei casi seguenti. a) Prima di introdurre la lastra il condensatore viene chiuso sulla batteria di forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  ed acquista la carica  $Q = C(0)\mathcal{E}$ , dove  $C(0)$  è la capacità del condensatore vuoto. Poi il circuito viene aperto e la lastra viene lasciata entrare. b) La lastra viene lasciata entrare con circuito permanentemente chiuso sulla batteria.

Nel caso a) il condensatore e la lastra formano un sistema isolato e le armature hanno carica  $Q$  costante. Indicata con  $C(x)$  la capacità del condensatore con lastra entrata del tratto  $x$ , l'energia elettrica del sistema risulta

$$U(x) = \frac{Q^2}{2C(x)}$$

Nel caso b) la batteria, il condensatore e la lastra formano un sistema isolato e la tensione ai capi del condensatore rimane uguale ad  $\mathcal{E}$ . Indicata con  $U_{chim}(0)$  l'energia della batteria quando la lastra è proprio all'ingresso ( $x = 0$ ), l'energia elettrica del sistema per  $x = 0$  risulta

$$U(0) = U_{chim}(0) + \frac{1}{2}C(0)\mathcal{E}^2$$

Con lastra entrata di un tratto  $x$ , il condensatore ha energia  $C(x)\mathcal{E}^2/2$ , la batteria ha energia  $U_{chim}(x) = U_{chim}(0) - (Q(x) - Q(0))\mathcal{E}$ , quindi l'energia elettrica del sistema risulta

$$U(x) = U_{chim}(0) + Q(0)\mathcal{E} - Q(x)\mathcal{E} + \frac{1}{2}C(x)\mathcal{E}^2 = U(0) + \frac{1}{2}C(0)\mathcal{E}^2 - \frac{1}{2}C(x)\mathcal{E}^2$$

Tenendo presente che  $C(x)$  aumenta all'aumentare di  $x$ , si vede che, in entrambi i casi, l'energia elettrica diminuisce mano a mano che la lastra entra. Naturalmente dobbiamo ammettere che la diminuzione di energia elettrica sia accompagnata dalla produzione di energia d'altro tipo; nel caso a) la lastra acquista energia cinetica e la dissipa per vincere le forze d'attrito che intervengono durante il processo; nel caso b), oltre alla dissipazione per attrito tra la lastra e le armature, interviene la dissipazione interna alla batteria.

A questo punto basta derivare  $U(x)$  e cambiare segno per calcolare la forza elettrica agente sulla lastra. Otteniamo così

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = \frac{Q^2}{2C^2(x)} \frac{dC(x)}{dx} \quad \text{nel caso a)}$$

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \frac{dC(x)}{dx} \quad \text{nel caso b)}$$

Si noti che, indicata con  $V(x)$  la tensione tra le armature, pari a  $Q/C(x)$  nel caso a) e ad  $\mathcal{E}$  nel caso b), la forza elettrica risulta

$$F(x) = \frac{V^2(x)}{2} \frac{dC(x)}{dx}$$

Dunque, a parità di tensione tra le armature, agisce la stessa forza nei due casi. Si noti anche che  $dC(x)/dx$  è positivo, quindi la forza è attrattiva: il condensatore attira il dielettrico al suo interno per portarsi nello stato di energia elettrica minima.

Infine pensiamo che una molla contrasti l'ingresso della lastra fornendo una forza di richiamo proporzionale ad  $x$ , come schematizzato in figura 11. In tal caso una parte dell'energia elettrica persa viene convertita in energia potenziale elastica ed una parte viene dissipata. Una situazione simile si presenta quando le armature sono verticali e "pescano" col bordo inferiore in una vasca contenente un dielettrico liquido: il liquido sale ed una parte dell'energia elettrica viene convertita in energia potenziale gravitazionale.

## ESERCIZI

1) Nella situazione di figura 10 e con i valori delle varie grandezze dati nel testo, calcolare e riportare in grafico  $C(x)$  ed  $F(x)$  nei casi a) e b).

2) Con riferimento alla figura 11, pensare che la lastra sia collegata ad una molla di costante elastica  $k = 100\text{N}/\text{m}$  e pensare che la molla sia a riposo quando la lastra è all'ingresso del condensatore. a) Calcolare la forza elettromotrice necessaria a far entrare la lastra sino ad occupare metà del condensatore. b) Descrivere i fenomeni che si manifestano quando la forza elettromotrice viene applicata a partire da un certo istante. c) Dire che cosa avviene quando il collegamento alla batteria viene rimosso con lastra in equilibrio a metà condensatore.

3) Ammettere che un dielettrico liquido incompressibile riempia lo spazio tra le armature e calcolare la pressione nel liquido in funzione della distanza tra le armature nei casi a) e b) considerati nel testo.

## ESERCIZI DI RIEPILOGO

1) In una giunzione p-n il campo elettrico built-in raggiunge  $10^7\text{ V}/\text{m}$  e la barriera di potenziale built-in vale  $0.5\text{ V}$ . Determinare gli spessori e le densità di carica delle regioni cariche e riportare in grafico la densità di carica, il campo elettrico ed il potenziale nei seguenti casi: a) la giunzione è simmetrica, b) segno a parte, la densità di carica della regione n è tre volte maggiore di quella della regione p.

2) Una pentola di alluminio di diametro  $1\text{ m}$  ed altezza  $1\text{ m}$  è piena d'acqua di conducibilità  $10^{-2}\text{ }(\Omega\text{m})^{-1}$ . Al centro della pentola viene sospesa una sfera d'alluminio di diametro  $10\text{ cm}$ . Una batteria da  $12\text{ V}$  e resistenza interna  $0.5\text{ }\Omega$  ha un morsetto collegato alla pentola e l'altro alla sfera, con cavi di rame isolati. Valutare: a) il campo ELETTRICO nell'acqua in prossimità della sfera, b) la corrente erogata, c) la carica di conduzione sulla sfera, d) la carica di polarizzazione a contatto con la sfera e) la carica di conduzione sulla parete della pentola.

3) Un nastro di nichelcromo ( $\rho = 10^6\text{ }(\Omega\text{m})^{-1}$ ) di spessore  $0.1\text{ mm}$ , larghezza  $1\text{ cm}$  e lunghezza  $1\text{ m}$ , è collegato ai morsetti di una batteria da  $100\text{ V}$  e resistenza interna  $0.1\text{ }\Omega$ . Calcolare: a) la resistenza del nastro, b) il campo ELETTRICO d'interfaccia nell'ipotesi che la densità superficiale di carica sia nulla, c) come b), ma nell'ipotesi che la densità di carica superficiale sulle facce larghe sia  $\sigma_f = 10^{-9}\text{ C}/\text{m}^2$ , d) come c), ma con nastro immerso in olio di costante dielettrica  $\epsilon = 4$ .

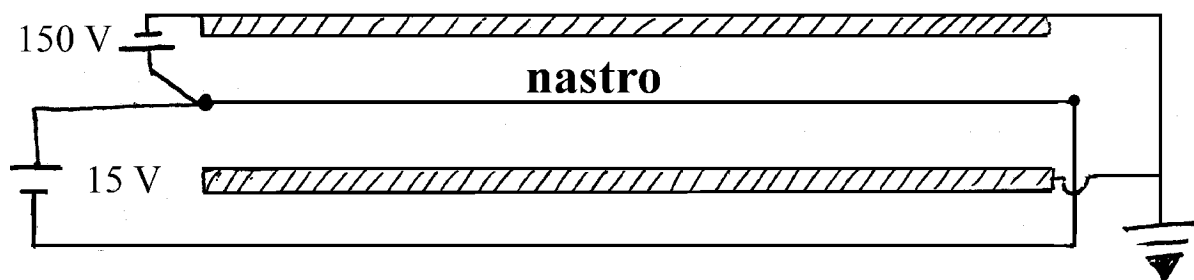
4) Una barra cilindrica lunga  $10\text{ cm}$  ha diametro di  $2\text{ cm}$  ed è uniformemente magnetizzata lungo l'asse con  $M = 10^6\text{ A}/\text{m}$ . Calcolare: a) i campi  $H$  e  $B$  al centro, b) il campo  $H$  sull'asse agli estremi, dentro e fuori, c) il campo  $B$  agli estremi, d) il campo  $\mathbf{B}$  su una superficie sferica di raggio  $10\text{ m}$  centrata al centro della barra.

5) Un aghetto magnetico con momento  $m = 10^{-10} \text{ Am}^2$  ha centro vincolato al centro di una spira circolare di raggio  $10 \text{ cm}$  percorsa da corrente di  $10 \text{ A}$ . Calcolare: a) il campo che stimola l'ago, b) l'energia necessaria per portare l'ago da stabile ad instabile.

6) Una giunzione  $p-i-n$  ha regione  $p$  di spessore  $1 \mu\text{m}$ , regione intrinseca di spessore  $10 \mu\text{m}$  e regione  $n$  di spessore  $0.1 \mu\text{m}$ . La barriera di potenziale vale  $1 \text{ V}$ . Riportare in grafico: a) la densità di carica, b) il campo elettrico, c) il potenziale. Poi calcolare: d) le densità di carica, e) il campo elettrico nella regione intrinseca.

7) Un tubo metallico di diametro interno  $12 \text{ cm}$  e lunghezza  $3 \text{ m}$  è collegato a massa. Sull'asse del tubo e per tutta la sua lunghezza è centrato un cilindro metallico di diametro  $10 \text{ cm}$ . Una batteria da  $100 \text{ V}$  è collegata con morsetto positivo sul cilindro e morsetto negativo a massa. Calcolare: a) la carica sulle armature, b) il campo elettrico a contatto con l'armatura interna. Poi pensare che il tubo sia pieno d'un olio di costante dielettrica  $2.5$  e conducibilità trascurabile e calcolare: c) la capacità del condensatore, d) le cariche di polarizzazione a contatto con le armature interna ed esterna.

**Fig. 5.12**



8) Un nastro di nichelcromo ( $\rho = 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ ) di spessore  $0.01 \text{ mm}$ , larghezza  $10 \text{ cm}$  e lunghezza  $1 \text{ m}$  è teso tra due lastre metalliche parallele distanti  $1 \text{ mm}$ , entrambe collegate a massa come mostrato in figura 12. Gli estremi del nastro sono collegati ai morsetti di una batteria da  $15 \text{ V}$  e resistenza interna  $0.01 \Omega$ . Un estremo è collegato anche al morsetto positivo di una batteria da  $150 \text{ V}$  che ha l'altro morsetto a massa. Pensare che il sistema sia nel vuoto e calcolare: a) la proiezione di  $\mathbf{E}$  sulle facce del nastro, b) la proiezione di  $\mathbf{E}$  sulla normale al nastro, c) l'intensità del campo ELETTRICO in prossimità del nastro. Poi pensare che il sistema sia a bagno in un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon = 4$  e rispondere nuovamente alle domande a), b) e c).

9) Un solenoide lineare illimitato di diametro  $10 \text{ cm}$  ha  $1000 \text{ spire/m}$  percorse da corrente di  $10 \text{ A}$ . Calcolare: a) i campi magnetici  $B$  ed  $H$  nelle regioni interna ed esterna, b) il potenziale vettore (in intensità e verso) in funzione della distanza dall'asse, all'interno e all'esterno.

10) Una giunzione  $p-n$  ha regione  $p$  carica con densità  $-10^{15} \text{ e/cm}^3$  e

regione  $n$  carica con densità cento volte maggiore. La barriera di potenziale vale  $0.7 V$ . a) Riportare in grafico la densità di carica, il campo elettrico ed il potenziale built-in e calcolare: b) gli spessori delle regioni cariche, c) le differenze di potenziale ai capi delle regioni  $p$  ed  $n$ .

11) Una batteria con  $\mathcal{E} = 1.2 V$  viene caricata per 4 ore con corrente di  $1 A$  e tensione di  $1.5 V$ . Calcolare: a) la resistenza interna, b) l'energia usata per caricare la batteria, c) l'energia chimica accumulata. Poi pensare che la batteria venga scaricata su uno strumento che assorbe la corrente di  $2 A$  e calcolare: d) l'energia utilizzata dallo strumento.

12) Un condensatore cilindrico con conduttore centrale di diametro  $2 mm$  e cilindro esterno di diametro interno  $2 cm$  ha lunghezza di  $20 cm$  ed è pieno d'acqua di conducibilità  $g = 10^{-2} (\Omega m)^{-1}$ . Il condensatore è alimentato con una batteria da  $12 V$  e resistenza interna  $1 \Omega$ . a) Stabilire la relazione tra la tensione ai capi e la corrente nel condensatore e calcolare: b) la corrente, c) la carica di conduzione sulle armature, d) la carica di polarizzazione a contatto con le armature.

13) Un disco di diametro  $10 cm$  e spessore  $2 mm$  è magnetizzato normalmente alle facce con  $M = 10^6 A/m$ . Calcolare: a) i campi  $B$  ed  $H$  al centro del disco, all'interno ed all'esterno, b) la corrente di mantello.

14) Una pallina di ferrite di diametro  $1 cm$  e permeabilità magnetica  $\mu = 2000$  è stimolata da un campo uniforme da  $0.1 T$ . Calcolare: a) i campi MAGNETICI  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  all'interno ed all'esterno, b) il momento di dipolo magnetico indotto.

15) In una giunzione  $p - n$ , la regione  $p$  ha spessore di  $1 \mu m$  e densità di carica di  $-10^{15} e/cm^3$ . Calcolare: a) il campo elettrico built-in sul piano di giunzione, b) il contributo della regione  $p$  alla barriera di potenziale built-in. Poi pensare che la regione  $n$  contribuisca alla barriera di potenziale per un decimo del totale e: c) calcolare lo spessore e la densità di carica della regione  $n$ , d) disegnare gli andamenti della densità di carica, del campo elettrico e del potenziale.

16) Un condensatore piano con armature di area  $10 cm^2$  separate da  $1 mm$  è pieno d'acqua con conducibilità  $10^{-6} (\Omega m)^{-1}$  e costante dielettrica  $\epsilon = 80$ . Il condensatore è alimentato da una batteria di forza elettromotrice  $12 V$  e resistenza interna  $0.1 \Omega$ . Calcolare: a) la densità di corrente, b) il campo ELETTRICO, c) il campo di spostamento elettrico, d) la capacità.

17) Una spira quadrata di lato  $2 cm$  è percorsa dalla corrente  $I = 100 A$ . Calcolare il potenziale vettore ed il campo  $\mathbf{B}$  a distanze dal centro di  $1 m$ .

# Capitolo 6

## Introduzione all'elettrodinamica

Finora abbiamo considerato situazioni elettrostatiche o magnetostatiche, ora iniziamo lo studio dell'elettrodinamica. Conosciamo già tre delle equazioni poste da Maxwell alla base della teoria elettromagnetica: la legge di Gauss, la legge di Ampère-Maxwell e la legge che nega l'esistenza dei monopoli magnetici. E sappiamo che le prime due leggi conducono alla legge di conservazione della carica. Per completare il quadro delle leggi elettrodinamiche generali mancano due leggi: la legge di forza e la legge di induzione.

La legge di forza è l'estensione elettrodinamica della legge di forza di Coulomb-Ampère 4.2') e definisce i campi elettrodinamici  $\mathbf{E}_S(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{B}_S(t, \mathbf{r})$  come agenti locali della densità di forza

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{E}_S(t, \mathbf{r}) + \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{B}_S(t, \mathbf{r}) \quad (6.1)$$

La legge di induzione, emersa dagli esperimenti di Faraday intorno alla metà dell'800, è intimamente legata alla legge di forza e ha una straordinaria importanza non solo per le applicazioni, ma anche perché ha guidato Einstein alla scoperta delle leggi della dinamica relativistica.

### 6.1 Forza di Lorentz

Quando il campo EM stimola una particella elementare conviene sostituire la legge di forza continua con la versione discreta introdotta da Lorentz alla fine dell'800. Per ottenerla cominciamo a considerare un modello semplice: ammettiamo che la distribuzione di carica della particella non venga alterata dal campo di stimolo e non ruoti su se stessa. In tal caso la densità di carica si muove con velocità d'assieme  $\mathbf{v}(t)$  e la densità di corrente elettrica vale

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{v}(t)$$

Nell'ipotesi che i campi di stimolo  $\mathbf{E}_S$  e  $\mathbf{B}_S$  siano uniformi nel volume della particella, l'integrale spaziale della densità di forza conduce alla

$$\text{forza di Lorentz} \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = q[\mathbf{E}_S(t, \mathbf{r}) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}_S(t, \mathbf{r})] \quad (6.2)$$

dove  $q$  è la carica ed  $\mathbf{r}$  è la posizione della particella al tempo  $t$ .

E quando la particella ruota su se stessa? La domanda è fuorviante perché induce a pensare a modelli classici inconsistenti. Pertanto la sostituiamo con una domanda più pragmatica: e quando la particella ha un momento magnetico intrinseco  $\mathbf{m}$ ? In tal caso alla forza di Lorentz dobbiamo aggiungere un termine che tenga conto dell'interazione tra  $\mathbf{B}_S$  ed il momento magnetico rigido e scrivere

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = q[\mathbf{E}_S(t, \mathbf{r}) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}_S(t, \mathbf{r})] + \nabla[\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_S(t, \mathbf{r})] \quad (6.2')$$

Ad esempio un neutrone ha carica nulla, ma è dotato di momento magnetico ed interagisce con il campo elettromagnetico come previsto dall'ultimo termine dell'equazione 2'). Nel capitolo 10 vedremo che anche l'equazione 2') è incompleta perché non include la reazione di radiazione che insorge quando la particella carica viene accelerata. Ma vedremo anche che la reazione di radiazione, pur giocando un ruolo molto importante, è quasi sempre piccolissima rispetto alla forza di Lorentz.

## ESERCIZI

1) Un neutrone è sull'asse di un solenoide, in prossimità di un estremo, dove il campo magnetico ha gradiente di  $0.7 T/m$ . Calcolare l'accelerazione del neutrone nei casi che  $\mathbf{m}$  sia parallelo o antiparallelo al campo.

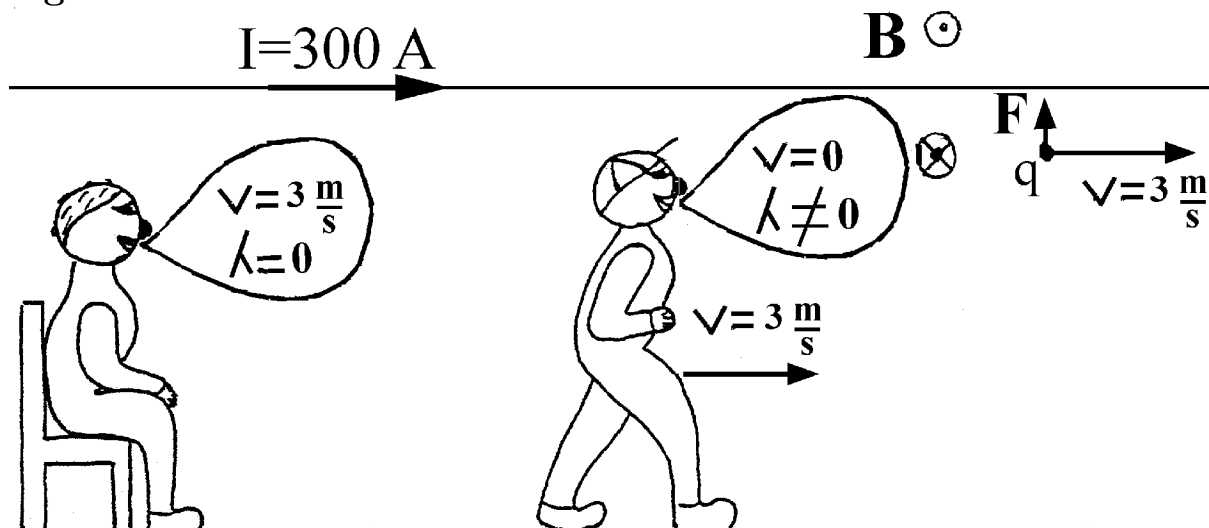
2) Un protone, inizialmente fermo alla quota di  $1 m$ , è soggetto al campo gravitazionale e ad un campo magnetico orizzontale uniforme da  $1 T$ . a) Ammettere che il protone si muova nel vuoto e descriverne la traiettoria. b) Dire quale campo elettrico dobbiamo applicare perché il protone possa giungere al suolo. AIUTO: il protone comincia a cadere, ma viene deflesso dalla verticale dalla forza di Lorentz che, però, non fa lavoro. Il protone raggiunge una quota minima con velocità orizzontale da calcolare, prende a risalire sino a tornare alla quota iniziale, ricomincia a cadere e così via.

## 6.2 Relatività di campo elettrico e densità di carica

Il fatto che la densità di corrente ed il campo magnetico possano essere molto diversi per due osservatori inerziali in moto relativo non può sorprendere: ad esempio per noi una carica ferma genera un campo elettrico stazionario ed un campo magnetico nullo, mentre per l'osservatore inerziale Primo la stessa carica è anche un elemento di corrente e genera un campo magnetico. Può sorprendere invece che il cavo conduttore percorso dalla corrente  $I$ , considerato in figura 1, appaia carico all'osservatore Primo quando è perfettamente neutro per noi. Per convincerci che è davvero così pensiamo che, ad un certo istante, una particella con carica  $q$  abbia velocità  $\mathbf{v}$  parallela al cavo. Qui consideriamo velocità tali che un marciatore possa accompagnare la carica nel suo moto, nel capitolo 15 riprenderemo in esame la situazione per grandi



Fig. 6.1



velocità. Per noi fermi il cavo genera il campo magnetico  $B = \mu_0 I / (2\pi R)$ , circolante come specificato dalla regola della mano destra, e sulla particella agisce la forza

$$F = -qvB = -q \frac{\mu_0 v I}{2\pi R}$$

Il segno meno indica che la forza è diretta verso il cavo (quando  $q$  è positiva). Ora domandiamo: che cosa osserva Primo quando marcia con velocità uguale alla velocità iniziale della particella? Per il principio di relatività di Galileo il marciatore osserva la stessa forza che osserviamo noi, ma non può attribuire tale forza alla presenza del campo magnetico, perché la particella è inizialmente ferma, quindi deve concludere che il cavo genera il campo elettrico

$$E = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi R} \quad (\text{diretto verso il cavo})$$

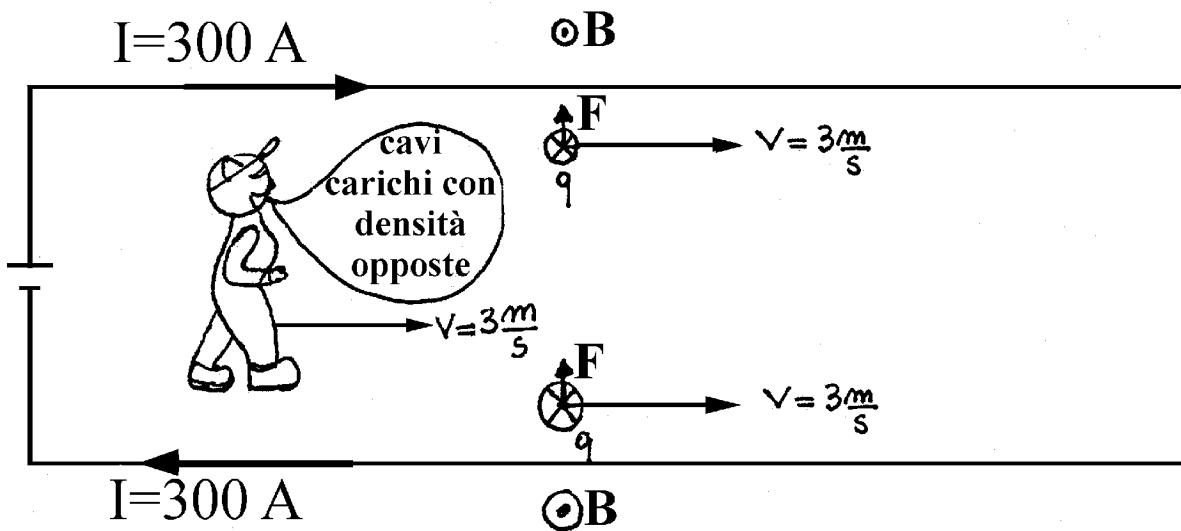
e deve attribuire al cavo una densità lineare di carica  $\lambda$  tale che

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi R} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = -\frac{vI}{c^2}$$

Ad esempio per  $I = 300 \text{ A}$  e  $v = 3 \text{ m/s}$  il marciatore osserva che il cavo è carico con densità lineare  $\lambda = -10^{-14} \text{ C/m}$ . Dunque i campi elettrici e la densità di carica cambiano quando ci mettiamo a camminare, cambiano in modo che le forze rimangano inalterate! E il campo magnetico? E la densità di corrente? Rimangono quasi inalterate perché rimane quasi inalterata la velocità relativa degli elettroni rispetto agli ioni del cavo: quando siamo fermi rispetto agli ioni la corrente è generata dagli elettroni, e quando camminiamo con la velocità media degli elettroni la corrente è generata dagli ioni.

A questo punto è opportuno rimuovere un possibile malinteso: il fatto che il marciatore osservi una densità di carica proporzionale alla velocità quando noi la osserviamo nulla, non significa che la carica dipenda dalla velocità dell'osservatore. Per capire questo punto pensiamo alla situazione

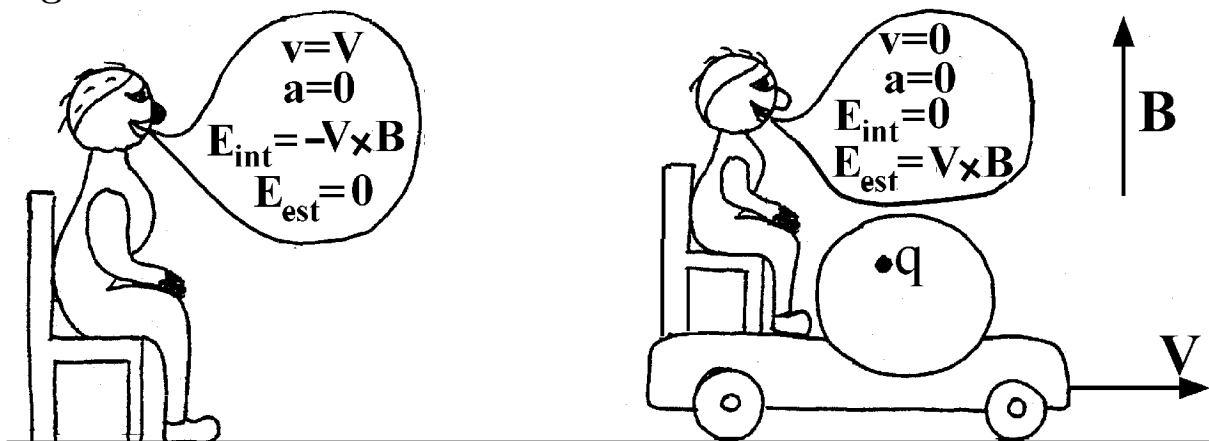
Fig. 6.2



mostrata in figura 2. Il cavo percorso da corrente forma un circuito con andata e ritorno e, per noi fermi, ha ovunque densità di carica nulla. Ora immaginiamo che, oltre alla particella viaggiante con velocità iniziale  $v$  in prossimità del cavo di andata, una particella di ugual carica viaggi con ugual velocità in prossimità del cavo di ritorno. Il marciatore che accompagna le due particelle le osserva inizialmente ferme e soggette alle forze mostrate in figura, quindi deve concludere che il cavo di ritorno ha densità di carica opposta a quella del cavo di andata. Dunque, **la carica totale del sistema è invariante: non dipende dalla velocità dell'osservatore.**

Passiamo a considerare la situazione un po' più complicata illustrata in figura 3. Una vettura che trasporta una sfera di rame cava corre con ve-

Fig. 6.3



locità  $v$  in un regione artica dove il campo magnetico terrestre è verticale. Entro la sfera una carica è perfettamente ferma ed il vetturino afferma: "la carica è in una gabbia di Faraday che non lascia entrare il campo elettrico esterno, inoltre non risente del campo magnetico perché è ferma". Trenta e lode al vetturino! Noi fermi vediamo la carica muoversi di moto uniforme orizzontale in un campo magnetico verticale e concludiamo che in ogni punto

interno alla sfera deve agire il campo elettrico orizzontale  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , tale da rendere nulla la forza totale agente sulla carica. Questo campo elettrico viene prodotto dalla distribuzione di carica risultante da un piccolissimo spostamento degli elettroni rispetto agli ioni della sfera. Ma noi fermi non possiamo attribuire tale spostamento ad un campo elettrico di stimolo, dobbiamo attribuirlo al campo magnetico, cioè al fatto che gli elettroni e gli ioni della carrozza si muovono con la stessa velocità nel campo magnetico e sono soggetti a forze opposte. Qui appare una nuova sorpresa: per noi la sfera in moto non è una gabbia di Faraday, anzi, la sfera stessa, stimolata dal campo magnetico, genera un campo ELETTRICO al suo interno!

Ora torniamo al vetturino ed alle sue osservazioni sulle cose del mondo che gli corre via. Tutte le cariche del mondo che noi vediamo ferme appaiono al vetturino in moto con velocità uniforme orizzontale  $-\mathbf{v}$  entro un campo magnetico verticale. Dunque per il vetturino un campo elettrico orizzontale è presente in tutto il mondo ed è tale che le cariche ferme per noi sono soggette a forza nulla anche per lui. Per il vetturino la sfera è ferma ed agisce come gabbia di Faraday ridistribuendo le proprie cariche in modo da impedire che il campo elettrico del mondo penetri all'interno. L'effetto complessivo è che la carica interna alla sfera è soggetta a forza nulla sia per noi, sia per il vetturino, ma la nostra descrizione del campo elettrico e della densità di carica è notevolmente diversa da quella del vetturino. Evidentemente **il campo elettrico e la densità di carica devono cambiare sostanzialmente quando ci mettiamo a camminare, devono cambiare in modo che la forza di Lorentz rimanga invariata.**

Concludiamo con una nota intesa a sconsigliare prematuri tentativi di dare interpretazioni microscopiche ai fatti emersi. Se volessimo farlo dovremmo tener presente che, per effetto della contrazione relativistica delle lunghezze, le densità dei fluidi di elettroni e di ioni in moto sono diverse da quelle dei fluidi fermi, e dovremmo tener conto che la legge galileiana di composizione delle velocità non è adeguata. Si dirà: quando la velocità è piccola, ad esempio qualche metro al secondo, le lunghezze si contraggono di molto poco, una parte in  $10^{16}$ , ed anche la legge galileiana di composizione delle velocità è accurata a meno di parti in  $10^{16}$ . Nulla da obiettare, ma è altrettanto vero che le densità di particelle di ciascun segno sono enormi, intorno a  $10^{29} m^{-3}$ , cosicché gli effetti relativistici diventano importantissimi anche per velocità bassissime. Ma sia ben chiaro: sono effetti perfettamente descritti dall'elettromagnetismo classico, le novità introdotte dalla teoria della relatività riguardano le leggi della meccanica non quelle dell'elettromagnetismo.

## ESERCIZI

1) Per noi un cavo fermo ha densità di carica  $\rho = 10^{-10} C/m^3$  e densità di corrente  $j = 3 \cdot 10^7 A/m^2$ . Calcolare la densità di carica per osservatori in moto con velocità di  $30 m/s$  nel verso della corrente e in verso opposto.

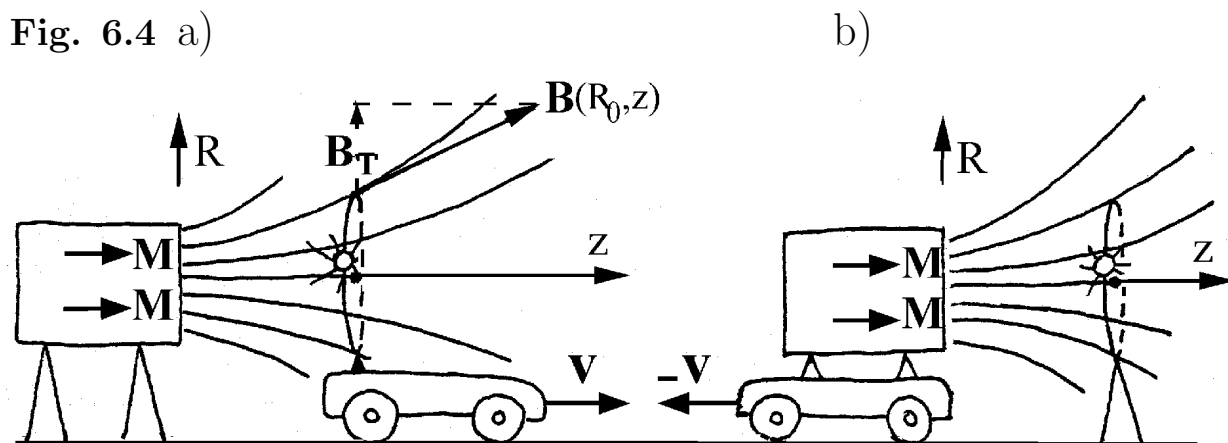
2) Noi vediamo una carrozza di rame correre con velocità di  $30 \text{ m/s}$  in una regione con campo magnetico verticale di  $10^{-3} \text{ T}$  e campo elettrico di stimolo nullo. La sfera abitacolo ha volume di  $10 \text{ m}^3$ . Calcolare: a) il momento di dipolo della sfera, b) il campo ELETTRICO massimo intorno alla sfera. Poi identificarsi con il vetturino e calcolare: c) il campo ELETTRICO entro l'abitacolo, d) il campo ELETTRICO esterno a contatto con la sfera, e) il campo ELETTRICO a grande distanza dalla sfera.

### 6.3 Legge di induzione

Con riferimento alla figura 4a) consideriamo una spira di raggio  $R_0$  disposta ortogonalmente all'asse di una barra magnetica ferma, con centro sull'asse. La spira è in moto con velocità  $v$ , quindi la posizione  $z(t)$  del suo centro evolve con  $dz(t)/dt = v$ . Indicata con  $B_T(R_0, z(t))$  la componente di  $\mathbf{B}$  trasversa alla velocità, la forza di Lorentz agente su una carica  $q$  trasportata dalla spira risulta  $F(t) = qvB_T(R_0, z(t))$  e circola uscendo dal foglio in alto. Quindi la spira in moto è sede del campo elettromotore  $F(t)/q = vB_T(R_0, z(t))$ , e la "circolazione" di tale campo lungo la spira orientata con normale verso destra risulta

$$\mathcal{E}(t) = 2\pi R_0 v B_T(R_0, z(t)) \quad (6.3)$$

Le virgolette in "circolazione" sono usate per ricordare che questa grandezza non è una consueta circolazione in quanto è calcolata lungo la spira in moto.



Ora indichiamo con  $\phi_B(z)$  e  $\phi_B(z + dz)$  i flussi che attraversano la spira quando ha centro in  $z$  ed in  $z + dz$ . Poiché  $\mathbf{B}$  è solenoidale, la differenza di tali flussi deve essere uguale al flusso di  $\mathbf{B}$  uscente dalla superficie laterale del cilindro di raggio  $R_0$  con basi in  $z$  e  $z + dz$ . Tale flusso vale  $2\pi R_0 dz B_T(R_0, z)$ , quindi possiamo scrivere la relazione

$$2\pi R_0 dz B_T(R_0, z) = \phi_B(z) - \phi_B(z + dz) = -dz \frac{d\phi_B(z)}{dz}$$

Dividendo per  $dt$  ambo i membri, il primo membro si riduce alla “circolazione”  $\mathcal{E}(t)$ , data dall’equazione 3), ed il membro di destra diventa

$$-\frac{dz}{dt} \frac{d\phi_B(z)}{dz} = -\frac{d\phi_B(z(t))}{dt} = -\frac{d\phi_B(t)}{dt}$$

Insomma la “circolazione” del campo elettromotore lungo la spira in moto è data dalla

$$\text{regola del flusso} \quad \mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} \quad (6.4)$$

In parole: **la “circolazione” del campo elettromotore lungo la spira in moto è uguale all’opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con la spira.** Ora pensiamo che la spira sia chiusa su una lampadina di resistenza  $R$  e, per semplicità, trascuriamo la resistenza della spira. In tal caso il campo elettromotore provoca la corrente  $I(t) = \mathcal{E}(t)/R$ , e la potenza dissipata nella lampadina risulta  $\mathcal{E}^2(t)/R$ .

Passiamo a descrivere la stessa situazione ponendoci in un sistema di riferimento fermo rispetto alla spira. Come mostrato in figura 4b) vediamo il magnete in moto con velocità  $-\mathbf{v}$  e, naturalmente, vediamo che la lampadina si accende pur essendo ferma. Ciò significa che anche la consueta circolazione del consueto campo ELETTRICO lungo la spira ferma deve essere data dall’equazione 4). Se così non fosse il principio di relatività di Galileo sarebbe violato. Quindi per una qualunque curva  $\gamma$  ferma e chiusa e per qualunque superficie  $S$  ferma che la orli possiamo scrivere

$$\mathcal{E}(t) = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) d\mathcal{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) d\mathcal{S} = -\int_S \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} d\mathcal{S}$$

Ciò comporta che i campi ELETTRICO e MAGNETICO sono legati dalla

$$\text{III equazione di Maxwell} \quad \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (6.5)$$

nota come **legge di Faraday-Neumann-Lenz** e come **legge di induzione**. In parole: **in qualunque punto ed a qualunque istante il rotore di  $\mathbf{E}$  è uguale all’opposto della derivata temporale di  $\mathbf{B}$ .**

Il ragionamento che abbiamo fatto per introdurre la legge di induzione è relativistico: abbiamo imposto che il principio di relatività di Galileo valga anche per le leggi dell’elettromagnetismo e, in un caso molto semplice, abbiamo visto che la legge di induzione deve essere aggiunta alle leggi che già conosceamo. In realtà la storia dell’elettromagnetismo ha seguito il percorso inverso: le leggi dell’elettromagnetismo erano già emerse dai fatti sperimentali verso la metà dell’800, ma allora non era certo che valessero in qualunque sistema di riferimento inerziale. Torneremo su questo punto nel capitolo 15, per ora accettiamo la legge di induzione come una nuova legge fondamentale della natura, suggerita dagli esperimenti dei pionieri e mai smentita da allora, e procediamo nello studio dei fenomeni armati delle quattro equazioni di Maxwell e della legge di forza.

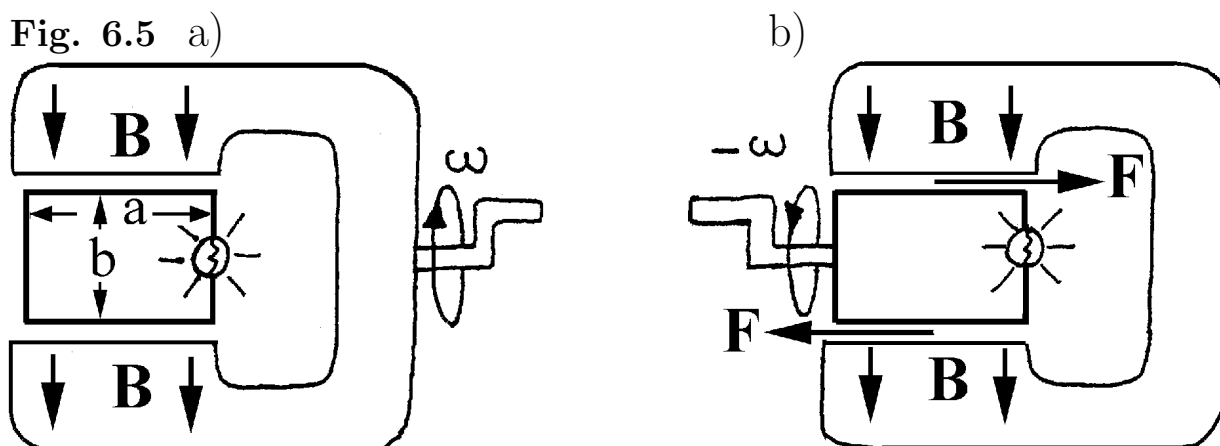
Concludiamo il paragrafo osservando che la legge di induzione è una relazione locale tra i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Dice che, assegnato  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  ed assegnato il campo  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$  presente al tempo zero, il campo magnetico ad istanti precedenti o seguenti è completamente individuato da

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}(0, \mathbf{r}) - \int_0^t \nabla \times \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt'$$

Dunque, in linea di principio, se conoscessimo il campo  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$  all'istante della nascita di Omero, tutta l'informazione sul campo elettromagnetico ad istanti successivi o precedenti sarebbe contenuta nel campo  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ . Notiamo anche che, acquisita la legge di induzione e detto che i monopoli magnetici non esistevano ai tempi di Omero, non è necessario aggiungere che  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , è già detto implicitamente: basta prendere la divergenza di ambo i membri della legge di induzione per convincersene.

## 6.4 Ruoli delle leggi di forza e di induzione

Abbiamo appena visto che uno stesso fenomeno, l'accensione della lampadina, deve essere giustificato usando la legge di forza oppure la legge di induzione a seconda che i circuiti siano in moto oppure fermi. Ad ulteriore illustrazione di questo fatto consideriamo alcune situazioni tipiche, cominciando da quella schematizzata in figura 5a). Il contorno del rettangolo di area  $a \times b$  è un percorso di Stokes, fermo come devono essere i percorsi di Stokes, ed è orientato con verso positivo di circolazione antiorario, ovvero con normale uscente dal foglio. Il magnete ruota con frequenza  $\omega$  entrando nel foglio in alto al tempo zero, quindi il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso il rettangolo



vale  $\phi_B(t) = abB \sin(\omega t)$ , e la circolazione del campo ELETTRICO lungo l'orlo del rettangolo risulta

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -abB\omega \cos(\omega t)$$

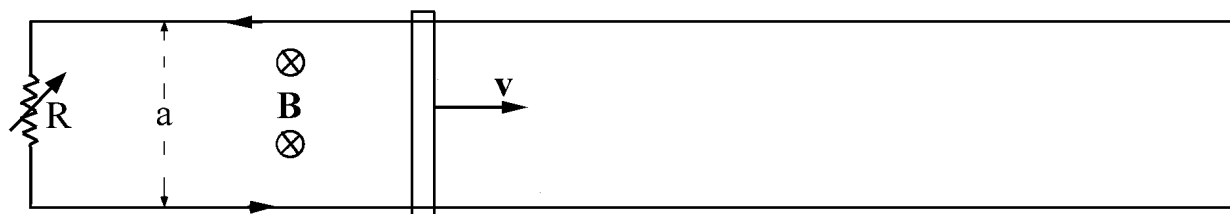
Ora pensiamo di essere solidali con il magnete, come mostrato in figura 5b). In tal caso vediamo il circuito con la lampadina ruotare con velocità

angolare  $-\omega$  in un campo magnetico stazionario, uscendo dal foglio in alto. Pertanto le cariche positive trasportate dal circuito sono soggette alle forze mostrate in figura: nei due lati paralleli all'asse di rotazione le forze agenti sono orientate nel verso negativo di circolazione e hanno intensità

$$F = q\omega \frac{b}{2} B \cos(\omega t)$$

Negli altri due lati le forze sono ortogonali ai lati, quindi la “circolazione” del campo elettromotore  $\mathbf{F}/q$  lungo l'orlo del rettangolo mobile vale  $-2aF/q$  e risulta uguale alla circolazione che avevamo calcolato per il campo  $\mathbf{E}$  quando vedevamo ruotare il magnete. Anche in questo caso abbiamo usato le virgolette ad intendere che la “circolazione” è impropria, in quanto è calcolata lungo una curva in moto. Comunque la lampadina assorbe la stessa potenza istantanea nei due casi, diciamo che si accende con la stessa luminosità. Nel primo caso si accende perché la forza elettromotrice prevista dalla legge di induzione provoca una corrente, nel secondo perché le cariche trasportate dal circuito in moto sono soggette a forze di Lorentz che provocano la corrente. Insomma, possiamo scegliere liberamente di calcolare la circolazione del rapporto  $\mathbf{F}/q$  ponendoci in un sistema di riferimento o nell'altro. In uno parliamo di campi ELETTRICI e di circolazione, nell'altro di campi elettromotori e di “circolazione”: cambia il linguaggio, ma non il risultato.

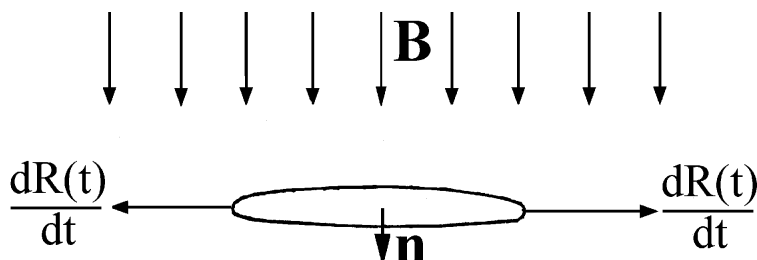
**Fig. 6.6**



Però si presentano spesso situazioni nelle quali il circuito di interesse ha elementi in moto relativo, un primo esempio è mostrato in figura 6. Una barretta conduttrice scorre su rotaie conduttrici parallele distanti  $a$  l'una dall'altra, isolate dal terreno e messe in contatto ad un estremo da una resistenza. Un campo magnetico uniforme e costante entra normalmente al foglio. Domandiamo: quanto vale la “circolazione” del campo elettromotore lungo il circuito orientato con faccia positiva davanti? Non possiamo avere dubbi: quando ci consideriamo fermi rispetto alle rotaie, le forze di Lorentz agenti sulle cariche delle rotaie e della resistenza sono nulle, mentre quella agente sulle cariche della barretta in moto vale  $qvB$  ed è orientata in verso positivo, quindi la “circolazione” del campo elettromotore vale  $\mathcal{E} = vBa$ . Lo stesso risultato si ottiene con la regola del flusso, infatti  $\mathbf{B}$  entra nel foglio, il flusso attraverso il circuito vale  $-Bas(t)$ , dove  $s(t)$  è la distanza tra la barretta e la resistenza, quindi  $\mathcal{E} = -d\phi_B(t)/dt = vBa$ . Alla stessa

conclusione giungiamo anche quando siamo a cavallo della barretta: la forza agente sulle cariche delle rotaie è perpendicolare alle rotaie e la forza di Lorentz agente entro la resistenza, prima fissa ed ora in moto, fornisce il contributo  $vBa$  alla “circolazione”. Dunque la regola del flusso vale anche per un circuito che cambia forma nel tempo.

Fig. 6.7

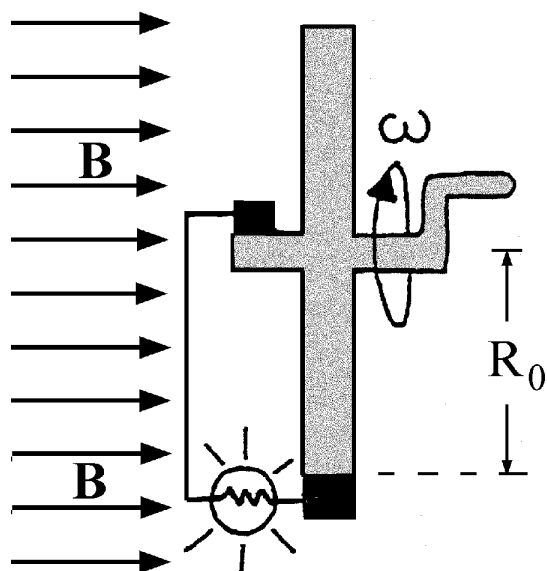


Un altro esempio di circuito che va deformandosi è l’anello elastico mostrato in figura 7. Il suo raggio aumenta con velocità  $dR(t)/dt$  in un campo magnetico uniforme ortogonale all’anello. Con  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{n}$  disposti nei versi mostrati in figura, la forza di Lorentz agente sulle cariche positive dell’anello esce dal foglio a sinistra, quindi circola in verso negativo, e la “circolazione” del campo elettromotore risulta in pieno accordo con la regola del flusso, infatti

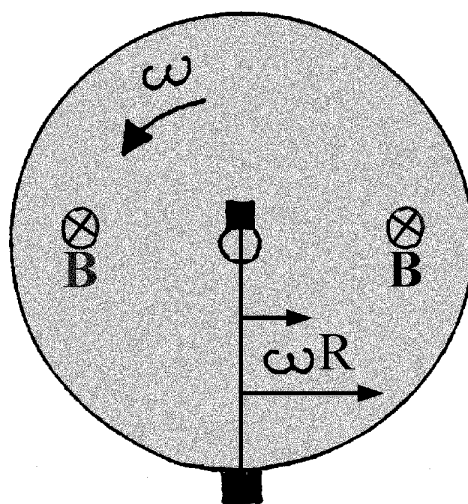
$$\mathcal{E}(t) = -2\pi R(t) \frac{dR(t)}{dt} B = -\frac{d}{dt} [\pi R^2(t) B] = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

Come ultimo esempio consideriamo una ruota metallica di raggio  $R_0$ , rotante intorno al suo asse con velocità angolare  $\omega$ , entro un campo ma-

Fig. 6.8 a)



b)



gnetico uniforme parallelo all’asse. La situazione è mostrata di lato in figura 8a) e di fronte in figura 8b). Il circuito è costituito dalla parte di ruota compresa tra i due contatti striscianti, da questi, dal cavo di collegamento e da una lampadina. Domandiamo: quanto vale la circolazione del campo ELETTRICO lungo il circuito orientato con normale uscente dal foglio



in figura 8a)? Il circuito giace in un piano parallelo a  $\mathbf{B}$ , quindi è sempre attraversato da flusso nullo. Se usassimo ciecamente la regola del flusso, dovremmo rispondere che la circolazione è nulla, ma non è così. La lampadina si accende perché le cariche positive trasportate dalla ruota sono soggette al campo elettromotore  $\omega RB$  diretto verso il centro, e la “circolazione” di tale campo vale  $\int_0^{R_0} \omega RB dR = \omega R_0^2 B/2$ . Questo esempio mostra che la regola del flusso va usata con cautela. In casi dubbi, per evitare errori, conviene usare la legge di induzione per i circuiti fermi e la legge di forza per i circuiti in moto.

## 6.5 Forze magnetodinamiche

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come sia possibile produrre forze elettromotrici facendo muovere un circuito, o una sua parte, in un campo magnetostatico, oppure facendo variare nel tempo il flusso del campo magnetico concatenato con un circuito fermo. Ma non abbiamo dedicato la dovuta attenzione ad un fatto importante: quando la forza elettromotrice  $\mathcal{E}(t)$  viene indotta in un circuito di resistenza  $R$  il circuito diventa sede della corrente  $I(t) = \mathcal{E}(t)/R$  ed ogni suo elemento  $ds$  è soggetto alla **forza magnetodinamica**  $d\mathbf{F}(t) = I(t)ds \times \mathbf{B}(t)$  esercitata dallo stesso campo magnetico che induce la forza elettromotrice e la conseguente corrente. In questo paragrafo riesaminiamo le situazioni considerate nei paragrafi precedenti e mostriamo che **le forze magnetodinamiche forniscono una potenza frenante uguale alla potenza dissipata**.

Fig. 6.9

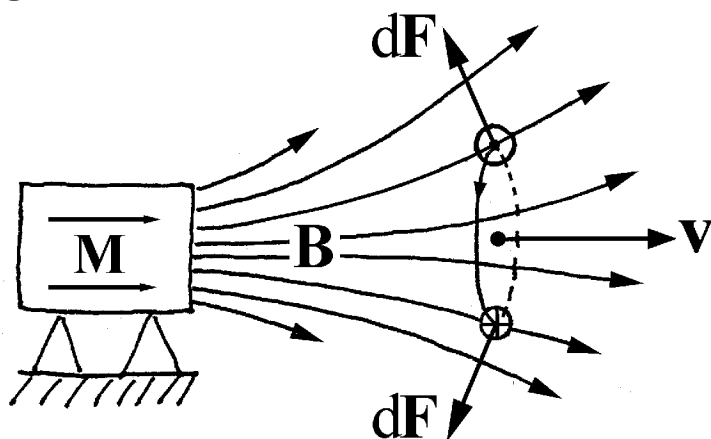
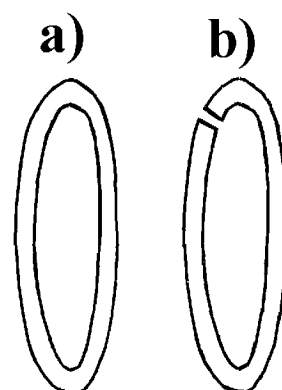


Fig. 6.10



Cominciamo dal caso considerato in figura 4a) che ripresentiamo in figura 9. La spira, orientata con normale verso destra, si allontana dal magnete, quindi il flusso concatenato diminuisce nel tempo, la forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}(t)$  è positiva e genera la corrente  $I(t) = \mathcal{E}(t)/R$  uscente dal foglio in alto. La forza di Lorentz agente sull'elemento  $ds$  di spira ha proiezione sull'asse pari a  $-I(t)dsB_T(R_0, z(t))$ . Integrando sulla spira e ricordando

l'equazione 3) si vede che la risultante delle forze agenti sulla spira vale

$$F(t) = -I(t)2\pi R_0 B_T(R_0, z(t)) = -I(t)\mathcal{E}(t)/v \quad (6.6)$$

Il segno meno precisa che la forza tende a frenare la spira. Si noti che la forza è frenante anche quando la spira si avvicina al magnete: cambiando il verso della velocità cambiano verso anche la corrente e la forza risultante. Dall'equazione 6) si vede che la potenza frenante vale

$$W(t) = -vF(t) = I(t)\mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}^2(t)}{R} \quad (6.7)$$

ed è proprio uguale alla potenza dissipata entro la spira per effetto Joule. Naturalmente sul magnete fermo agisce una forza opposta a quella che agisce sulla spira, forza che viene equilibrata dalla reazione vincolare. Invece quando il magnete è in moto e la spira è vincolata al suolo, come nel caso descritto in figura 4b), è il magnete ad essere frenato con potenza frenante uguale a quella dissipata nella spira.

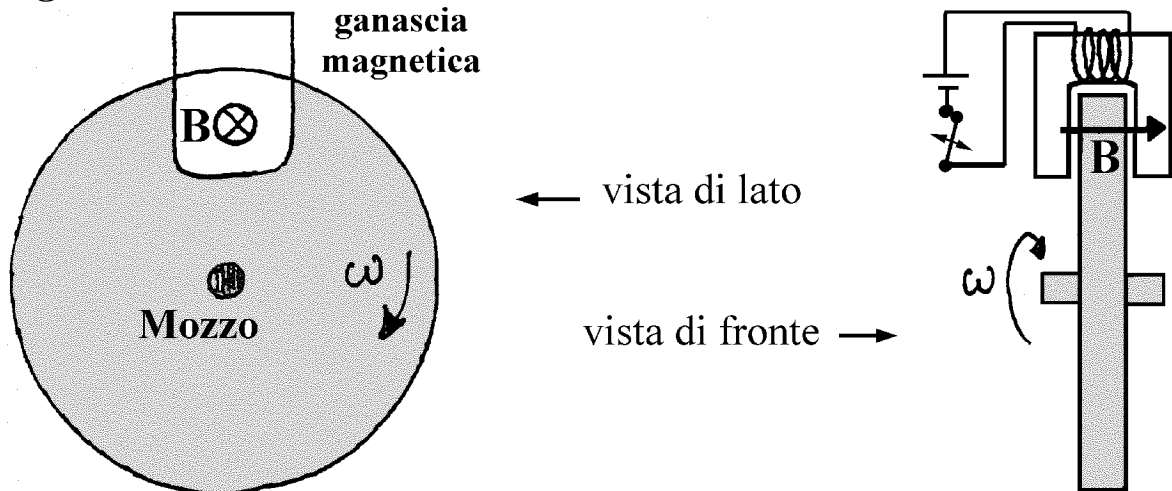
Infine sottolineiamo che **la forza elettromotrice non dipende dalla natura del circuito, esiste anche in una spira immateriale**, ma la forza frenante è inversamente proporzionale alla resistenza del circuito, quindi dipende dai materiali distribuiti lungo il circuito. Ad esempio l'anello metallico completo e l'anello metallico con un sottile taglietto mostrati in figura 10a) e b) sono soggetti a forze magnetodinamiche ben diverse.

Ora domandiamo: che cosa avviene quando la spira viene sostituita da un disco metallico? Le forze elettromotrici continuano ad essere date dalla regola del flusso, ma le correnti indotte incontrano piccola resistenza e la potenza dissipata risulta molto maggiore di quella dissipata nella spira. Basta pensare che il disco sia composto da spire concentriche per convincersene.

In generale, le correnti indotte in un corpo metallico in moto entro un campo magnetico stazionario e le correnti indotte in un corpo metallico fermo posto in un campo magnetico dipendente dal tempo prendono il nome di **correnti parassite** o di **correnti di Foucault**.

L'azione frenante del campo magnetico sulle correnti di Foucault viene sfruttata nel freno magnetico dissipativo schematizzato in figura 11. Una ruota metallica viene frenata **“accendendo”** un campo magnetico in prossimità di un bordo. Le correnti indotte nella regione di ruota che attraversa il campo magnetico dissipano l'energia cinetica iniziale e scaldano la ruota. Questi freni, come quelli convenzionali che sfruttano l'attrito, non sono convenienti dal punto di vista termodinamico perché sottraggono energia meccanica, utilizzabile con rendimento quasi unitario, per produrre energia di agitazione termica che va perduta. Nel prossimo paragrafo vedremo che una ruota può essere frenata convertendo l'energia meccanica in energia elettrica con ottimo rendimento. Per ora concludiamo dicendo che le correnti

Fig. 6.11



parassite vengono utilizzate nei **forni ad induzione** per scaldare e fondere i materiali metallici senza esporli ai prodotti di combustione presenti nei forni convenzionali.

Passiamo allo studio delle altre situazioni considerate nei paragrafi precedenti, iniziando dal caso della barretta mobile su rotaie descritta in figura 6. Ora pensiamo che la resistenza  $R$  possa essere variata da un valore grandissimo ad un valore quasi nullo, ad esempio premendo un pedale. Nella situazione descritta in figura il flusso concatenato con il circuito vale  $-as(t)B$ , quindi la forza elettromotrice  $\mathcal{E} = avB$  è positiva e la corrente  $I = \mathcal{E}/R$  circola in verso antiorario. Pertanto la barretta è soggetta alla forza frenante  $F = -aBI$  che fornisce una potenza frenante  $-Fv = avBI = \mathcal{E}^2/R$  uguale alla potenza dissipata nel circuito per effetto Joule. Agendo a fondo sul pedale minimizziamo la resistenza ed esercitiamo una grande potenza frenante, sollevando il piede rendiamo quasi nulla la potenza frenante, ma la forza elettromotrice rimane inalterata finché la barretta non decelera.

Nel caso dell'anello in espansione, considerato in figura 7, il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso l'anello aumenta con il procedere dell'espansione, quindi la corrente  $I(t)$  circola uscendo dal foglio a sinistra e l'elemento  $ds$  d'anello è soggetto alla forza  $d\mathbf{F}(t) = I(t)ds \times \mathbf{B}$  diretta verso il centro, tale da opporsi all'espansione. La potenza che frena l'elemento  $ds$  risulta  $(dR(t)/dt)I(t)dsB$ , e la potenza che frena l'intero anello vale

$$W(t) = 2\pi R(t) \frac{dR(t)}{dt} I(t)B = I(t)\mathcal{E}(t)$$

Ancora una volta la potenza frenante è uguale alla potenza dissipata nell'anello, e ciò vale anche se la resistenza varia al procedere dell'espansione.

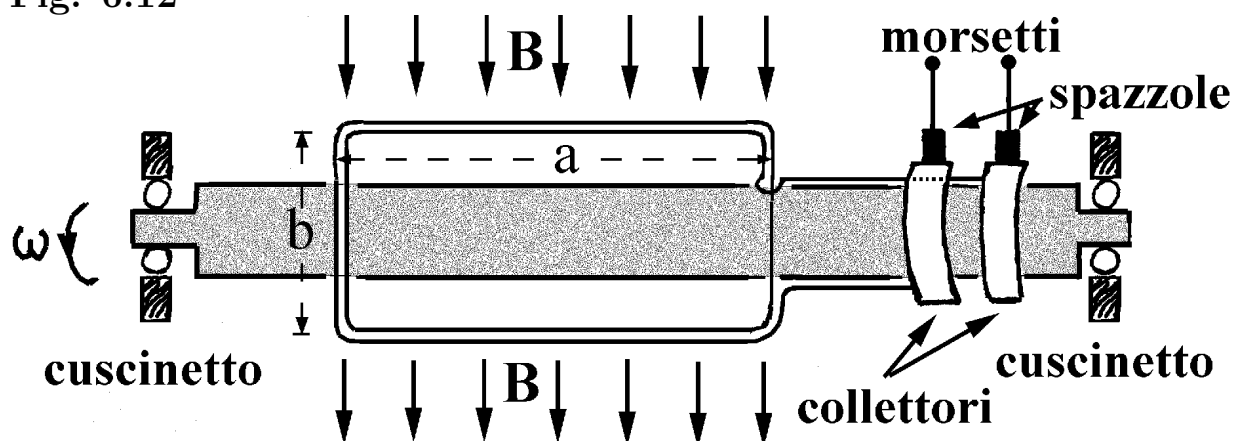
Infine nel caso considerato in figura 8 la corrente circola in verso antiorario nella vista a), quindi sulla parte di ruota compresa tra  $R$  ed  $R + dR$  agisce la forza frenante  $dF = IdRB$  che fornisce il momento frenante  $dC = IRdRB$ . Integrando da  $R = 0$  a  $R = R_0$  otteniamo  $C = IBR_0^2/2$ . Ricordando

che  $\omega BR_0^2/2 = \mathcal{E}$  è la forza elettromotrice, si vede che la potenza frenante  $W = \omega C$  è uguale a  $I\mathcal{E}$  anche in questo caso.

## 6.6 Alternatore monofase

In figura 12 riprendiamo in esame la situazione considerata in figura 5b), che merita un'attenzione particolare perché consente di illustrare il principio di funzionamento dei generatori di forza elettromotrice alternata. La bobina

Fig. 6.12

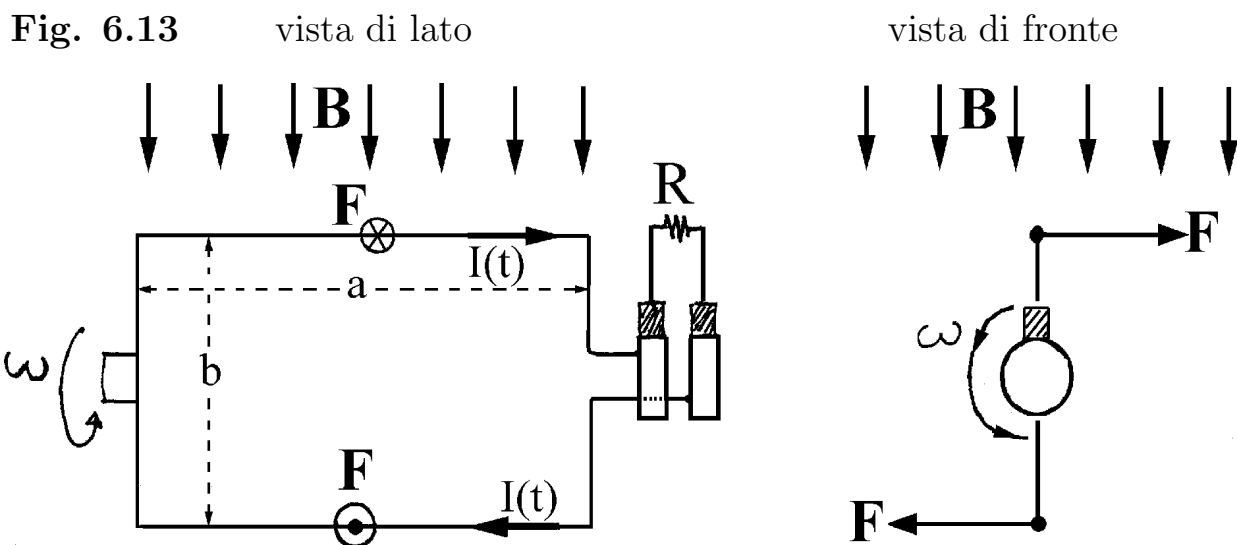


rettangolare di lati  $a$  e  $b$  è costituita da  $N$  spire di filo di rame e viene fatta ruotare entro un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme. La bobina è rigidamente collegata ad un supporto isolante (ombreggiato) montato su cuscinetti ed i suoi estremi sono collegati a due anelli metallici centrati sull'asse di rotazione, vincolati meccanicamente al supporto rotante. Sui due anelli, detti **collettori**, strisciano due **spazzole** di grafite fisse, spinte da molle ad assicurare un buon contatto elettrico e collegate con cavi di rame a due **morsetti** fissi. Pensiamo che al **rotore** sia applicata una coppia di momento tale da tenerlo in rotazione con frequenza ciclica  $\nu = 50 \text{ Hz}$ , ovvero con  $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$ , e poniamo la domanda: quale forza elettromotrice viene prodotta? Scegliendo il tempo zero quando il versore normale alle spire è nel verso di  $\mathbf{B}$ , il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una spira della bobina vale  $abB \cos(\omega t)$ , il flusso concatenato con la bobina è  $N$  volte maggiore, quindi la forza elettromotrice risulta

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}NabB \cos(\omega t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) \quad \text{dove} \quad \mathcal{E}_0 = NabB\omega \quad (6.8)$$

Ad esempio quando una bobina con 100 spire di area  $100 \text{ cm}^2$  ruota a  $50 \text{ Hz}$  in un campo magneostatico da  $1 \text{ T}$ , la forza elettromotrice di picco vale  $\mathcal{E}_0 = 314 \text{ V}$ . Sottolineiamo che l'equazione 8) vale indipendentemente dal carico: che i morsetti siano aperti o chiusi su una stufa elettrica, o su un motore elettrico, o su un condensatore o su un solenoide, non fa differenza: la forza elettromotrice vale  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ . Ma la corrente erogata  $I(t)$  dipende dal carico, quindi ne dipende anche la potenza prodotta dall'alternatore:

$$W(t) = \mathcal{E}(t)I(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)I(t)$$



Ora, con riferimento alle due viste in figura 13, notiamo che i lati di una spira paralleli all'asse di rotazione sono frenati da forze di intensità  $aI(t)B$ , che formano una coppia di braccio  $b \sin(\omega t)$ . Quindi il momento delle forze che frenano una spira vale  $abB \sin(\omega t)I(t)$  e quello delle forze che frenano la bobina di  $N$  spire risulta

$$C(t) = NabB \sin(\omega t)I(t) = W(t)/\omega$$

Come dovevamo aspettarci, la potenza meccanica  $\omega C(t)$  necessaria a far ruotare il rotore con frequenza  $\omega$  è uguale alla potenza elettrica prodotta, quindi dipende dal carico. Quando il carico è costituito da circuiti lineari, la forza elettromotrice  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$  fa insorgere la corrente  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ , con  $I_0$  e  $\phi$  dipendenti dal carico come preciseremo più avanti. Di conseguenza la potenza elettrica  $W(t) = \mathcal{E}(t)I(t)$  risulta

$$W(t) = \mathcal{E}_0 I_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) = \mathcal{E}_0 I_0 [\sin^2(\omega t) \cos \phi + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \phi]$$

e ha valor medio temporale

$$W = (\mathcal{E}_0 I_0 / 2) \cos \phi \tag{6.9}$$

Il fattore  $\cos \phi$  prende il nome di **fattore di potenza** e gioca un ruolo importante. Ad esempio quando i morsetti sono chiusi su un condensatore la corrente di picco  $I_0$  può essere molto grande, ma  $\phi$  è quasi uguale a  $\pi/2$ , quindi la potenza è quasi nulla.

In elettrotecnica si usa definire i valori efficaci delle forze elettromotrici, delle tensioni e delle correnti ponendoli uguali ai valori di picco divisi per  $\sqrt{2}$ . Con tale convenzione il valor medio temporale della potenza elettrica prodotta risulta

$$W = \mathcal{E}_{eff} I_{eff} \cos \phi \tag{6.9'}$$

Aggiungiamo che spesso si riportano i valori efficaci della tensione e della corrente omettendo di dirlo esplicitamente. Ad esempio, si dice che la forza

elettromotrice è di  $220\text{ V}$  quando il suo valore di picco è di  $311\text{ V}$ . Analogamente si dice che una corrente alternata ha intensità  $100\text{ A}$  quando l'intensità di picco è di  $141\text{ A}$ . Ma insistiamo: per calcolare la potenza non è sufficiente conoscere i valori efficaci di corrente e forza elettromotrice, è necessario conoscere anche il fattore di potenza  $\cos\phi$ .

Infine diciamo che gli alternatori che generano la potenza distribuita dalla rete elettrica sono **trifase**: il loro rotore porta tre bobine, disposte a  $120^\circ$  l'una dall'altra, e quattro anelli collettori. Ad uno di questi sono collegati gli estremi di ingresso delle tre bobine, a ciascuno degli altri è collegato l'estremo di uscita di una delle tre bobine. Il collettore comune alla tre bobine viene indicato con la lettera N, per intendere Neutro, gli altri tre sono indicati convenzionalmente con le lettere R, S e T. Naturalmente l'alternatore trifase ha morsetti fissi N, R, S e T collegati a spazzole striscianti sui rispettivi collettori. Rispetto al monofase, l'alternatore trifase sfrutta meglio lo spazio disponibile intorno all'asse di rotazione, richiede potenze meccaniche quasi costanti nel periodo di rotazione e produce tre forze elettromotrici, sfasate di  $120^\circ$  l'una dall'altra, che hanno una vasta gamma di applicazioni industriali. Nelle abitazioni vengono portati il cavo neutro ed uno dei tre cavi R, S e T, oltre al cavo di massa collegato ad un elettrodo immerso nel suolo.

## ESERCIZI

1) Un piccolo alternatore con campo magnetico da  $0.5\text{ T}$  e bobina composta da 10 spire di area  $10\text{ cm}^2$ , fatte con filo di rame di sezione  $1\text{ mm}^2$ , ruota a  $400\text{ Hz}$  ed è chiuso su una resistenza da  $10\ \Omega$ . Calcolare: a) il valore efficace della forza elettromotrice, b) la resistenza della bobina trascurando la resistenza di contatto delle spazzole, c) la corrente efficace, d) la potenza elettrica erogata e quella utilizzata sul carico, e) il momento delle forze che deve essere applicato al rotore, g) la potenza meccanica richiesta.

2) Un anello di rame di diametro  $10\text{ cm}$  e sezione di  $1\text{ mm}^2$  ruota intorno ad un diametro orizzontale con velocità angolare  $\omega = 10^3\text{ s}^{-1}$  in una regione dove agisce un campo magnetico verticale da  $0.5\text{ T}$ . Calcolare: a) la circolazione del campo ELETTRICO nell'anello, b) la corrente, c) la potenza dissipata

3) Una struttura magnetica produce il campo  $(0, 0, B \sin(kx))$  con  $B = 1\text{ T}$ ,  $k = 1\text{ m}^{-1}$ . Una spira quadrata di lato  $10\text{ cm}$  e resistenza di  $10\ \Omega$  giace nel piano  $(x, y)$  e si muove con velocità uniforme di  $10\text{ m/s}$  lungo l'asse  $x$ . Ammettere che il centro della spira passi dall'origine al tempo zero e calcolare: a) la corrente  $I(t)$  nella spira, b) la forza applicata alla spira, c) la potenza dissipata.

4) Nel circuito in figura 6, la resistenza vale  $2\ \Omega$ , il campo magnetico vale  $0.5\text{ T}$ , le rotaie distano  $40\text{ cm}$  e la barretta si muove con velocità  $v \sin(\omega t)$ , dove  $v = 30\text{ m/s}$  ed  $\omega = 314\text{ s}^{-1}$ . Calcolare: a) la tensione ai capi della resistenza, b) la potenza assorbita, c) la forza applicata alla barretta.

5) Ora pensiamo che le rotaie in figura 6 siano inclinate di  $30^\circ$  sul piano orizzontale e, per semplicità, continuiamo a pensare che  $\mathbf{B}$  sia normale al piano delle rotaie. Un barretta ha massa di  $2 \text{ kg}$ , inizialmente ferma in alto, può scorrere senza attrito sulle rotaie. In funzione del tempo calcolare: a) l'accelerazione della barretta, b) la potenza dissipata nella resistenza.

6) Un campo magnetico è quasi uniforme con intensità  $B = 1 \text{ T}$  in una regione di diametro  $10 \text{ cm}$ . Fuori di tale regione  $B$  decade in modo imprecisato. Una spira di area  $S = 50 \text{ cm}^2$  e resistenza  $R = 0.1 \Omega$ , inizialmente normale al campo nella regione centrale, viene estratta e portata in una regione di campo nullo. Mostrare che la carica che fluisce nella spira durante il processo di estrazione vale  $BS/R$  (legge di Felici).

## 6.7 Approcci macroscopico e microscopico

A questo punto riassumiamo le leggi dell'elettromagnetismo nel quadro

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[ \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

La seconda e la terza equazione sono **omogenee**, ovvero non contengono le densità di carica e correnti, la prima e la quarta equazione sono **inomogenee**. Ricordiamo che non è necessario aggiungere la legge di conservazione della carica: è implicita nelle due equazioni inomogenee. Nella forma appena scritta, le equazioni prendono il nome da Maxwell e da Lorentz che, per primo, ha esteso la loro validità all'ambito microscopico. Di solito si intende che la densità di carica nella prima equazione di Maxwell-Lorentz descriva anche i dettagli atomici e built-in e si intende sempre che la densità di corrente nella quarta equazione includa ogni tipo di corrente. Ricordiamo anche che la materia contenuta nel volumetto  $dV$  riceve nel tempo  $dt$  l'impulso  $\mathbf{f}dVdt$  dove  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}_S + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_S$  è la densità di forza che stimola il volumetto.

Abbiamo visto che in molte situazioni concrete conviene introdurre i campi

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}]$$

Con ciò non abbiamo introdotto approssimazioni, abbiamo solo convenuto di considerare a parte i campi built-in e le relative distribuzione di carica ed abbiamo introdotto i campi  $\mathbf{j}_f$ ,  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{M}$ , lasciandoli liberi di descrivere qualunque situazione. Con tali convenzioni le leggi dell'elettromagnetismo diventano le equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

L'interpretazione di queste equazioni non è rimasta invariata dai tempi di Maxwell, ma le equazioni sono rimaste invariate, resistendo imperterrite alle

rivoluzioni relativistica e quantistica, o meglio, provocandole. I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$ , insieme, descrivono lo stato elettrico della materia, i campi  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$ , insieme, descrivono lo stato magnetico, la densità di corrente  $\mathbf{j}_f$  descrive le correnti di conduzione, dette **correnti impresse** in linguaggio elettrotecnico.

Quando la legge di induzione venne scoperta, risultò chiaro che la legge di Coulomb non è adeguata a descrivere l'interazione tra cariche in moto. Weber e gli scienziati della sua scuola avevano modificato la legge di interazione a distanza di Coulomb, aggiungendo termini dipendenti dalle velocità delle cariche, ed avevano costruito una teoria consistente con i fatti sperimentali e con l'idea che le forze si esercitino a distanza, non per contatto diretto tra il campo elettromagnetico e le cariche. Ma l'approccio era poco utile nelle applicazioni perché le forze microscopiche non volevano saperne di produrre gli effetti previsti dalle leggi della meccanica newtoniana. L'approccio di Maxwell e dei suoi seguaci è più pragmatico: Maxwell riconosce di non poter giustificare le relazioni costitutive interne a partire dalla legge di forza e si limita ad aggiungerle alle leggi generali. È l'approccio che oggi diciamo macroscopico, sia perché i campi e le densità di carica built-in sono stralciati dalle equazioni, sia perché le relazioni costitutive interne sono aggiunte senza preoccuparsi di darne una giustificazione microscopica a partire dalla legge di forza. Ma non è corretto dire che le equazioni di Maxwell sono macroscopiche. In realtà sono altrettanto generali delle equazioni di Maxwell-Lorentz. Ad esempio per un sistema di particelle nel vuoto possiamo usare le relazioni costitutive del vuoto  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  ed indicare con  $\rho_f$  e  $\mathbf{j}_f$  le densità di carica e correnti associate alle particelle.

Da Maxwell ai nostri giorni abbiamo accumulato una quantità di informazione estesissima sul comportamento elettromagnetico dei materiali e si è visto che, anche prescindendo dai materiali ferromagnetici, le relazioni costitutive interne lineari omogenee ed isotrope

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{j}_f = g \mathbf{E}$$

non sono sempre adeguate. Esistono materiali con comportamento più complicato e hanno applicazioni molto interessanti, ad esempio alcuni materiali fortemente anisotropi possono servire a polarizzare la luce ed alcuni materiali non lineari possono tramutare la radiazione infrarossa in luce rossa o blu. Diciamo anche che un materiale isotropo può diventare anisotropo quando viene immerso in un campo magnetico stazionario, come avviene nella sonda Hall, oppure quando è sollecitato termicamente o meccanicamente. Ma moltissimi sistemi fisici possono essere descritti come insiemi di materiali Lineari, Omogenei ed Isotropi (LOI) separati da interfacce bidimensionali. Ciò consente di interpretare in un unico quadro un gran numero di fenomeni interessanti, come vedremo via via.



# Capitolo 7

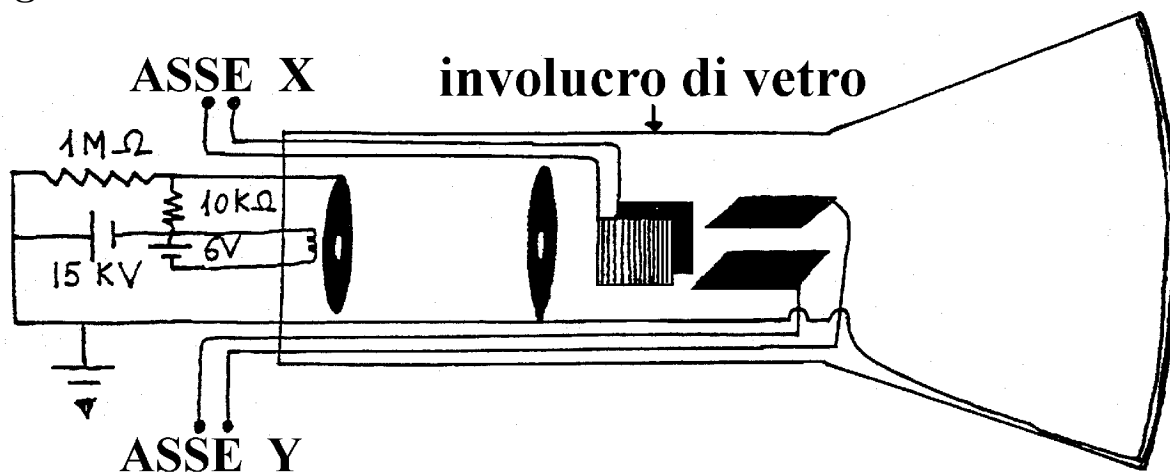
## Energia elettromagnetica

Ora abbiamo a disposizione il quadro completo delle leggi elettromagnetiche e possiamo studiare gli scambi di energia tra parti diverse di un sistema fisico. In questo e nel prossimo capitolo consideriamo circuiti privi di parti macroscopiche in moto e non consideriamo i ritardi dei campi elettromagnetici rispetto alle correnti che li producono, riservandoci di giustificare tale approssimazione nel capitolo 9.

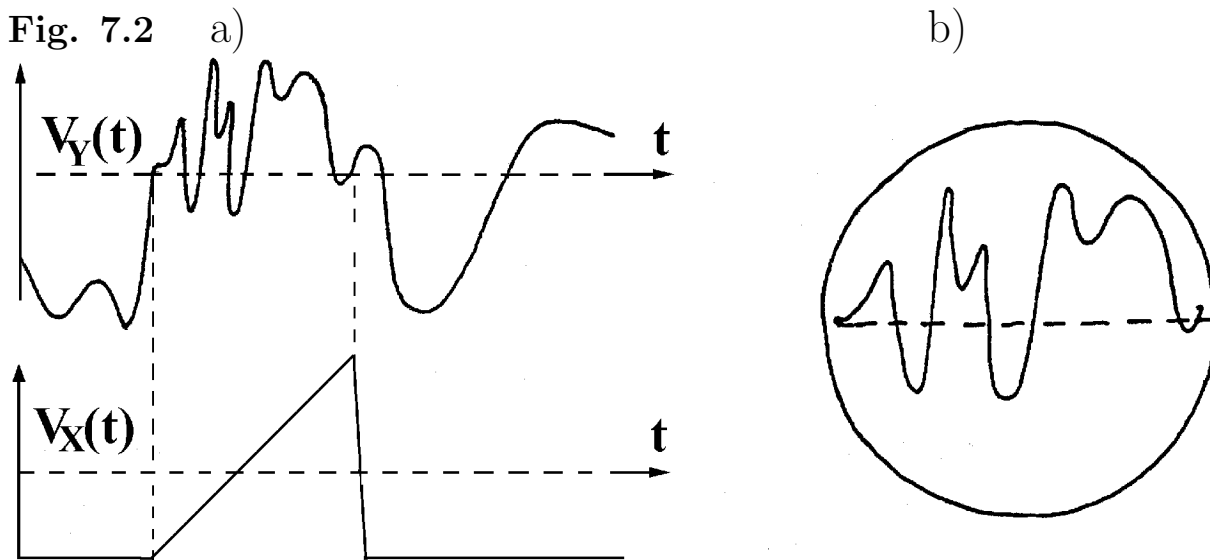
### 7.1 Oscillografo

Per essere concreti nello studio dei fenomeni dipendenti dal tempo dobbiamo pensare di misurare le varie grandezze elettromagnetiche. Non è semplice perché gli strumenti di misura sono sistemi fisici proprio come quelli che vogliamo sottoporre a misure. Più precisamente diciamo che il sistema fisico oggetto di studio comprende gli strumenti di misura. In qualche caso, ad esempio con la bilancia magnetica, misuriamo forze, molto spesso misuriamo le tensioni  $V(t)$  ai morsetti degli strumenti, oppure le correnti  $I(t)$  negli strumenti che abbiamo inserito nel sistema. I campi ELETTRICO e MAGNETICO, le densità di carica e di corrente e le altre grandezze che abbiamo introdotto vengono valutati dalle misure di forze, tensioni, correnti, tempi e lunghezze, tenendo conto delle equazioni di Maxwell e della legge di forza.

Fig. 7.1



In questo paragrafo descriviamo sommariamente il principio degli strumenti di misura elettromagnetici: l'oscillografo schematizzato in figura 1. È uno strumento che può misurare tensioni rapidamente variabili nel tempo assorbendo debolissime correnti, diciamo un voltmetro quasi ideale. È costituito da quattro parti fondamentali: un cannone elettronico, uno schermo fluorescente collegato a massa, una coppia di lastre parallele verticali (ASSE X) alimentate con tensione "a dente di sega", ed una coppia di lastre parallele orizzontali (ASSE Y) che vengono collegate ai punti tra i quali si vuole misurare la tensione. Il tutto è alloggiato in un involucro di vetro evacuato e pompato da uno strato di materiale capace di catturare le molecole incidenti (pompa getter). Il cannone elettronico è un sistema elettrostatico a simmetria assiale composto da un filamento capace di emettere elettroni e da alcuni dischi metallici opportunamente forati sull'asse. Ad esempio, il filamento è tenuto a  $-15000V$ , il primo disco, detto estrattore, è tenuto a tensione lievemente minore (in valore assoluto) mentre l'ultimo disco, detto anodo, è posto a massa come lo schermo fluorescente. Alcuni dischi intermedi, non mostrati in figura, hanno il compito di focalizzare il fascio di elettroni sullo schermo fluorescente, per semplicità non li consideriamo. Dal diaframma dell'anodo allo schermo il fascio di elettroni procederebbe in linea retta se non venissero applicate tensioni alle lastre di deflessione. La tensione  $V_X$  tra le lastre verticali provoca la deflessione orizzontale (X) del fascio. Ad esempio pensiamo



che, con  $V_Y = 0$ , la tensione  $V_X$  sia tale che il fascio di elettroni colpisca un punto in prossimità del bordo dello schermo, a sinistra guardando lo schermo. E pensiamo che, a partire da un certo istante, la tensione  $V_X$  venga fatta variare in modo che il punto luminoso si muova da sinistra a destra con velocità costante, ad esempio  $100 \text{ m/s}$ , sino a raggiungere l'estremo di destra. In tal caso l'asse X, detto **asse dei tempi**, risulta graduato con fattore di scala di  $100 \mu\text{s/cm}$ ; ad esempio, con schermo di diametro di  $10 \text{ cm}$  la scansione ha durata di  $1 \text{ ms}$ . Al termine della scansione riportiamo quasi

istantaneamente la tensione  $V_X$  al valore iniziale, come mostrato in figura 2a). Quando le lastre orizzontali sono collegate a due punti di un circuito, la tensione  $V_Y(t)$  tra i due punti viene misurata dalla deflessione verticale del fascio ed il grafico di  $V_Y(t)$ , registrato nel tempo di scansione, appare sullo schermo come in figura 2b). Al termine della scansione cancelliamo la traccia sullo schermo e avviamo una nuova scansione. Si noti che un po' di carica deve fluire per portare le lastre in tensione, quindi il collegamento dell'oscillografo altera un po' il funzionamento del circuito. Torneremo su questo punto più avanti, per ora diciamo che gli oscillografi moderni si comportano come voltmetri ideali fino a quando le tensioni non prendono ad oscillare con frequenze maggiori di  $1\text{ MHz}$ .

## ESERCIZI

1) Un sottile fascio di elettroni orizzontale di energia cinetica  $3\text{ keV}$  passa tra due lastre parallele orizzontali di sezione  $2 \times 2\text{ cm}^2$ , distanti  $1\text{ cm}$  l'una dall'altra. Calcolare lo spostamento del fascio su uno schermo posto a  $30\text{ cm}$  di distanza, in funzione della tensione di deflessione.

NOTA: abbiamo limitato a  $3\text{ keV}$  l'energia degli elettroni per consentire l'uso di leggi del moto classiche

## 7.2 Densità di energia magnetica

Nel circuito mostrato in figura 3 il generatore, composto da un deviatore e da una batteria ideale, fornisce forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  quando il deviatore è chiuso sulla batteria e fornisce forza elettromotrice nulla quando il deviatore è chiuso sul corto. L'oscillografo, collegato ai capi di un resistore con

Fig. 7.3

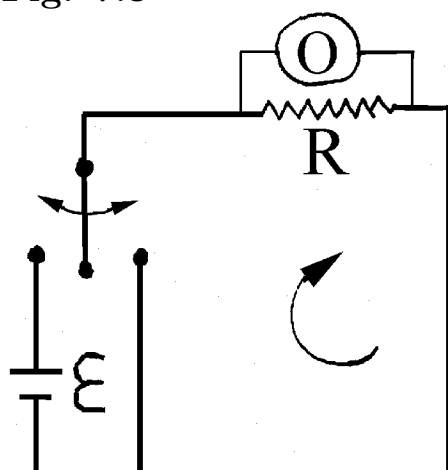
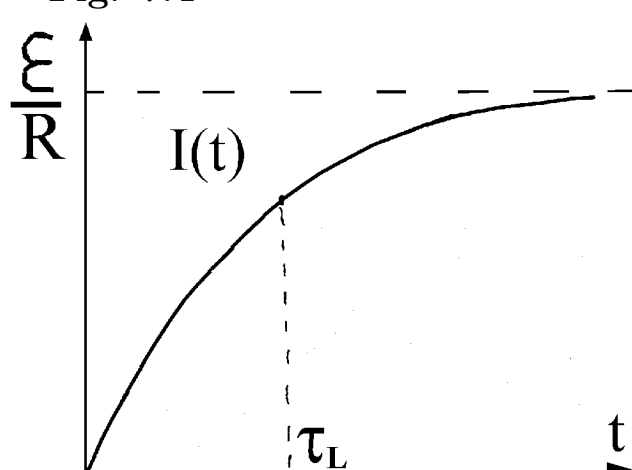


Fig. 7.4



resistenza ben calibrata, misura la tensione ai capi della resistenza, quindi misura  $I(t)$ . Pensiamo che il deviatore, tenuto sul corto nel passato, venga chiuso sui morsetti della batteria al tempo zero e domandiamo: come evolve la corrente? Sappiamo che è nulla all'inizio e sappiamo che al termine della fase transitoria vale  $I = \mathcal{E}/R$  dove  $R$  è la resistenza complessiva del

circuito. Inoltre sappiamo che la circolazione del campo ELETTRICO lungo tutto il circuito, presa nel verso di circolazione mostrato in figura, vale  $R I(t) - \mathcal{E}$ . Tale circolazione è nulla in condizioni stazionarie, ma non durante la fase transitoria. Infatti una corrente dipendente dal tempo genera un campo magnetico dipendente dal tempo e questo induce nel circuito la forza elettromotrice  $\mathcal{E}_{ind}(t) = -d\phi_B(t)/dt$ , dove  $\phi_B$  è il flusso attraverso il circuito del campo  $\mathbf{B}$  prodotto dalla corrente che percorre il circuito stesso, detto **flusso autoconcatenato**. Abbiamo indicato con  $\mathcal{E}_{ind}(t)$  la forza elettromotrice indotta per non confonderla con la forza elettromotrice  $\mathcal{E}(t)$  applicata al circuito. Dal tempo zero in poi  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}$  è costante, quindi

$$R I(t) - \mathcal{E} = \mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt}$$

Pertanto l'evoluzione della corrente è governata dall'equazione

$$\frac{d\phi_B(t)}{dt} + R I(t) = \mathcal{E} \quad (7.1)$$

Il calcolo del flusso autoconcatenato, data  $I(t)$  e data la geometria del circuito, è tutt'altro che semplice, ma, ammesso che il circuito sia immerso nel vuoto o in un materiale magnetico lineare, un fatto è certo: il flusso autoconcatenato, come il campo magnetico  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ , è proporzionale ad  $I(t)$ , comunque sia fatto il circuito, ovvero

$$\phi_B(t) = L I(t) \quad (7.2)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $L$  prende il nome di **coefficiente di autoinduzione** o di **induttanza** del circuito e dipende dalla geometria del circuito e dalla permeabilità magnetica del materiale che lo ingloba. Torneremo su questo punto negli esercizi, per ora sostituiamo l'equazione 2) nella 1) e concludiamo che

$$\frac{d}{dt}I(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Tenendo conto che la corrente è nulla al tempo zero, si vede che  $I(t)$  prende ad aumentare con derivata temporale  $\mathcal{E}/L$ , poi aumenta via via più lentamente sino a raggiungere il valore stazionario  $\mathcal{E}/R$ , precisamente la corrente evolve con l'andamento

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}[1 - e^{-\frac{R}{L}t}] = \frac{\mathcal{E}}{R}[1 - e^{-\Gamma t}]$$

mostrato in figura 4. Nella scrittura di destra abbiamo introdotto la

$$\text{frequenza di smorzamento} \quad \Gamma = \frac{R}{L} \quad (7.3)$$

Il suo inverso è la **costante tempo induttiva**  $\tau_L = L/R$ . Si noti che per  $t = \tau_L$  la corrente è la frazione  $1 - e^{-1} \approx 0.63$  del valore di regime  $\mathcal{E}/R$ .

Ora pensiamo che al tempo  $t_0$ , quando la corrente vale  $I(t_0)$ , il circuito venga istantaneamente chiuso sul corto. Dal tempo  $t_0$  in poi la corrente è governata dall'equazione

$$\frac{d}{dt}I(t) + \Gamma I(t) = 0, \quad \text{quindi decade con andamento} \quad I(t) = I(t_0)e^{-\Gamma(t-t_0)}$$

Durante il decadimento la resistenza dissipa l'energia

$$R \int_{t_0}^{\infty} I^2(t) dt = RI^2(t_0) \int_{t_0}^{\infty} e^{-2\Gamma(t-t_0)} dt = \frac{RI^2(t_0)}{2\Gamma} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{LI^2(t_0)}{2}$$

Ciò comporta che al tempo  $t_0$  il circuito possedeva l'energia  $LI^2(t_0)/2$ . E poiché la scelta del tempo  $t_0$  è arbitraria, possiamo concludere che **un circuito percorso da corrente  $I(t)$  ha in magazzino l'energia magnetica**

$$U_m(t) = \frac{1}{2}LI^2(t) = \frac{1}{2}\phi_B(t)I(t) = \frac{1}{2}\frac{\phi_B^2(t)}{L} \quad (7.4)$$

Per individuare il magazzino cominciamo a pensare che il circuito sia un solenoide toroidale di sezione  $S$  e circonferenza media  $l$  avvolto con  $N$  spire percorse da corrente  $I$ . In tal caso il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con le  $N$  spire del circuito vale  $\phi_B = BSN$ , mentre la circolazione di  $H$  sulla circonferenza media vale  $Hl = NI$ , quindi l'energia magnetica del solenoide toroidale vale

$$U_m = \frac{1}{2}\phi_B I = \frac{BSNI}{2} = \frac{BSHl}{2} = \frac{1}{2}BH\mathcal{V}$$

dove  $\mathcal{V} = Sl$  è il volume del solenoide. Ciò induce a pensare che l'energia magnetica sia immagazzinata nel volume del solenoide con densità

$$u_m = \frac{1}{2}HB$$

A questo punto abbiamo due indizi simili: studiando i condensatori abbiamo scoperto che la densità di energia elettrica immagazzinata nei materiali lineari ed isotropi vale  $ED/2$ , ora abbiamo visto che la densità di energia magnetica immagazzinata nei materiali lineari ed isotropi vale  $HB/2$ . L'importanza degli aspetti energetici è tale che conviene indagare a fondo la questione, come faremo nel prossimo paragrafo.

## ESERCIZI

1) Mostrare che il coefficiente di autoinduzione di un solenoide toroidale costituito da  $N$  spire avvolte su un anello di sezione  $S$ , circonferenza media  $l$  e permeabilità  $\mu$  vale

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} \quad (7.5)$$

2) Considerare una "piattina" costituita da due fili di rame di sezione  $1 \text{ mm}^2$  tenuti paralleli a distanza di  $1 \text{ cm}$ . Un pezzo di piattina lungo  $300 \text{ m}$ ,

alimentato ad un estremo da una batteria da  $12\text{ V}$  e resistenza interna  $1\ \Omega$ , è chiuso all'altro estremo su un resistore da  $100\ \Omega$ . Calcolare: a) la resistenza del circuito, b) la “resistenza per unità di lunghezza” della piattina, c) il coefficiente di autoinduzione del circuito, (si trascuri il campo presente entro i conduttori), d) il “coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza” della piattina, e) la corrente di regime, f) il tempo di salita della corrente alla chiusura del circuito sulla batteria, g) il tempo di discesa della corrente dopo la sostituzione (istantanea) della batteria con un corto, h) la potenza dissipata a regime, i) l'energia immagazzinata a regime, l) l'energia dissipata dopo l'apertura del circuito.

3) Un cavo coassiale con conduttore interno di diametro  $1\text{ mm}$  ha guaina metallica di diametro interno  $5\text{ mm}$  e spessore  $0.1\text{ mm}$ . L'intercapedine tra i due conduttori è riempita da un dielettrico perfetto con  $\epsilon = 2.1$  e  $\mu = 1$ . Per un pezzo di cavo lungo  $100\text{ m}$ , con conduttori chiusi su una batteria da  $12\text{ V}$  ad un estremo e messi in corto all'altro estremo, calcolare: a) la resistenza del pezzo di cavo, b) la corrente che circola a regime, c) l'energia magnetica accumulata nel cavo, d) l'induttanza del pezzo di cavo.

4) Verificare la validità della relazione matematica

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{G}(t, \mathbf{r})] = -\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.14)$$

### 7.3 Equazione di Poynting

Cominciamo a ricordare che la densità di potenza elettromagnetica dissipata nei materiali per effetto Joule vale  $w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f$ , e che la densità di corrente di conduzione è legata ai campi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{D}$  dalla quarta equazione di Maxwell  $\mathbf{j}_f = \nabla \times \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t$ . Pertanto

$$w(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

L'equazione M.14) consente di sostituire  $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$  con  $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  e la legge di induzione consente di sostituire  $\nabla \times \mathbf{E}$  con  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ , quindi

$$w(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} - \nabla \cdot [\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r})] - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

A questo punto conviene definire il

$$\text{vettore di Poynting} \quad \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \quad (7.6)$$

e conviene riscrivere il risultato ottenuto sopra nella forma

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) - w(t, \mathbf{r}) \quad (7.7)$$

Con questa equazione, ottenuta da Poynting nel 1882, la teoria elettromagnetica raggiunse la piena maturità. Essendo conseguenza diretta di leggi generali, **l'equazione di Poynting 7) vale in generale**, anche nei materiali non lineari, inomogenei ed anisotropi.

Ora, senza escludere che i materiali siano anisotropi ed inomogenei, restringiamo l'attenzione a materiali con relazioni costitutive interne lineari. In tal caso il primo membro dell'equazione 7) è la derivata temporale di

$$u_{em}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \quad (7.8)$$

infatti

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Quindi **l'equazione di Poynting per materiali lineari** prende la forma

$$\frac{\partial u_{em}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) - w(t, \mathbf{r}) \quad (7.9)$$

I risultati emersi dallo studio di condensatori ed induttori suggeriscono che  $u_{em}(t, \mathbf{r})$  è la densità di energia elettromagnetica immagazzinata nei materiali lineari, quindi l'equazione di Poynting 9) acquista il significato di **legge di bilancio locale dell'energia elettromagnetica**. Integrandola su un volume  $\mathcal{V}$  e ricordando il teorema della divergenza si vede che

$$\frac{dU_{em}(t)}{dt} = - \oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) - W(t) \quad (7.9')$$

dove  $U_{em}(t)$  è l'energia elettromagnetica contenuta nel volume  $\mathcal{V}$  e  $W(t)$  è la potenza elettromagnetica dissipata nello stesso volume. Pertanto l'integrale di  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$  esteso alla frontiera  $\mathcal{S}$  deve essere il flusso di energia elettromagnetica uscente dal volume  $\mathcal{V}$ . Ciò comporta che **il vettore di Poynting è la densità di flusso di energia elettromagnetica**. Insomma l'equazione 9) dice che, in un dato tempuscolo, l'energia elettromagnetica contenuta in un materiale lineare diminuisce della quantità che il vettore di Poynting trasporta fuori dal materiale e diminuisce della quantità dissipata entro il materiale per effetto Joule.

Concludiamo questo paragrafo con due note importanti.

- Per una particella nel vuoto possiamo usare le equazioni di Maxwell con  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  e con  $\rho_f$  e  $\mathbf{j}_f$  a descrivere le densità di carica e di corrente associate alle particella. In tal caso l'equazione 9) continua a valere, ma  $w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$  non è la densità di potenza dissipata per effetto Joule, è la densità di potenza che il campo scambia con la particella e può essere positiva o negativa. Torneremo su questo punto nel capitolo 15.
- Quando si segue l'approccio di Lorentz e si descrive un materiale come un insieme di particelle poste nel vuoto, la densità di energia  $\epsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0$

del campo elettromagnetico prodotto dall'insieme di particelle risulta maggiore di zero, anche quando il materiale è rilassato ed anche quando i campi hanno valor medio temporale nullo. Tale densità di energia viene considerata dalle teorie quantistiche della materia ed è parte della densità di energia interna del materiale. Ma **l'energia elettromagnetica considerata dall'elettromagnetismo classico NON è l'energia del campo elettromagnetico associato al sistema di particelle elementari nel vuoto, è l'energia del campo ELETTRROMAGNETICO di sovrapposizione stimolo-risposta ed è nulla in condizioni rilassate.**

## 7.4 Energia di sistemi lineari stazionari

In questo paragrafo mostriamo che **l'energia elettrostatica e l'energia magnetostatica di sistemi lineari, sebbene siano distribuite nel vuoto o nei dielettrici, sono univocamente individuate dalle cariche e dalle correnti distribuite nei conduttori.** Allo scopo ricordiamo che  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$  e notiamo che  $\nabla \cdot [V\mathbf{D}] = V\nabla \cdot \mathbf{D} + (\nabla V) \cdot \mathbf{D}$ , quindi

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -(\nabla V) \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot [V\mathbf{D}] + V\nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot [V\mathbf{D}] + V\rho_f$$

Pertanto la densità di energia elettrostatica può essere scritta nella forma

$$u_{es}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\nabla \cdot [V(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r})] + \frac{1}{2}V(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r})$$

Quindi l'energia elettrostatica  $U_{es}$  contenuta in un volume  $\mathcal{V}$  vale

$$U_{es} = -\frac{1}{2}\int_S dS \mathbf{n} \cdot [V(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r})] + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} dV V(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r})$$

Quando l'integrazione è estesa ad una sfera di raggio tendente all'infinito, l'integrale di superficie tende a zero perché  $V(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r})$  decade come o più rapidamente di  $1/r^3$  mentre la superficie di integrazione aumenta solo come  $r^2$ . Inoltre l'integrale di volume riceve contributi solo dalle regioni occupate dai conduttori, regioni che hanno tensioni uniformi, quindi

$$U_{es} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} dV V(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$$

dove  $V_i$  e  $Q_i$  sono la tensione e la carica dell' $i$ -esimo conduttore e la somma è estesa a tutti i conduttori presenti nel sistema.

Passiamo al calcolo dell'energia magnetostatica di un sistema lineare. Tenendo conto  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , usando l'equazione M.14) e ricordando che  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$ , si vede che

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{A}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_f - \nabla \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{A}]$$



Pertanto la densità d'energia magnetostatica può essere scritta nella forma

$$u_{ms}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r})]$$

Integrando su una sfera di raggio tendente all'infinito e tenendo presente che  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  decade con la distanza come o più rapidamente di  $1/r^5$ , si vede che l'energia magnetostatica vale

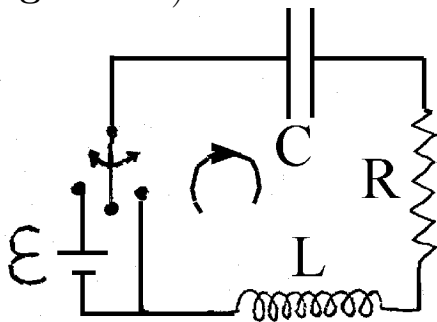
$$U_{ms} = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r})$$

e si vede che, anche in questo caso, l'integrazione può essere limitata ai volumi occupati dai conduttori perché altrove  $\mathbf{j}_f$  è nullo.

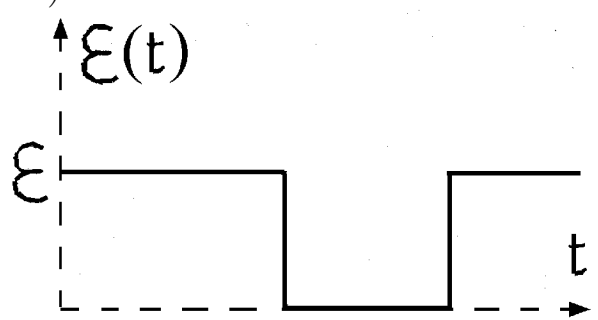
## 7.5 Circuito RCL in serie in regime transitorio

Fino ad ora abbiamo considerato i circuiti RC, costituiti da un condensatore in serie ad un resistore, ed i circuiti RL, costituiti da un'induttore in serie ad un resistore. Nel primo caso avevamo tacitamente ammesso che l'induttanza del circuito fosse trascurabile, nel secondo avevamo tacitamente ammesso che fosse trascurabile la capacità del circuito. Ora studiamo un circuito con re-

Fig. 7.5: a)



b)



sistenza, capacità ed induttanza in serie, alimentato con forza elettromotrice costante a tratti, e precisiamo quanto detto in precedenza. Per semplicità pensiamo che il generatore sia composto da una batteria di resistenza interna trascurabile e da un deviatore, disposti come in figura 5a). Il deviatore cortocircuita i morsetti del circuito oppure li collega ai morsetti della batteria con tempi di commutazione trascurabili. Quindi la forza elettromotrice  $\mathcal{E}(t)$  applicata al circuito ha l'andamento mostrato in figura 5b): è nulla quando i morsetti del circuito sono in corto e vale  $\mathcal{E}$  quando i morsetti sono collegati alla batteria. Sappiamo che la circolazione del campo elettrico lungo il circuito, presa nel verso mostrato in figura, vale  $RI(t) + Q(t)/C - \mathcal{E}(t)$  ed è uguale alla forza elettromotrice indotta  $-LdI(t)/dt$ , quindi possiamo scrivere

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}(t) \quad (7.10)$$

Interpretando il primo termine come tensione induttiva, il secondo come tensione resistiva ed il terzo come tensione capacitiva, l'equazione 10) dice che, **in un circuito RCL in serie la somma delle tensioni induttiva, resistiva e capacitiva è uguale alla forza elettromotrice di alimentazione.** Questa interpretazione estende la validità della seconda legge di Kirchhoff anche a circuiti percorsi da correnti dipendenti dal tempo. Si noti che la tensione induttiva è la forza elettromotrice indotta cambiata di segno, ovvero è la parte della forza elettromotrice che deve essere applicata per compensare la forza elettromotrice indotta.

Nella situazione considerata in figura 5,  $\mathcal{E}(t)$  ha derivata nulla ad ogni istante diverso dagli istanti di commutazione, quindi conviene prendere la derivata temporale dell'equazione 10) e scrivere l'equazione

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) + \Gamma \frac{d}{dt}I(t) + \omega_0^2 I(t) = 0 \quad (7.11)$$

dove  $\Gamma = R/L$  è la frequenza di smorzamento e

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.12)$$

è una frequenza che acquisterà grande rilevanza nel seguito. Per semplificare la scrittura delle condizioni iniziali conviene indicare con  $\dot{I}(t)$  e  $\ddot{I}(t)$  le derivate prime e seconde rispetto al tempo e riscrivere l'equazione 11) nella forma

$$\ddot{I}(t) + \Gamma \dot{I}(t) + \omega_0^2 I(t) = 0 \quad (7.13)$$

Questa equazione vale a qualunque istante diverso dall'istante di commutazione e può essere risolta quando si conoscono le condizioni del circuito a tale istante. Il metodo di soluzione comporta i seguenti passi.

- Calcolo delle radici  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dell'equazione  $\alpha^2 + \Gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$ :

$$\alpha_1 = -\frac{\Gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\Gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (7.14)$$

- Scrittura della soluzione nella forma

$$I(t) = ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t} \quad \text{oppure} \quad I(t) = (a + bt)e^{-\Gamma t/2} \quad (7.15)$$

a seconda che le radici siano distinte oppure coincidenti.

- Calcolo delle costanti  $a$  e  $b$  in modo consistente con le condizioni del circuito all'istante di commutazione.

Nel seguito limitiamo l'attenzione alla **corrente di carica** ed alla **corrente di scarica**. La prima insorge quando il deviatore, tenuto a lungo sul corto nel passato, viene portato sulla batteria, la seconda insorge quando il deviatore, tenuto a lungo sulla batteria nel passato, viene portato sul corto.

La corrente iniziale  $I(0)$  è nulla in entrambi i casi, mentre la sua derivata iniziale  $\dot{I}(0)$  vale  $\mathcal{E}/L$  nel primo caso e vale  $-\mathcal{E}/L$  nel secondo. Lo si vede dall'equazione 10) tenendo presente che nel processo di carica  $Q(0) = 0$ ,  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}$ , mentre nel processo di scarica  $Q(0) = C\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{E}(t) = 0$ .

Quando  $\omega_0 = \Gamma/2$ , le due radici coincidono e le condizioni iniziali sono soddisfatte ponendo  $a = 0$  e  $b = \pm\mathcal{E}/L$ , con segno  $+$  per la corrente di carica e segno  $-$  per la corrente di scarica. Quindi la corrente evolve con l'andamento

$$I(t) = \pm \frac{\mathcal{E}}{L} t e^{-\Gamma t/2}$$

Come mostrato in figura 6 la corrente di carica aumenta sino al tempo  $t = 2/\Gamma = 2\tau_L$ , a tale istante prende il valore di picco  $0.74 \mathcal{E}/R$ , poi decade quasi esponenzialmente. Questo andamento prende il nome di **smorzamento critico**.

Fig. 7.6

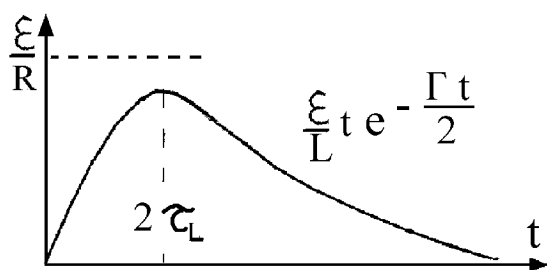
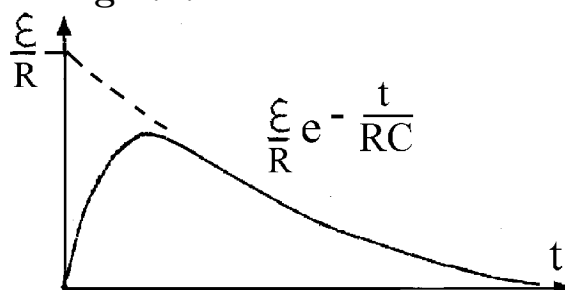


Fig. 7.7



Quando  $\omega_0$  è diverso da  $\Gamma/2$  le radici  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  sono distinte e le condizioni iniziali comportano che  $a + b = 0$ ,  $\alpha_1 a + \alpha_2 b = \pm\mathcal{E}/L$ . Quindi la corrente evolve con andamento

$$I(t) = \frac{\pm\mathcal{E}/L}{\alpha_1 - \alpha_2} [e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}] \quad (7.16)$$

con segno  $+$  per la corrente di carica e segno  $-$  per la corrente di scarica. Le equazioni 14) e 16) ed un modesto calcolatore consentono di calcolare le correnti di carica e scarica in qualunque caso. Qui, limitiamo l'attenzione a due situazioni estreme contraddistinte da valori piccolissimi o grandissimi del

$$\text{fattore di merito} = \frac{\omega_0}{\Gamma} \quad (7.17)$$

• Per  $\omega_0 \ll \Gamma$  la radice  $\alpha_2$  differisce poco da  $-\Gamma$ , mentre la radice  $\alpha_1$  è ben approssimata da

$$\alpha_1 = -\frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\Gamma^2}} \approx -\frac{\omega_0^2}{\Gamma} = -\frac{1}{RC}$$

Si noti che  $1/RC = L/R\omega_0^2 = \Gamma(\omega_0/\Gamma)^2$  è enormemente minore di  $\Gamma$ , quindi  $\alpha_1 - \alpha_2$  non differisce apprezzabilmente da  $\Gamma$ . Pertanto la corrente di carica è ben approssimata da

$$I(t) \approx \frac{\mathcal{E}}{R} [e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\Gamma t}]$$

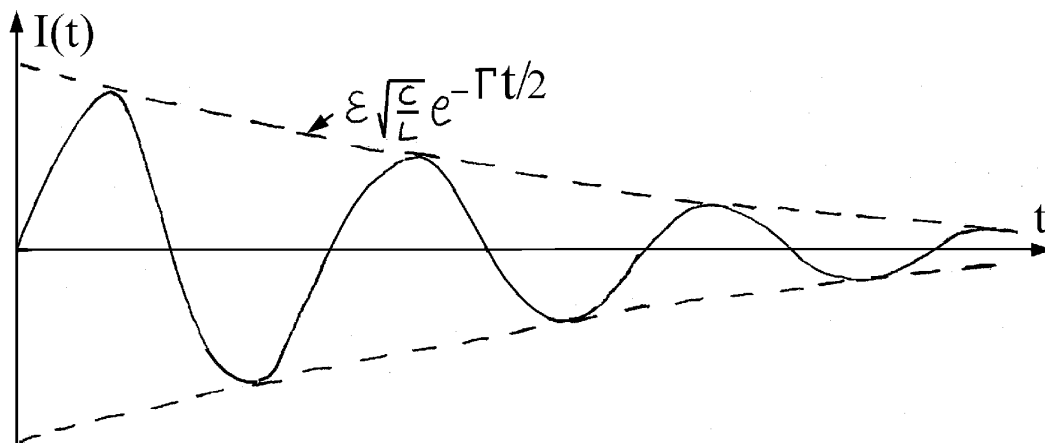
Come mostrato in figura 7, la corrente raggiunge un valore di picco minore di  $\mathcal{E}/R$ , poi decade esponenzialmente con **costante tempo**  $RC$ . Infatti il termine  $e^{-\Gamma t}$  diventa ben presto trascurabile rispetto a  $e^{-t/RC}$ .

• Per  $\omega_0 \gg \Gamma$  le radici sono approssimate da  $\alpha_1 = -\Gamma/2 + i\omega_0$  e  $\alpha_2 = -\Gamma/2 - i\omega_0$ . Sostituendo questi valori nell'equazione 16) si ottiene la corrente di carica

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}/L}{2i\omega_0} e^{-\Gamma t/2} [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}] = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\Gamma t/2} \sin(\omega_0 t) \quad (7.18)$$

Come mostrato in figura 8, la corrente oscilla con andamento sinusoidale smorzato di frequenza  $\omega_0$  e frequenza di smorzamento  $\Gamma/2$ . Per  $t = 1/\Gamma$  il fattore esponenziale vale  $e^{-1/2} \approx 0.61$ , mentre l'argomento del seno è proprio il fattore di merito  $\omega_0/\Gamma$  del circuito. Ad esempio, in un circuito con fattore di merito 100 la corrente compie  $100/2\pi \approx 16$  oscillazioni complete prima che il fattore esponenziale si riduca a 0.61.

Fig. 7.8



## ESERCIZI

1) Un circuito RCL con  $R = 2 \Omega$  ed  $L = 2 \cdot 10^{-5} H$  è alimentato con forza elettromotrice che passa istantaneamente da  $\mathcal{E}$  a zero e viceversa con periodo di  $200 ms$ . Riportare in grafico l'andamento temporale della tensione ai capi della resistenza nei seguenti casi: a)  $\omega_0 = \Gamma/2$ , b)  $\omega_0 \ll \Gamma$ , c)  $\omega_0 \gg \Gamma$ .

## 7.6 Trasferimenti di energia nel circuito RCL

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto le correnti di carica e di scarica nel circuito RCL in serie, ora consideriamo gli aspetti energetici.

La figura 9 mostra la situazione nel condensatore in fase di carica: la corrente ed il campo  $\mathbf{E}$  nel condensatore sono diretti verso destra,  $\mathbf{B}$  circola uscendo dal foglio in alto ed il vettore di Poynting è orientato verso l'interno, quindi l'energia fluisce dal vuoto al condensatore. L'opposto avviene in fase di scarica:  $\mathbf{E}$  conserva lo stesso verso, ma la corrente ed il campo  $\mathbf{B}$  hanno

Fig. 7.9

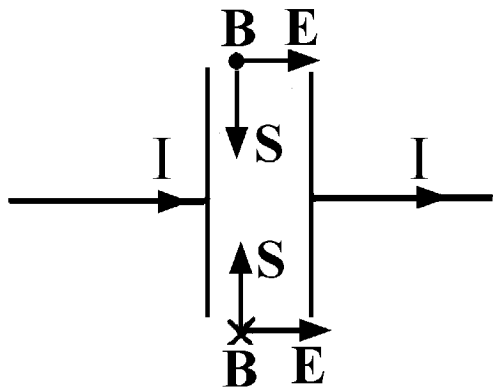
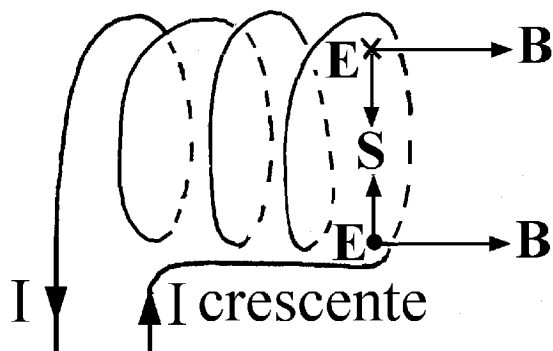


Fig. 7.10



verso opposto, quindi  $\mathbf{S}$  è orientato verso l'esterno e l'energia fluisce dal condensatore al vuoto.

La figura 10 mostra la situazione nell'induttore percorso da corrente crescente:  $\mathbf{B}$  aumenta nel tempo, mentre il campo ELETTRICO  $\mathbf{E}$  fornito dalla legge di induzione circola uscendo dal foglio in basso, quindi il vettore di Poynting punta verso l'interno e trasferisce energia dal vuoto all'induttore.

Ora consideriamo un circuito RCL in serie con fattore di merito  $\omega_0/\Gamma$  tanto grande da poter ammettere che, anche dopo un gran numero di oscillazioni, la corrente di scarica non differisca apprezzabilmente da

$$I(t) = -\mathcal{E}\sqrt{C/L}\sin(\omega_0 t)$$

In tal caso la carica del condensatore ha l'andamento  $Q(t) = C\mathcal{E}\cos(\omega_0 t)$ , per convincersene basta notare che la sua derivata è proprio la corrente. Pertanto l'energia elettromagnetica del sistema risulta

$$U_{em} = \frac{1}{2} \left[ LI^2(t) + \frac{Q^2(t)}{C} \right] = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$$

e non dipende dal tempo. Quindi l'energia viene trasferita alternativamente dal condensatore all'induttore e viceversa. Naturalmente non è proprio così perché il fattore di merito non è mai infinito e l'energia  $U_{em}(t)$  immagazzinata nel circuito viene progressivamente dissipata nella resistenza. Per valutare  $U_{em}(t)$  notiamo che quando la corrente è massima il condensatore è scarico, quindi tutta l'energia è immagazzinata nell'induttore ed è proporzionale al quadrato della corrente. Ma la corrente di picco decade con andamento  $e^{-\Gamma t/2}$ , quindi l'energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito decade con andamento

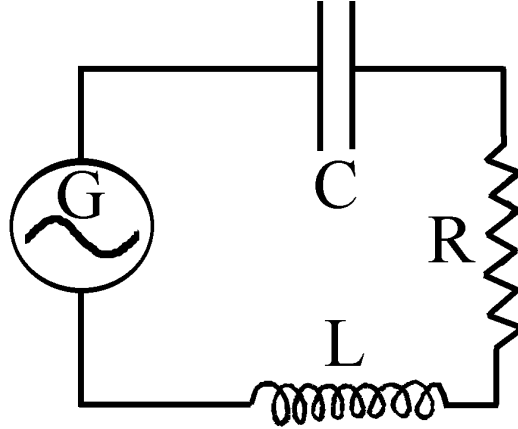
$$U_{em}(t) = U_{em}(0)e^{-\Gamma t} \quad (7.19)$$

Dunque la costante tempo induttiva  $\tau_L = 1/\Gamma = L/R$  assume il significato di **tempo di rilassamento dell'energia** nel circuito autooscillante.

## 7.7 Circuito RCL in serie in regime armonico

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che la forma d'onda di  $I(t)$  nel circuito RCL può essere molto diversa dalla forma d'onda di  $\mathcal{E}(t)$ . Ora, con riferimento alla figura 11, mostriamo che vale un fatto importantissimo: quando un

**Fig. 7.11**



circuito composto da elementi lineari come condensatori, induttori e resistori è alimentato da un generatore di forza elettromotrice armonica con frequenza  $\omega$  anche la corrente è armonica con frequenza  $\omega$ , e la tensione ai capi di un qualunque elemento circuitale è una copia della forza elettromotrice di alimentazione, variata in ampiezza e traslata nel tempo. Per procedere senza immergerci in calcoli noiosi conviene armarsi di un metodo che si rivelerà prezioso in molte circostanze. Cominciamo a pensare che la carica  $Q(t)$  del condensatore oscilli in modo armonico e la descriviamo come la parte reale della “carica complessa”

$$Qe^{-i\omega t} \quad (7.20)$$

Si intende che anche  $Q$  è complesso: il suo modulo,  $|Q| = \sqrt{QQ^*}$ , è il valore di picco della carica e la sua fase è la fase di  $Q(t)$  al tempo zero. Ricordiamo che l'angolo di fase viene contato in senso antiorario nel piano complesso, quindi il segno negativo dell'esponente significa che la “carica complessa ruota in senso orario”. Ad esempio nel caso considerato in figura 12 la fase di  $Q$  vale  $\pi/6$ , quindi  $Q(t)$  ha andamento  $Q(t) = |Q| \cos(\pi/6 - \omega t)$ . Poiché la corrente e la carica reali sono legate dalla relazione  $I(t) = dQ(t)/dt$ , anche la corrente è armonica con frequenza  $\omega$  e le grandezze complesse  $Ie^{-i\omega t}$  e  $Qe^{-i\omega t}$  sono legate dalla relazione

$$I = -i\omega Q \quad \text{ovvero} \quad Q = i\frac{I}{\omega}$$

Come mostrato in figura 13, la carica complessa e la corrente complessa ruotano insieme in senso orario nel piano complesso, con carica “in ritardo” di  $\pi/2$  rispetto alla corrente e con valori di picco tali che  $|I| = \omega |Q|$ .

Veniamo alla tensione  $V_C(t)$  ai capi del condensatore in regime armonico. È legata alla carica dalla relazione  $V_C(t) = Q(t)/C$ , quindi anche  $V_C(t)$  è

Fig. 7.12

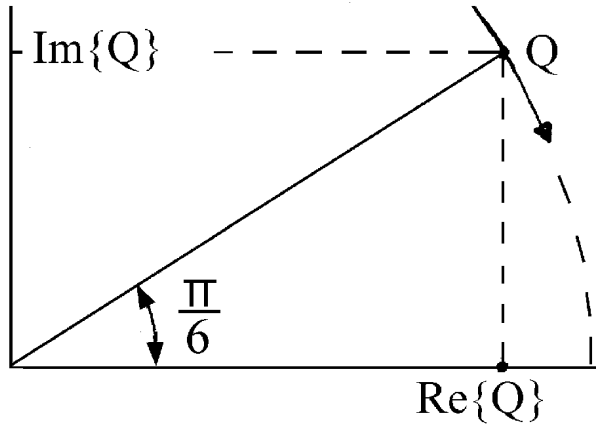
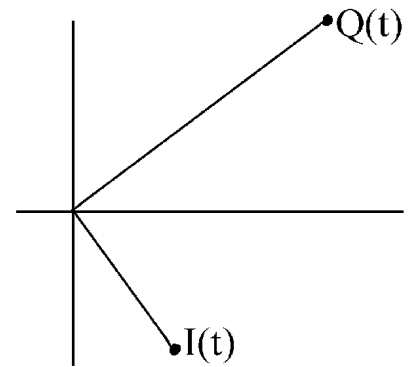


Fig. 7.13



armonica con frequenza  $\omega$  e le grandezze complesse  $V_C$  ed  $I$  sono legate dalla relazione

$$V_C = \frac{i}{\omega C} I$$

che generalizza la legge di Ohm al caso del condensatore in regime armonico. La grandezza  $i/\omega C$  prende il nome di **impedenza capacitiva**. Il suo modulo è il rapporto tra i valori di picco della tensione e della corrente e la sua **fase**  $\pi/2$  è lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente. Si noti che, a parità di tensione ai capi, un condensatore è percorso da corrente tanto più intensa quanto più alta è la frequenza. Ma la corrente e la tensione sono in quadratura (sfasate di  $\pi/2$ ) e ciò comporta che **la potenza dissipata nel condensatore risulta nulla**. Per capire bene questo punto pensiamo di aver scelto l'origine dei tempi in modo che  $I$  sia reale positivo. In tal caso la corrente reale ha l'andamento  $I(t) = I \cos(\omega t)$  e la tensione reale ha l'andamento  $(I/\omega C) \sin(\omega t)$ , quindi la potenza  $I(t)V_C(t)$  assorbita dal condensatore dipende dal tempo come  $\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \sin(2\omega t)/2$  e ha davvero valor medio temporale nullo. Insomma, in un periodo di oscillazione il condensatore riceve tanta energia quanta ne restituisce!

Discorso analogo vale per un'induttore in regime armonico: la tensione ai capi dell'induttore deve equilibrare la forza elettromotrice indotta, quindi è legata alla corrente dalla relazione  $V_L(t) = LdI(t)/dt$ . Ciò implica che le grandezze complesse  $V_L$  ed  $I$  sono legate dalla relazione

$$V_L = -i\omega L I$$

che generalizza la legge di Ohm al caso dell'induttore in regime armonico. La grandezza  $-i\omega L$  è l'**impedenza induttiva**, ha fase  $-\pi/2$  e modulo proporzionale alla frequenza. A parità di tensione l'induttore è percorso da corrente tanto più grande quanto più piccola è la frequenza, ma anche in tal caso la corrente e la tensione ai capi sono in quadratura, quindi **la potenza dissipata nell'induttore è nulla**.

Infine consideriamo il caso di una resistenza in regime armonico. La legge di Ohm  $V_R(t) = RI(t)$  comporta che le grandezze complesse  $V_R$  ed  $I$  sono

legate dalla relazione  $V_R = RI$ , quindi la potenza assorbita e dissipata dalla resistenza dipende dal tempo con andamento  $W(t) = R | I |^2 \sin^2(\omega t)$  e ha valor medio temporale

$$W = \frac{R | I |^2}{2}$$

Nel circuito RCL in figura 11 tutti gli elementi sono percorsi dalla stessa corrente e l'equazione 10) mostra che la forza elettromotrice complessa applicata al circuito vale

$$\mathcal{E} = [-i\omega L + R + \frac{i}{\omega C}]I \quad (7.21)$$

Il rapporto  $Z = \mathcal{E}/I$  è l'**impedenza** del circuito RCL in serie, vale

$$Z = R - i\omega L + \frac{i}{\omega C} \quad (7.22)$$

ed è null'altro che la somma delle impedenze dei tre elementi.

Ribadiamo che quando descriviamo le tensioni, le correnti e le cariche come vettori rotanti nel piano complesso, intendiamo che solo le parti reali hanno significato fisico. Ma attenzione! **L'impedenza è un grandezza complessa non rotante, con modulo e fase dotate di significato fisico preciso**: il modulo è il rapporto tra i valori di picco della tensione e della corrente, la fase è lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente.

Poiché il condensatore e l'induttore non dissipano energia, la potenza dissipata dall'intero circuito RCL è quella dissipata nel resistore e vale

$$W = \frac{1}{2}R | I |^2 = \frac{| I | | \mathcal{E} |}{2} \frac{R}{| Z |} = I_{eff} \mathcal{E}_{eff} \cos \phi \quad (7.23)$$

I valori efficaci della corrente e della tensione,  $I_{eff}$  ed  $\mathcal{E}_{eff}$ , sono  $\sqrt{2}$  volte minori dei valori di picco ed **il fattore di potenza**  $\cos \phi = R / | Z |$  è **null'altro che il coseno della fase dell'impedenza**.

## 7.8 Curva di risonanza del circuito RCL

Cominciamo a notare che l'impedenza del circuito RCL in serie, data dall'equazione 22), può essere riscritta nella forma

$$Z = R \left[ 1 - \frac{iL}{R} \left( \omega - \frac{1}{\omega LC} \right) \right] = R \left[ 1 - \frac{i}{\Gamma \omega} (\omega^2 - \omega_0^2) \right]$$

e che il suo modulo quadro vale

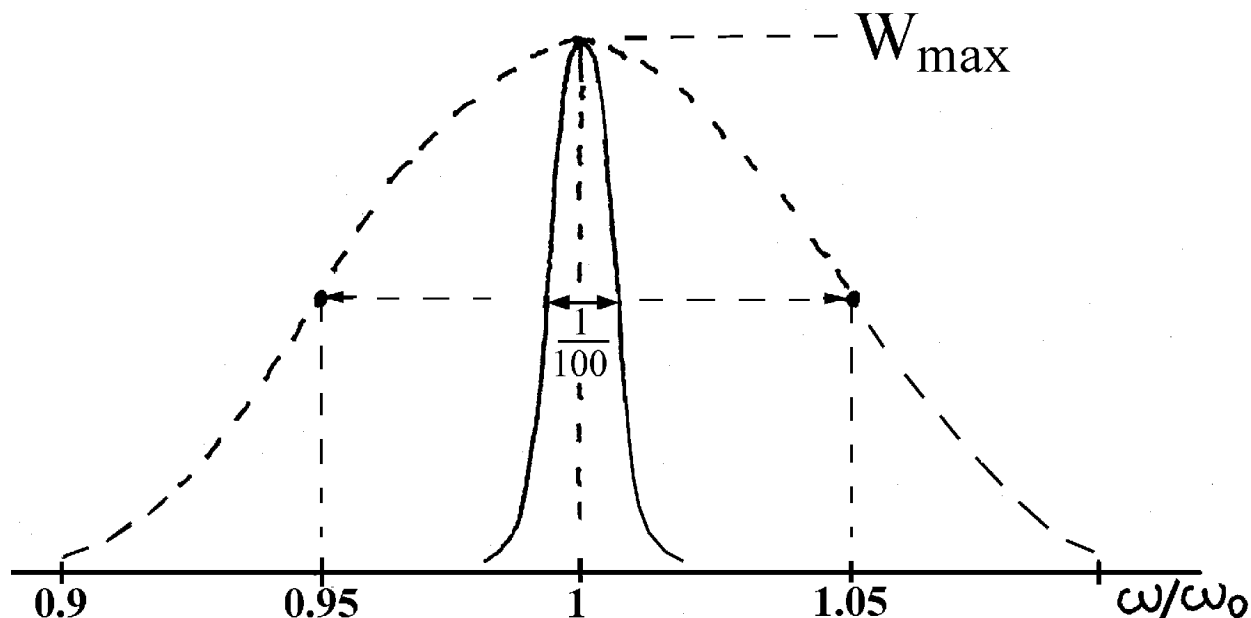
$$|Z|^2 = ZZ^* = R^2 \left[ 1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\Gamma \omega)^2} \right] = R^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma \omega)^2}{(\Gamma \omega)^2}$$



Pertanto il valor medio temporale della potenza assorbita dal circuito RCL alimentato con forza elettromotrice di picco costante e frequenza variabile risulta

$$W(\omega) = \frac{R|I|^2}{2} = \frac{R|\mathcal{E}|^2}{2|Z|^2} = \frac{|\mathcal{E}|^2}{2R} \frac{(\Gamma\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2} \quad (7.25)$$

**Fig. 7.14** Curve di risonanza  $W(\omega)$  per due valori del fattore di merito



Le curve continua e tratteggiata in figura 14 mostrano gli andamenti di  $W(\omega)$  rispettivamente per  $\omega_0/\Gamma = 100$  e per  $\omega_0/\Gamma = 10$ . Entrambe le curve raggiungono il valore massimo  $W_{max} = |\mathcal{E}|^2 / 2R$  per  $\omega = \omega_0$ , ma hanno larghezze a metà altezza inversamente proporzionali ai fattori di merito. Precisamente possiamo dire quanto segue.

- Quando la frequenza  $\omega$  è uguale alla frequenza di risonanza  $\omega_0$  il circuito risuona assorbendo la potenza massima  $|\mathcal{E}|^2 / 2R$ .
- Quando il fattore di merito è grande, come nei casi considerati in figura, la potenza assorbita si riduce alla metà di quella massima per  $\omega = \omega_0 \pm \Gamma/2$ , quindi  $\Gamma$  acquista l'ulteriore significato di **larghezza a metà altezza della curva di risonanza**.

Infine notiamo che per  $\omega \ll \omega_0$  l'induttore gioca un ruolo trascurabile e l'impedenza del circuito si riduce a  $R + i/\omega C$ . In particolare per  $\omega \ll RC$  l'impedenza è ben approssimata da  $i/\omega C$ , ma attenzione: la resistenza gioca sempre un ruolo importante perchè è l'unico elemento a dissipare potenza; la corrente di picco vale  $\approx \mathcal{E}\omega C$  e la potenza dissipata risulta  $W \approx R(\mathcal{E}\omega C)^2/2$ . Invece, per  $\omega \gg \omega_0$  gioca un ruolo trascurabile il condensatore e l'impedenza del circuito si riduce a  $R - i\omega L$ . In particolare per  $\omega \gg R/L$  l'impedenza è ben approssimata da  $-i\omega L$ , la corrente di picco vale  $\approx \mathcal{E}/\omega L$  e la potenza dissipata risulta  $W \approx R(\mathcal{E}/\omega L)^2/2$ .

## ESERCIZI

1) Un circuito RCL in serie con  $R = 0.2 \Omega$ ,  $C = 1 \mu F$  e  $L = 100 \mu H$ , è alimentato con tensione di picco di  $10 V$ . Calcolare: a) la frequenza di risonanza, il fattore di merito e la larghezza della risonanza, b) la corrente e la potenza assorbita in piena risonanza, c) la corrente, la potenza assorbita e la fase dell'impedenza quando la frequenza vale  $\omega_0/10$ , d) la corrente, la potenza assorbita e la fase dell'impedenza quando la frequenza vale  $10 \omega_0$ . e) Poi dire quale elemento circuitale può essere trascurato nella situazione c) e quale nella situazione d).

2) Considerare un circuito RCL in serie con  $R = 0.02 \Omega$ ,  $C = 50 pF$  ed  $L = 0.2 \mu H$  ed eseguire i calcoli richiesti nell'esercizio precedente.

3) In un circuito RCL in serie con morsetti in corto, due massimi di corrente successivi sono raggiunti ai tempi  $t = 0$  e  $t = 0.1 s$  e hanno i valori di  $10 A$  e  $5 A$  rispettivamente. La frequenza di oscillazione vale  $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$  e l'energia del circuito al tempo zero è di  $10 J$ . Calcolare: a) il coefficiente di autoinduzione, la resistenza, la capacità ed il fattore di merito del circuito. Poi pensare che il circuito sia alimentato con tensione di picco di  $100 V$  e frequenza di  $2 \cdot 10^4 s^{-1}$  e calcolare: b) l'impedenza del circuito, c) la potenza assorbita, d) i moduli delle tensioni resistiva, induttiva e capacitiva.

4) Un solenoide toroidale di circonferenza media  $10 cm$  è costituito da  $10^3$  spire di area  $1 cm^2$  fatte con filo di rame di diametro  $0.1 mm$ . a) Calcolare il coefficiente di autoinduzione e la resistenza del sistema. b) Poi si pensi che gli estremi dell'avvolgimento, collegati ad una batteria da  $10 V$  nel passato, siano messi in corto istantaneamente al tempo zero e calcolare l'energia magnetica residua dopo  $1 s$ .

5) Con un circuito RCL si vuole produrre un campo elettrico armonico, di frequenza  $\omega = 10^8 s^{-1}$  ed ampiezza di picco  $100 V/m$ , tra le armature di un condensatore di sezione  $10 cm^2$ , distanti  $4 mm$  e poste nel vuoto. a) Calcolare la corrente di picco. b) Scegliere il valore dell'induttanza in modo che il circuito risuoni proprio alla frequenza voluta. c) Calcolare l'energia immagazzinata nel circuito nelle condizioni di lavoro richieste. d) Descrivere i flussi di energia nel sistema.

# Capitolo 8

## Circuiti magnetici

In questo capitolo studiamo i **materiali magnetici duri**, usati per costruire magneti permanenti, ed i **materiali magnetici dolci**, usati per costruire elettromagneti, induttori, schermi magnetici e trasformatori di tensione.

### 8.1 Misure dei cicli di isteresi dei ferromagneti

Per studiare le proprietà statiche dei materiali magnetici possiamo usare la configurazione sperimentale schematizzata in figura 1. Un solenoide toroidale

Fig. 8.1

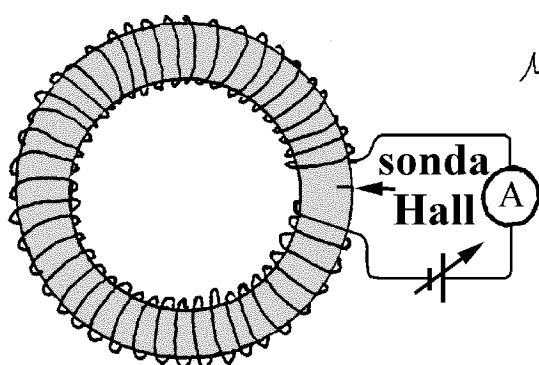
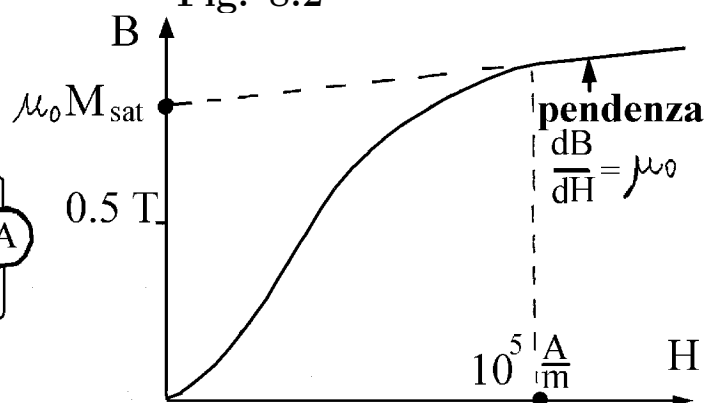


Fig. 8.2



con sezione trasversa di area  $S$ , circonferenza media di lunghezza  $l$  e numero di spire  $N$ , viene riempito omogeneamente con il materiale magnetico oggetto di studio. Viene fatta passare la corrente  $I$  nell'avvolgimento e, mediante una sonda Hall inserita in un alloggiamento sottilissimo, viene misurato  $B$ . Sappiamo che la circolazione di  $\mathbf{H}$  lungo un percorso che attraversa tutte le spire vale  $NI$ , comunque il solenoide sia riempito. E, poiché il materiale è omogeneo, possiamo valutare l'intensità del campo  $\mathbf{H}$  sulla circonferenza media come

$$H = \frac{NI}{l} \quad (8.1)$$

Ora pensiamo che inizialmente la ciambella non sia magnetizzata e la corrente sia nulla, ovvero pensiamo che lo stato magnetico iniziale del materiale sia individuato dal punto  $(0, 0)$  del piano  $(H, B)$ . Poi facciamo aumentare

la corrente per passi successivi, leggiamo  $I$  sull'amperometro, calcoliamo  $H$  con l'equazione 1), misuriamo  $B$  con la sonda Hall e riportiamo i risultati nel piano  $(H, B)$ , come in figura 2. La curva ottenuta prende il nome di **curva di prima magnetizzazione**. La sua pendenza  $dB/dH$  aumenta all'aumentare di  $H$  sino a raggiungere valori che possono essere enormemente maggiori di  $\mu_0$ , poi diminuisce sino a raggiungere il valore asintotico  $\mu_0$ . Ricordando che  $B = \mu_0(H + M)$ , possiamo dedurre che  $M$  raggiunge un valore asintotico poi smette di aumentare all'aumentare di  $H$ . L'intersezione dell'asintoto con l'asse  $B$  fornisce il valore asintotico  $\mu_0 M_{sat}$ , detto **campo di saturazione**. Raggiunta la saturazione, procediamo a misure di  $H$  e  $B$  per valori decrescenti della corrente sino a raggiungere la saturazione per valori di  $H$  negativi, poi torniamo ad aumentare gradualmente la corrente e continuiamo a misurare  $H$  e  $B$  sino a raggiungere nuovamente la saturazione. La curva chiusa simmetrica così ottenuta, mostrata in figura 3, prende il nome di **ciclo di isteresi completo**. I punti del piano  $(H, B)$  interni al

Fig. 8.3

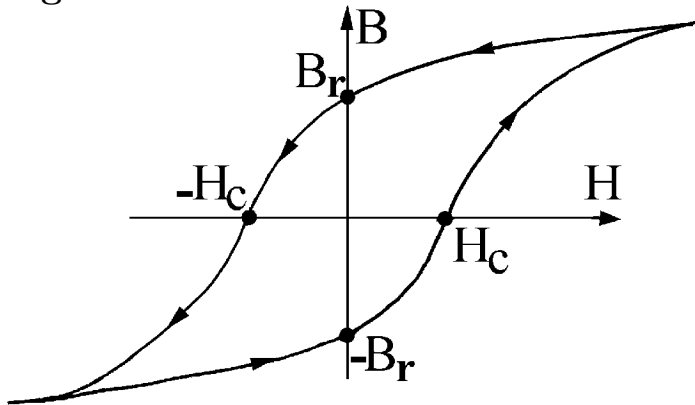
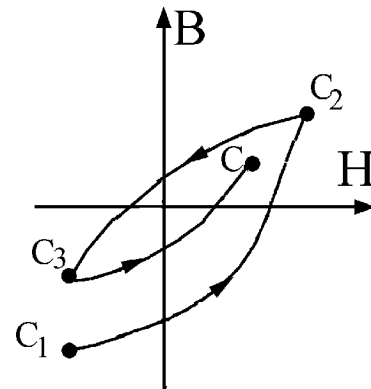


Fig. 8.4



ciclo di isteresi completo individuano possibili stati magnetici del materiale. Procedendo come mostrato in figura 4, possiamo portare il materiale in uno qualunque di tali stati. Ad esempio, per raggiungere il punto  $C$  a partire dal punto  $C_1$ , aumentiamo la corrente sino a raggiungere un punto  $C_2$  scelto con un po' di oculatezza, poi diminuiamo la corrente sino a raggiungere un punto  $C_3$ , torniamo ad aumentare la corrente sino a raggiungere un intorno di  $C$  e, se non siamo soddisfatti, proseguiamo con passetti suggeriti dall'esperienza dei passi precedenti. Questa procedura viene usata anche per smagnetizzare il materiale, ovvero per portarlo nel punto  $(0, 0)$  del piano  $(H, B)$ .

Dalle misure dei cicli di isteresi completi si ottengono le seguenti grandezze caratteristiche dei materiale magnetici.

- **Campo di saturazione**  $\mu_0 M_{sat}$ . Si determina tracciando gli asintoti del ciclo di isteresi completo sino ad incontrare l'asse  $B$ .
- **Campo residuo**  $B_r$ . Si legge nei punti di intersezione del ciclo di isteresi completo con l'asse  $B$ , come mostrato in figura 3. Evidentemente il campo residuo è sempre minore del campo di saturazione.
- **Campo coercitivo**  $H_c$ . Si legge nei punti di intersezione del ciclo di

isteresi completo con l'asse  $H$ . Segno a parte è il campo  $H$  che, a partire da condizioni di saturazione, deve essere applicato per compensare esattamente  $M$  e ridurre  $B$  a zero.

- **Permeabilità magnetica differenziale massima.** Si ottiene dividendo per  $\mu_0$  la pendenza  $dB/dH$  del ciclo di isteresi completo, valutata nei punti di attraversamento dell'asse  $H$ .

- **Area del ciclo di isteresi completo.** Può essere valutata per integrazione grafica. Approssimativamente risulta uguale a  $4B_rH_c$ .

Oltre a tali grandezze è necessario conoscere la conducibilità elettrica e la **temperatura di Curie**  $T_C$ , temperatura al di sopra della quale il materiale diventa un normale paramagnete con permeabilità poco diversa dall'unità. Aggiungiamo che, per applicazioni in campo radiotecnico, è importante conoscere anche la **frequenza di taglio** delle proprietà magnetiche, frequenza che viene misurata con il metodo descritto nel paragrafo 4.

## ESERCIZI

1) Un materiale ha campo di saturazione  $\mu_0 M_{sat} = 1.2 T$ , campo coercitivo  $H_c = 4 \cdot 10^4 A/m$ , campo residuo  $B_r = 1 T$  e permeabilità differenziale massima  $10^4$ . Disegnare il ciclo di isteresi completo e mostrare che la sua area è una densità di energia.

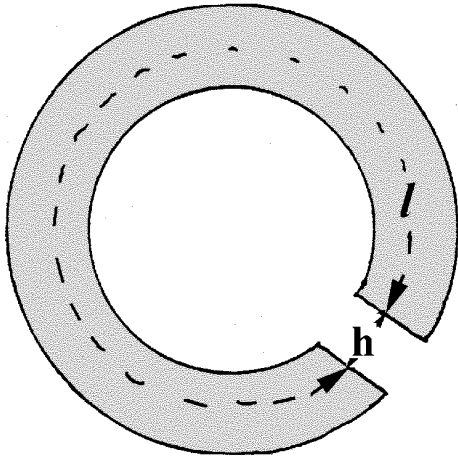
## 8.2 Magneti permanenti

I materiali con grandi campi coercitivi, grandi campi di saturazione ed alte temperature di Curie sono adatti a costruire magneti permanenti e vengono indicati genericamente come **ferromagneti duri**. Le grandezze caratteristiche di alcuni ferromagneti duri molto usati sono riportate in tabella.

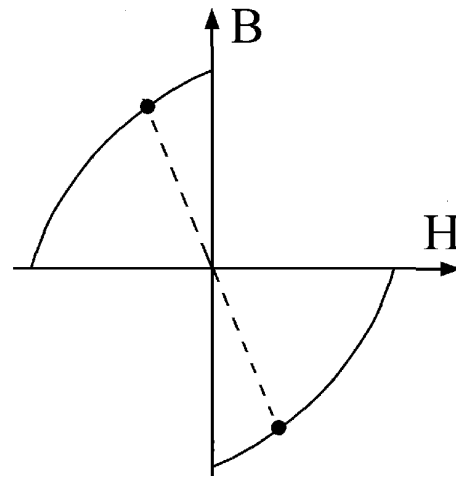
MATERIALE	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	$B_r$ (T)	$H_c$ (A/m)	$T_C$ (K)
Acciaio al carbonio	0.9	0.7	5000	1000
Ticonal	1.3	1.2	$5 \cdot 10^4$	900
Samario-Cobalto	0.9	0.9	$7 \cdot 10^5$	600
Neodimio-Ferro-Boro	1.3	1.3	$10^6$	1000

Ora pensiamo che una ciambella ferromagnetica manchi di una fettina di spessore  $h$ , come in figura 5a), e diamo il nome di **gap** o **traferro** allo spazio lasciato vuoto dalla rimozione della fettina. Pensiamo che in passato la ciambella sia stata avvolta con spire distribuite su tutta la lunghezza  $l$  della parte piena, sia stata scaldata sopra la temperatura di Curie e sia stata lasciata raffreddare in presenza di una corrente tanto intensa da mantenere ogni regione in condizioni di saturazione. Domandiamo: quali campi sono presenti dopo la rimozione dell'avvolgimento? Sappiamo che in assenza di corrente elettrica la circolazione di  $\mathbf{H}$  è nulla, quindi i valori di  $H$  nel materiale e nel

Fig. 8.5: a)



b)



gap sono tali che

$$Hl + H_{gap}h = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{gap} = -Hl/h$$

Ma  $\mathbf{B}$  si conserva nell'attraversare l'interfaccia materiale-gap, quindi  $B$  è uguale a  $\mu_0 H_{gap}$  sia nel gap, sia nella ciambella, e ciò comporta che  $H$  e  $B$  nella ciambella sono legati dalla relazione

$$B = -\mu_0 H \frac{l}{h}$$

rappresentata graficamente dal segmento tratteggiato in figura 5b). In condizioni ottimali lo stato magnetico è rappresentato da uno dei punti di intersezione del segmento con il ciclo di isteresi completo, ma in generale il materiale tende a smagnetizzarsi ed il suo stato magnetico evolve più o meno lentamente verso l'origine. Tuttavia il processo di smagnetizzazione dei materiali considerati in tabella è lentissimo a temperatura ambiente, inapprezzabile sull'arco di anni, tanto da poter ritenere che lo stato magnetico di un buon magnete rimanga permanentemente sul ciclo di isteresi completo.

Per barre cilindriche il calcolo dei campi presenti dopo la rimozione della corrente che le aveva portate in saturazione non è semplice in generale, ma diventa semplice per barre di Samario-Cobalto e di Neodimio-Ferro-Boro. Con ottima approssimazione, queste barre rimangono permanentemente magnetizzate con  $M = M_{sat}$ , quindi il campo  $\mathbf{H}$  è il campo prodotto dalle densità superficiali di "carica magnetica"  $\pm M_{sat}$  localizzate sulle basi e può essere calcolato con un modesto calcolatore. In particolare i valori di  $B$  sull'asse sono dati dalle equazioni 4.17) e 4.17').

## ESERCIZI

1) Una ciambella di sezione  $10 \text{ cm}^2$  e circonferenza media di  $50 \text{ cm}$  manca di una fetta di spessore  $5 \text{ mm}$ . Il materiale della ciambella ha campo coercitivo  $10^5 \text{ A/m}$ , campo residuo  $0.5 \text{ T}$  e campo di saturazione  $\mu_0 M_{sat} = 0.7 \text{ T}$ . La ciambella è stata portata in saturazione da un avvolgimento percorso da

corrente, poi l'avvolgimento è stato rimosso. Valutare approssimativamente: a) i campi  $H$  e  $B$  nel materiale, b) i campi  $H$  e  $B$  nel gap, c) la densità lineare di corrente sul mantello.

2) La ciambella in figura 5 ha sezione di  $25 \text{ cm}^2$ , gap di  $2 \text{ mm}$ , circonferenza media di  $50 \text{ cm}$  ed è avvolta da 2000 spire. La misura di  $B$  nel gap in funzione della corrente conduce ai risultati riportati in tabella, ottenuti in ordine temporale da sinistra a destra.

$I (A)$	0	0.1	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0.1	-0.1
$B (T)$	-0.1	0	0.2	0.6	0.85	0.4	0.2	0.1	0
$H(A/m)$									

a) Aggiungere alla tabella i valori di  $H$  nel materiale, b) riportare in grafico  $B$  in funzione di  $H$ , c) valutare il campo residuo, il campo coercitivo ed il campo di saturazione.

3) La ciambella in figura 5 è magnetizzata permanentemente con  $M = 10^6 \text{ A/m}$ , ha circonferenza media di  $1 \text{ m}$  e gap di  $1 \text{ cm}$ . Calcolare: a) i campi  $B$  ed  $H$  nel materiale, b) la densità lineare di corrente di mantello, c) le densità superficiali di “carica magnetica”.

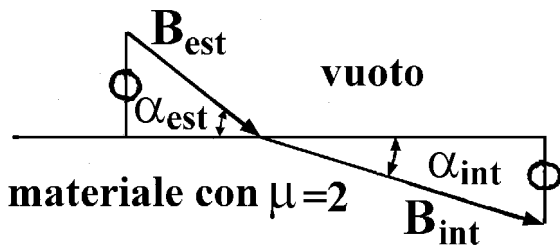
### 8.3 Campi MAGNETICI nei materiali lineari

I materiali con campi coercitivi molto piccoli e con permeabilità molto grandi costituiscono la classe dei **materiali magnetici dolci**, ben rappresentata dai materiali considerati nella tabella seguente. In prima approssimazione i cicli di isteresi dei materiali considerati in tabella si riducono a rette passanti per l'origine del piano  $(H, B)$  con pendenza  $\mu_{max}$ . Ma attenzione: si deve intendere che le permeabilità  $\mu_{max}$  riportate in tabella si riferiscono a situazioni quasi magnetostatiche. Per campi oscillanti, le permeabilità diminuiscono notevolmente all'aumentare delle frequenze di oscillazione; a frequenze di interesse radiotecnico solo alcune ferriti conservano alta permeabilità.

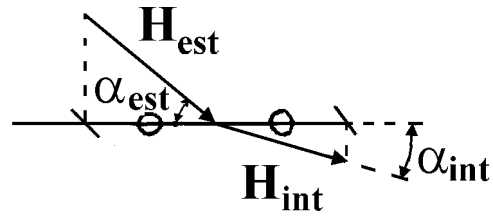
MATERIALE	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	$B_r$ (T)	$H_c$ (A/m)	$\mu_{max}$	$\nu$ taglio (MHz)
Ferrosilicio	1.8	1.1	40	10000	0.1-100
Ferriti	0.4	0.05	20	2000	
Mumetal	0.7	0.6	4	70000	
Supermalloy	0.7	0.1	0.1	1000000	

Per prepararci a studiare alcune applicazioni dei materiali magnetici dolci cominciamo a considerare i campi MAGNETICI  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  alle interfacce vuoto-materiale. In figura 6, per illustrare con chiarezza la situazione, abbiamo considerato il caso non realistico di un materiale lineare con  $\mu = 2$ , ed abbiamo disegnato i due campi in uno stesso punto dell'interfaccia. Abbiamo

Fig. 8.6: a)



b)



indicato con  $\alpha_{est}$  ed  $\alpha_{int}$  gli angoli di radenza formati dal campo MAGNETICO con il piano d'interfaccia, all'esterno ed all'interno del materiale, ma a contatto con l'interfaccia. Come al solito scriviamo campo MAGNETICO con caratteri maiuscoli per intendere la sovrapposizione del campo di stimolo, ad esempio quello generato da una bobina percorsa da corrente, e del campo di risposta prodotto dal materiale. Ricordiamo che stiamo considerando materiali lineari ed isotropi, quindi  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$  hanno lo stesso verso sia all'interno che all'esterno, con  $\mathbf{B}_{est} = \mu_0 \mathbf{H}_{est}$  e  $\mathbf{B}_{int} = \mu \mu_0 \mathbf{H}_{int}$ . Sappiamo che sull'interfaccia si conservano la proiezione normale di  $\mathbf{B}$ , perché  $\mathbf{B}$  è solenoidale, e la proiezione parallela di  $\mathbf{H}$ , perché le correnti di conduzione e di polarizzazione sono distribuite nel volume. Dalla figura 6 vediamo che

$$B_{est} \sin \alpha_{est} = B_{int} \sin \alpha_{int} \quad , \quad H_{est} \cos \alpha_{est} = H_{int} \cos \alpha_{int}$$

Dividendo la prima per la seconda equazione otteniamo

$$\tan \alpha_{est} = \mu \tan \alpha_{int} \quad (8.2)$$

quindi possiamo concludere che le linee di flusso del campo MAGNETICO sono tanto più deflesse all'interfaccia quanto più grande è  $\mu$ . In particolare **quando  $\mu$  è grandissimo tutte le linee di flusso del campo MAGNETICO, tranne quelle che incidono quasi normalmente all'esterno, sono quasi parallele all'interfaccia nel materiale.** Ad esempio, per permeabilità magnetica  $\mu = 10000$ , l'equazione 2) mostra che le linee di flusso incidenti con  $\alpha_{est}$  minore di  $89.7^\circ$  hanno  $\alpha_{int}$  minore di  $1^\circ$ . Ciò ha una conseguenza molto importante: **quando il campo  $\mathbf{B}_{est}$  non è quasi normale all'interfaccia il campo  $\mathbf{B}_{int}$  è quasi radente all'interfaccia con intensità molto maggiore di  $B_{est}$ .** Infatti la componente parallela di  $\mathbf{H}$  si conserva sempre e, nel caso considerato, è quasi uguale ad  $H_{int}$ , quindi

$$H_{int} \approx H_{est} \cos \alpha_{est} \implies B_{int} = \mu \mu_0 H_{int} = \mu \mu_0 H_{est} \cos \alpha_{est} = \mu B_{est} \cos \alpha_{est}$$

Ad esempio, per  $\mu = 10000$ ,  $B_{int}$  è 5000 volte maggiore di  $B_{est}$  quando  $\alpha_{est} = 60^\circ$ , e rimane 175 volte maggiore di  $B_{est}$  anche quando  $\alpha_{est} = 89^\circ$ .

## ESERCIZI

1) Un materiale ideale ha campo coercitivo nullo e permeabilità che passa bruscamente da 1000 all'unità quando  $|B|$  supera  $0.7 T$ . a) Disegnare il



ciclo di isteresi, b) valutare il campo di saturazione, c) individuare l'intervallo dell'asse  $H$  entro il quale il materiale si comporta in modo lineare.

2) Sul materiale descritto nell'esercizio 1) il campo MAGNETICO incide con angolo di radianza di  $85^\circ$  e intensità  $10^{-4} T$ . Calcolare: a) l'angolo di radianza interno, b)  $H$  e  $B$  nel materiale. c) Verificare che il materiale non è in saturazione.

3) Sull'interfaccia tra il materiale considerato nell'esercizio 1) ed il vuoto il campo MAGNETICO interno ha intensità  $0.5 T$  ed angolo di radianza  $\alpha_{int} = 60^\circ$ . Calcolare  $\alpha_{est}$  e  $B$  nel vuoto.

4) Una pallina di diametro  $1 cm$  ha permeabilità magnetica  $10^4$  fino a quando il campo MAGNETICO interno non eccede  $0.6 T$ . La pallina è posta in un campo di stimolo da  $0.1 T$  con gradiente di campo di  $10^{-3} T/m$ . Calcolare: a) i campi MAGNETICI  $H$  e  $B$  al centro della pallina, b) il momento di dipolo indotto e la forza agente sulla pallina.

## 8.4 “Legge” di Hopkinson, circuiti magnetici

Consideriamo una ciambella di circonferenza media  $l$  costruita con un materiale lineare, omogeneo ed isotropo di permeabilità grande, ad esempio  $\mu = 10000$ . Pensiamo che la ciambella sia avvolta con  $N$  spire percorse da corrente  $I$  e domandiamo: quale campo MAGNETICO agisce all'interno? Se l'avvolgimento fosse ben in contatto con il mantello e fosse distribuito

Fig. 8.7

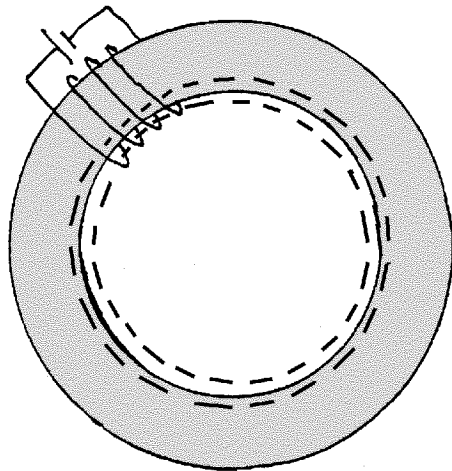
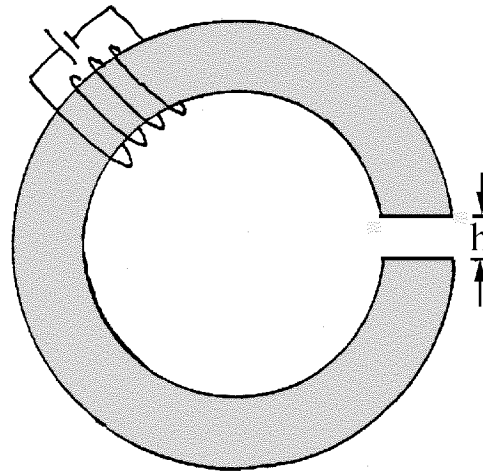


Fig. 8.8



uniformemente su tutta la ciambella, l'equazione 1) consentirebbe di rispondere  $B = \mu\mu_0 NI/l$ . Quando l'avvolgimento è tutto da una parte e ha spire distanziate dal mantello come in figura 7, la risposta rimane valida, ma il ragionamento necessario per giustificarla richiede un po' di attenzione. Cominciamo a ribadire che la circolazione del campo  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  lungo un percorso concatenato con tutte le spire vale  $NI$ , qualunque sia il percorso, comunque sia fatto l'avvolgimento e qualunque sia la permeabilità dei mezzi interposti.

Poi ricordiamo che nel passare dal vuoto al materiale le linee di flusso del campo MAGNETICO diventano quasi parallele all'interfaccia, con la conseguenza che  $B_{int}$  diventa molto maggiore di  $B_{est}$ . Ciò significa che il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una sezione della ciambella è molto maggiore del flusso di  $\mathbf{B}$  uscente dal mantello della ciambella, detto **flusso disperso**. Trascurando il flusso disperso e tenendo presente che  $\mathbf{B}$  è solenoidale, dobbiamo ammettere che lo stesso flusso di  $\mathbf{B}$  attraversa tutte le sezioni della ciambella. E poiché la ciambella è omogenea e ha sezione uniforme, dobbiamo concludere che  $B$  ed  $H$  sulla circonferenza media hanno intensità costanti, precisamente

$$H = \frac{NI}{l} \quad , \quad B = \mu\mu_0 \frac{NI}{l} \quad (8.3)$$

Insistiamo nel dire che l'avvolgimento può essere distribuito o concentrato, a contatto o lasco, avere poche spire e grande corrente o tante spire e piccola corrente, per il calcolo dei campi interni alla ciambella ciò che conta è il prodotto  $NI$  (in approssimazione di flusso disperso nullo).

Ora, con riferimento alla figura 8, pensiamo che una fettina della ciambella sia stata rimossa; in altre parole pensiamo che il circuito magnetico sia "chiuso" su un sottile gap di spessore  $h$ . Indichiamo con  $l$  la lunghezza del percorso interno sulla circonferenza media, usiamo l'indice  $int$  per i campi entro la ciambella e notiamo che

$$B_{gap} = B_{int} = B \quad , \quad NI = H_{int}l + H_{gap}h$$

La prima equazione vale perché  $\mathbf{B}$  è solenoidale con linee di flusso normali alle interfacce che delimitano il gap, la seconda dice che  $NI$  è la circolazione di  $\mathbf{H}$  lungo un percorso concatenato con tutte le spire. Sostituendo  $H_{int}$  con  $B/\mu\mu_0$  e  $H_{gap}$  con  $B/\mu_0$  otteniamo

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l + \mu h}$$

Ciò mostra che l'apertura del gap può far diminuire moltissimo  $B$ , anche quando  $h$  è molto piccolo rispetto ad  $l$ . Ad esempio  $B$  si riduce di un fattore 100 quando asportiamo una fettina di spessore 1 *cm* in una ciambella di circonferenza 1 *m* e permeabilità 10000.

Per studiare circuiti magnetici con rami in serie e in parallelo, come quelli schematizzati nelle figure 9 e 10, conviene introdurre un linguaggio analogo a quello usato per i circuiti elettrici. Il ruolo della corrente viene preso dal flusso di  $\mathbf{B}$  e la prima legge di Kirchhof viene sostituita con la regola: **la somma algebrica dei flussi di  $\mathbf{B}$  entranti in un nodo circuitale è nulla**, valida in approssimazione di flusso disperso nullo. Il ruolo della tensione  $V$  ai capi di un ramo del circuito viene preso dalla **tensione magnetica**  $V_m$ , definita come integrale di percorso di  $\mathbf{H}$ , proprio come  $V$  è l'integrale di percorso di  $\mathbf{E}$ . Il ruolo della forza elettromotrice viene preso dalla **forza**

Fig. 8.9

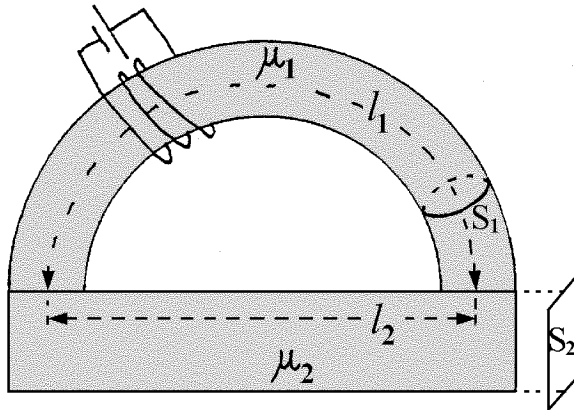
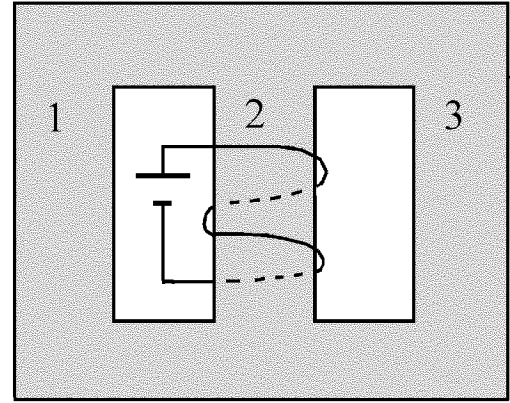


Fig. 8.10



magnetomotrice  $NI$  e la seconda regola di Kirchhoff viene sostituita con: **la somma algebrica delle tensioni magnetiche nei lati di una maglia circuitale è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia.** Infine il ruolo della legge di Ohm viene preso dalla

$$\text{legge di Hopkinson} \quad V_m = \mathcal{R}\Phi \quad (8.4)$$

che lega la tensione magnetica ai capi di un ramo al flusso  $\Phi$  del campo  $\mathbf{B}$  nel ramo; la grandezza  $\mathcal{R}$  prende il nome di **riluttanza**. Per un ramo di sezione  $S$  uniforme, lunghezza  $l$  e permeabilità  $\mu$ , possiamo scrivere

$$V_m = Hl = \frac{Bl}{\mu_0\mu} = \frac{l}{\mu_0\mu S}\Phi$$

quindi la riluttanza del ramo vale

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0\mu S} \quad (8.5)$$

Nel caso considerato in figura 9, lo stesso flusso  $\Phi$  percorre i due rami e possiamo determinarlo osservando che  $NI = V_{m1} + V_{m2} = [\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2]\Phi$ . Dunque **due rami in serie sono equivalenti ad un unico ramo con riluttanza uguale alla somma delle riluttanze dei due rami.**

Nel caso considerato in figura 10 il flusso  $\Phi_2$  attraverso il ramo centrale si ripartisce tra i rami esterni, quindi  $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$ . Indicata con  $V_{m1} = V_{m3}$  la tensione magnetica ai capi dei due rami esterni si vede che

$$\Phi_1 = \frac{V_{m1}}{\mathcal{R}_1} \quad , \quad \Phi_3 = \frac{V_{m1}}{\mathcal{R}_3} \quad , \quad \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 = V_{m1} \left[ \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} \right]$$

Quindi possiamo calcolare la riluttanza equivalente ai due rami esterni con la regola: **due rami in parallelo equivalgono ad un unico ramo con riluttanza uguale all'inverso della somma dagli inversi delle due riluttanze.** Calcolata la riluttanza  $\mathcal{R}_{13}$  equivalente ai due rami in parallelo basta tenere presente che  $NI = \Phi_2(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{13})$  per calcolare  $\Phi_2$ .

Lasciamo agli esercizi l'analisi di alcune configurazioni tipiche degli elettromagneti e passiamo a descrivere un metodo sperimentale che consente di

Fig. 8.11

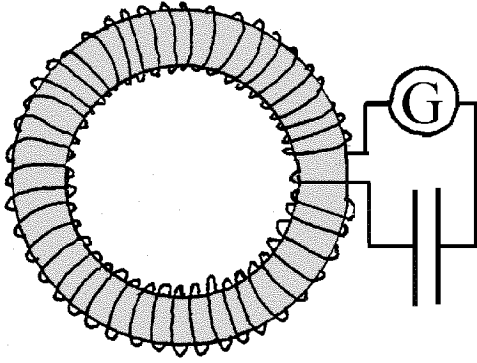
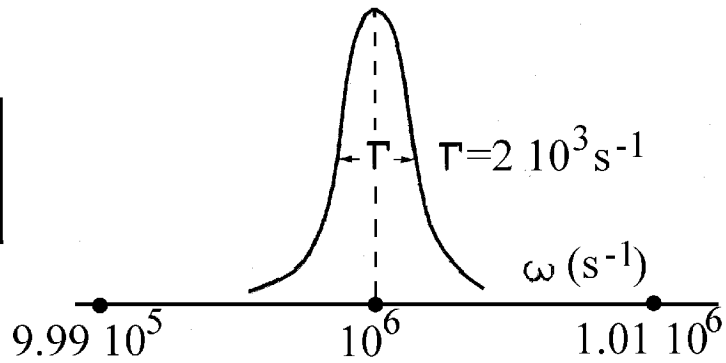


Fig. 8.12



misurare l'induttanza  $L$  e la resistenza  $R$  di un induttore. Per dare concretezza al discorso, pensiamo all'induttore schematizzato in figura 11: un anello costituito da un materiale lineare di permeabilità statica  $\mu = 2000$  e conducibilità elettrica trascurabile, con sezione trasversa di diametro  $d_{nucleo} = 6 \text{ mm}$ , circonferenza media  $l = 9 \text{ cm}$ , avvolto da  $N = 50$  spire di rame di diametro  $d_{filo} = 1 \text{ mm}$ . Se tale induttore fosse alimentato con tensione dipendente dal tempo molto lentamente avrebbe induttanza e resistenza date da

$$L_0 = \mu\mu_0 \frac{N^2 \pi (d_{nucleo}/2)^2}{l} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ H} \quad , \quad R_0 = \frac{1}{g} \frac{N \pi (d_{nucleo} + d_{filo})}{\pi (d_{filo}/2)^2} \approx 0.024 \Omega$$

Ora pensiamo di aver inserito l'induttore in serie ad un condensatore di capacità ben calibrata, di aver alimentato il circuito con un generatore di forza elettromotrice  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t)$ , con  $\mathcal{E}$  indipendente dalla frequenza, e di aver misurato la curva di risonanza del circuito. Ad esempio pensiamo che con condensatore di capacità  $C = 2 \cdot 10^{-9} \text{ F}$  la curva di risonanza abbia picco alla frequenza  $\omega_0 = 10^6 \text{ s}^{-1}$  e larghezza  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , come mostrato in figura 12. Ricordando che nel circuito RCL in serie la frequenza di risonanza e la larghezza di risonanza valgono  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  e  $\Gamma = R/L$ , si vede che  $L = 1/\omega_0^2 C = 5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$  e  $R = 1 \Omega$  hanno valori ben diversi da quelli quasi statici. E se ripetessimo le misure con un condensatore di capacità diversa otterremmo valori ancora diversi. Ciò è dovuto alle seguenti ragioni.

- La permeabilità magnetica dei materiali conserva il valore statico solo a bassissime frequenze, poi prende a diminuire all'aumentare della frequenza; a frequenze maggiori di qualche  $MHz$  conserva valori ben maggiori dell'unità solo in materiali come le ferriti. Il fatto che l'induttanza misurata risulti quattro volte minore di quella quasi statica dice che alla frequenza  $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$  la permeabilità del nucleo è 500 e non 2000. Lo studio sperimentale della permeabilità  $\mu(\omega)$  dei materiali a frequenze elettrotecniche e radiotecniche è basato proprio sul metodo descritto: le curve di risonanza misurate per vari valori della capacità inserita nel circuito conducono a

$$\mu(\omega) = \frac{lL(\omega)}{\mu_0 N^2 S}$$

- La resistenza  $R$  dell'avvolgimento dipende dalla frequenza per due ragioni che esporremo in dettaglio nei prossimi capitoli: l'effetto pelle e l'emissione di radiazione elettromagnetica. Il primo è dovuto al fatto che la corrente alternata si distribuisce in uno strato di pelle del conduttore tanto più sottile quanto più grande è  $\omega$ . Il secondo insorge perché le correnti di alta frequenza, oltre a dissipare energia per effetto Joule nello strato di pelle, emettono energia nello spazio. Per queste ragioni la resistenza dell'induttore ottenuta dalla curva di risonanza in figura 12 risulta più di 40 volte maggiore della resistenza in continua.

Infine diciamo che il metodo di misura esposto viene usato anche per misure di capacità. A tale scopo basta porre un induttore vuoto e ben calibrato in serie al condensatore di capacità incognita, alimentare il circuito con un generatore che fornisca forza elettromotrice di picco indipendente dalla frequenza e far variare la frequenza sino a raggiungere la piena risonanza.

### ESERCIZI

1) Una ciambella di un materiale magnetico lineare ha sezione  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ , circonferenza media  $1\text{ m}$  ed è avvolta con 10 spire di filo di rame percorse dalla corrente di  $5\text{ A}$ . Nella ciambella il campo  $B$  ha valor medio di  $0.5\text{ T}$ . Calcolare: a) la permeabilità magnetica del materiale, b) l'energia magnetica immagazzinata nella ciambella. Poi pensare che una fetta di ciambella di spessore  $1\text{ cm}$  venga asportata mantenendo invariata la corrente e calcolare: c) i campi  $B$  ed  $H$  nel materiale, d) l'energia magnetica nel gap.

2) Un anello toroidale di sezione  $2\text{ cm}^2$  e circonferenza media  $110\text{ cm}$ , è avvolto con 1000 spire di filo di rame di diametro  $1\text{ mm}$ . Nel caso che l'anello sia vuoto calcolare: a) l'induttanza del sistema, b) la corrente quando l'avvolgimento viene alimentato con forza elettromotrice armonica di frequenza  $50\text{ Hz}$  e valore di picco di  $310\text{ V}$  (valori della rete elettrica in Europa), c) la potenza dissipata in tali condizioni. Poi pensare che l'anello sia costituito da un materiale magnetico di permeabilità 1000 alla frequenza di rete e rispondere nuovamente alle domande a), b) e c).

Fig. 8.13

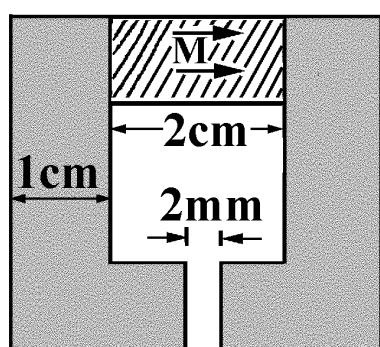
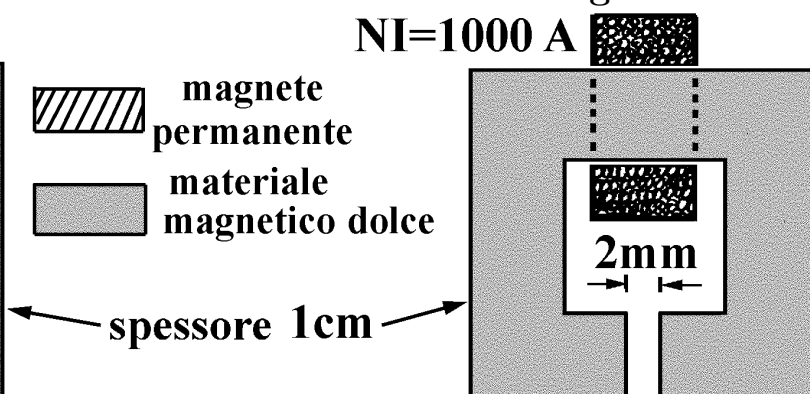


Fig. 8.14



3) Una barra cilindrica permanentemente magnetizzata con  $M = 10^6\text{ A/m}$  viene inserita nella struttura mostrata in figura 13, costruita con un materiale

magnetico lineare di permeabilità 10000. La sezione del circuito magnetico è quadrata con lato di 1 cm. a) Disegnare le linee di flusso di  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  nel magnete, nel materiale lineare e nel gap. b) Calcolare  $H$  e  $B$  nel magnete, nel materiale lineare e nel gap.

4) L'elettromagnete in figura 14 differisca dal sistema in figura 13 solo per la sostituzione del magnete con una barra di uguali dimensioni e permeabilità 10000, avvolta da una bobina di forza magnetomotrice 1000 A. a) Disegnare le linee di flusso di  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  nel materiale lineare e nel gap. b) Calcolare  $H$  e  $B$  nel materiale lineare e nel gap.

5) Nel circuito magnetico considerato in figura 10 il ramo centrale ha riluttanza  $10^4 A/Wb$  ed è avvolto con 100 spire percorse dalla corrente di 10A. I due rami laterali hanno riluttanze uguali, pari a  $2 \cdot 10^4 A/Wb$ . Calcolare i flussi di  $\mathbf{B}$  nei tre rami.

6) Nel circuito considerato in figura 11 l'induttore è vuoto e ha induttanza  $L = 2 \cdot 10^{-7} H$  ben calibrata. La curva di risonanza del circuito ha picco alla frequenza  $\nu = 1 Mhz$  e ha larghezza  $\Gamma = 10^5 s^{-1}$ . Calcolare: a) la capacità del condensatore, b) la potenza dissipata in condizioni di piena risonanza.

7) Un cilindro di permeabilità 2000, diametro interno 3 cm e lunghezza 5 cm è avvolto da 250 spire di filo di rame. Valutare approssimativamente l'induttanza del sistema.

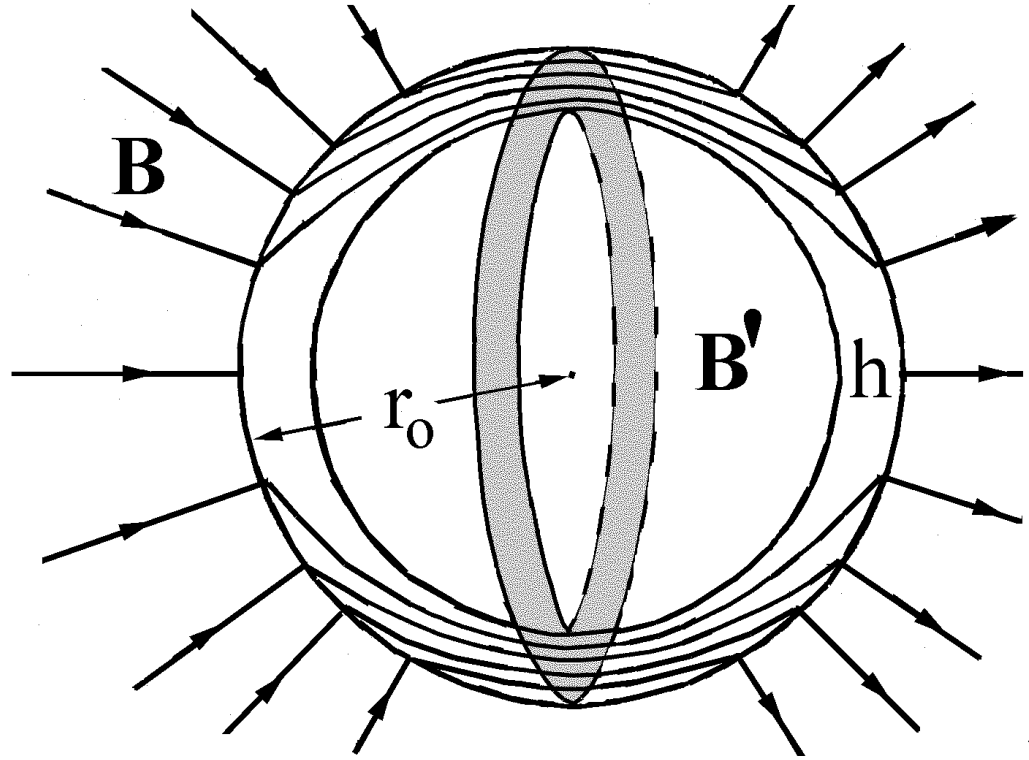
## 8.5 Schermaggio magnetico

Nel paragrafo 4.12 abbiamo visto che una sfera di altissima permeabilità magnetica risponde al campo di stimolo  $\mathbf{B}_S$  con correnti che rendono il campo MAGNETICO  $\mathbf{B}$  interno tre volte maggiore di  $\mathbf{B}_S$ , come illustrato in figura 4.27. Quindi il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una sfera di raggio  $r_0$  stimolata dal campo  $\mathbf{B}_S$  vale  $3\pi r_0^2 B_S$ . Si noti anche che in prossimità del punto esterno 1 e dei punti equivalenti il campo MAGNETICO ha intensità molto minore di  $B_S$ , infatti la proiezione di  $\mathbf{H}$  sull'interfaccia materiale-vuoto si conserva nell'attraversare l'interfaccia, quindi

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{3B_S}{\mu\mu_0} = \frac{3B_S}{\mu}$$

Ora consideriamo il guscio sferico in figura 15. Ha raggio esterno uguale a quello della sfera, è costituito dallo stesso materiale, ad esempio mumetal, e ha spessore  $h$ . A prima vista può sorprendere che un tale guscio schermi efficacemente la regione interna dal campo magnetico di stimolo, ma è davvero così. Per descrivere il meccanismo di schermo cominciamo a notare che il flusso di  $\mathbf{B}$  raccolto dal guscio è quasi esattamente uguale a quello raccolto dalla sfera. Infatti basta che l'incidenza del campo MAGNETICO sul

Fig. 8.15



guscio diventi impercettibilmente meno normale che sulla sfera per intrappolare il campo  $\mathbf{B}$  nello spessore del guscio, come mostrato in figura 15. Di conseguenza il campo MAGNETICO  $\mathbf{B}$  sull'anello ombreggiato ha intensità

$$B_{anello} = \frac{3\pi r_0^2 B_S}{2\pi r_0 h} = B_S \frac{3r_0}{2h}$$

Naturalmente  $B_{anello}$  non può eccedere il campo di saturazione  $\mu_0 M_{sat}$ , quindi dobbiamo precisare che il risultato

$$B_{anello} = B_S \frac{3r_0}{2h} \quad \text{vale solo per} \quad h > \frac{3r_0 B_S}{2\mu_0 M_{sat}}$$

Ammesso che questa condizione sia soddisfatta possiamo calcolare il campo interno al guscio ricordando che la proiezione di  $\mathbf{H}$  sull'interfaccia materiale vuoto si conserva nell'attraversare l'interfaccia. Quindi il campo  $\mathbf{B}'$  in prossimità dell'anello ombreggiato, all'interno o all'esterno del guscio, ha intensità  $B' = \mu_0 H_{anello} = B_{anello}/\mu$ . In realtà il campo MAGNETICO è uniforme in tutta la regione interna al guscio e ha intensità

$$B' = \frac{3r_0}{2\mu h} B_S \quad \text{quando} \quad h \geq \frac{3r_0 B_S}{2\mu_0 M_{sat}} \quad (8.6)$$

Insomma il campo  $\mathbf{B}$  viene schermato dal guscio tanto più efficacemente quanto più grande è lo spessore. Ad esempio, entro una sfera di raggio 1 m, racchiusa da un guscio di mumetal ( $\mu = 70000$ ,  $\mu_0 M_{sat} = 0.7 \text{ T}$ ) di spessore 2 mm, il campo MAGNETICO è circa cento volte minore di quello di stimolo, almeno fino a quando  $B_S$  rimane minore di  $10^{-3} \text{ T}$ .

## ESERCIZI

1) Un guscio sferico di diametro esterno  $2m$  ha permeabilità magnetica  $10^4$  fino a quando il campo MAGNETICO entro il guscio non eccede  $0.5 T$ . Il guscio viene usato per schermare il campo magnetico terrestre. Calcolare: a) lo spessore minimo del guscio necessario a garantire che il materiale si comporti in modo lineare, b) il fattore di schermaggio, definito come rapporto tra il campo di stimolo ed il campo MAGNETICO nel vuoto interno, in funzione dello spessore del guscio. c) Poi pensare che un secondo guscio dello stesso materiale venga posto all'interno del primo e valutare il fattore di schermaggio complessivo con gusci non saturati.

## 8.6 Dissipazione nel ciclo di isteresi

Un pezzo di materiale ferromagnetico costretto a seguire cicli di isteresi si scalda, sia perché viene percorso da correnti di conduzione di Foucault provocate dal campo ELETTRICO indotto, sia perché il suo comportamento magnetico non è mai perfettamente lineare. In questo paragrafo ammettiamo che la conducibilità elettrica del materiale sia nulla, in modo da escludere che insorgano correnti parassite, e concentriamo l'attenzione sulla dissipazione dovuta alla non perfetta linearità del materiale magnetico. Posto  $w = 0$  nell'equazione di Poynting 7.7), rimaniamo alle prese con l'equazione

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) \quad (8.7)$$

che, a prima vista, sembra una legge di conservazione dell'energia elettromagnetica. Ma non lo è: quando il materiale non è lineare il primo membro non è la derivata rispetto al tempo della densità di energia elettromagnetica. Per capire questo punto integriamo ambo i membri dell'equazione 7) sul volume  $\mathcal{V}$  di una ciambella di un materiale omogeneo non conduttore. Per il teorema della divergenza l'integrale di  $\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r})$  diventa

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = \oint_{\text{mantello}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = -W(t)$$

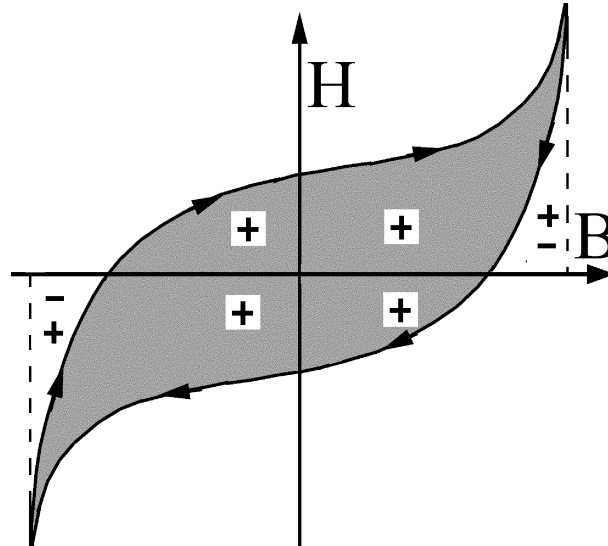
dove  $W(t)$  è la potenza **entrante** nella ciambella attraverso il mantello. Quindi rimaniamo alle prese con l'equazione

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left[ \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right] = W(t) \quad (8.7')$$

Ora pensiamo che la ciambella percorra il ciclo di isteresi in figura 16, ad esempio partendo da condizioni di saturazione con  $H$  negativo. Indichiamo con  $T$  il periodo del ciclo, pensando che sia lunghissimo, in modo da poter ammettere che, ad ogni istante, tutte le fettine della ciambella siano nello



Fig. 8.16



stesso stato elettrico e magnetico. Ciò consente di sostituire l'equazione 7') con l'equazione

$$\nu \left[ E(t) \frac{dD(t)}{dt} + H(t) \frac{dB(t)}{dt} \right] = W(t) \quad (8.7'')$$

dove  $E(t)$ ,  $D(t)$ ,  $B(t)$  ed  $H(t)$  sono valutati al centro di una fettina. Integrando ambo i membri dell'equazione 7'') sul periodo del ciclo, otteniamo

$$\nu \int_0^T [E(t)dD(t) + H(t)dB(t)] = \int_0^T W(t)dt = U \quad (8.8)$$

dove  $U$  è l'energia entrata nella ciambella durante l'intero ciclo di isteresi. Nell'equazione 8) l'integrale sul periodo del termine elettrico è nullo perché la relazione tra  $D$  ed  $E$  è esente da isteresi, mentre l'integrale sul periodo del termine magnetico è null'altro che l'area del ciclo di isteresi. Quindi possiamo concludere che

$$\nu \oint H(B) dB = U \quad (8.9)$$

In parole: **l'energia che entra nella ciambella durante un ciclo di isteresi è il prodotto del volume della ciambella per l'area del ciclo di isteresi.** E poiché lo stato elettromagnetico finale della ciambella è uguale a quello iniziale, l'energia  $U$  viene dissipata nella ciambella.

### ESERCIZI

1) Una ciambella di volume  $1 \text{ dm}^3$  descrive cicli di isteresi di area  $100 \text{ J/m}^3$  con frequenza  $\nu = 50 \text{ Hz}$ . Calcolare la potenza dissipata.

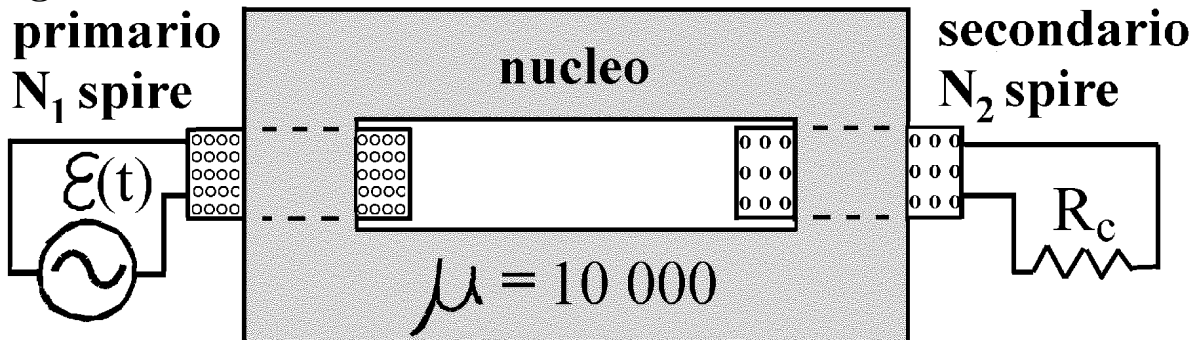
2) L'avvolgimento di una ciambella viene alimentato con frequenza ciclica  $\nu$  e corrente di picco tale da portare la ciambella in saturazione. Mostrare che la potenza dissipata vale  $W = \nu \nu \oint H(B) dB$ .

## 8.7 Trasformatore di tensione

Concludiamo il capitolo descrivendo il principio di funzionamento del trasformatore di tensione schematizzato in figura 17. Oltre ad essere importante nella tecnologia elettromagnetica, il trasformatore ha una notevole importanza concettuale. È un sistema che preleva energia da un generatore di forza elettromotrice e la invia ad un utilizzatore, avvalendosi dell'opera di un trasportatore di energia molto efficiente: il campo elettromagnetico.

Il **nucleo del trasformatore** è un circuito magnetico chiuso di sezione trasversa  $S$ , costruito con un materiale magnetico dolce, scelto con cura. Il materiale deve avere comportamento magnetico (quasi) perfettamente lineare, in modo da ridurre al minimo la dissipazione magnetica, e deve avere conducibilità elettrica (quasi) nulla, oppure deve essere costruito con pacchi di sottili lamierini isolati elettricamente l'uno dall'altro ed orientati parallelamente all'asse del circuito magnetico, in modo da ridurre (quasi) a zero le correnti di Foucault e la conseguente dissipazione Joule. Il nucleo è avvolto da due avvolgimenti detti **primario** e **secondario**. Il primario è costituito da  $N_1$  spire con resistenza (quasi) nulla e viene alimentato da un generatore di forza elettromotrice  $\mathcal{E}(t)$  e resistenza interna (quasi) nulla. Il secondario, composto da  $N_2$  spire con resistenza (quasi) nulla, produce la forza elettromotrice richiesta dai circuiti utilizzatori. La permeabilità magnetica del nucleo deve essere grande, in modo da rendere (quasi) nullo il flusso disperso, ma non è necessario che sia grandissima. Ad esempio le ferriti, che hanno  $\mu$  dell'ordine di alcune migliaia, ottima linearità e bassissima conducibilità, sono materiali molto adatti per i nuclei dei trasformatori.

Fig. 8.17



Nel seguito, pensiamo che tutti i (quasi) che abbiamo distribuito nel discorso siano rimossi, riservandoci di aggiungere un commento finale sui trasformatori concreti, e pensiamo che il secondario sia chiuso su una resistenza di carico  $R_c$ , riservandoci di far tendere  $R_c$  all'infinito per studiare la situazione con secondario aperto. Anzitutto notiamo che il nucleo è percorso da un flusso magnetico  $\Phi(t)$  legato alle correnti che circolano nei due avvolgimenti dalla legge di Hopkinson

$$N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) = \mathcal{R} \Phi(t) \quad (8.10)$$

dove  $\mathcal{R} = l/(\mu\mu_0S)$  è la riluttanza del circuito magnetico. Attenzione! **Abbiamo indicato con  $\Phi(t)$  il flusso magnetico nel nucleo, non i flussi concatenati con i due avvolgimenti, questi sono  $N_1\Phi(t)$  ed  $N_2\Phi(t)$  rispettivamente.** Il circuito primario ha resistenza nulla, quindi la forza elettromotrice applicata  $\mathcal{E}(t)$  deve essere opposta alla forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}_1(t)$ , e possiamo scrivere

$$\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_1(t) = N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.11)$$

Nel secondario chiuso sulla resistenza  $R_c$  agisce solo la forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}_2(t)$ , quindi possiamo scrivere

$$R_c I_2(t) = \mathcal{E}_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.12)$$

Da queste equazioni e dall'equazione 11) otteniamo immediatamente

$$\mathcal{E}_2(t) = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}(t) \quad (8.13)$$

$$I_2(t) = -\frac{N_2}{N_1 R_c} \mathcal{E}(t) \quad (8.14)$$

L'equazione 13) afferma che **la forza elettromotrice indotta nel secondario è uguale al prodotto del fattore di moltiplicazione  $-N_2/N_1$  per la forza elettromotrice applicata al primario.** Apparentemente questa conclusione non dipende dalla riluttanza del circuito magnetico, infatti non abbiamo dovuto usare l'equazione 10) per ottenerla. Ma non si dimentichi che l'ipotesi che ogni spira del primario o del secondario sia attraversata dallo stesso flusso  $\Phi$  è valida solo in approssimazione di flusso disperso nullo, dunque la permeabilità deve essere grande. Se non lo fosse sarebbe conveniente distribuire uniformemente i due avvolgimenti su tutta la lunghezza del circuito magnetico, compenetrandoli il più possibile l'uno nell'altro.

Per calcolare la corrente primaria e per mettere ben in luce il meccanismo di trasferimento d'energia senza immergerci in calcoli laboriosi, restringiamo l'attenzione al caso che il primario sia alimentato con forza elettromotrice armonica. In tal caso, poiché tutti i componenti sono lineari, anche le correnti ed il flusso  $\Phi(t)$  sono armonici, quindi possiamo scrivere  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}e^{-i\omega t}$ ,  $I_1(t) = I_1e^{-i\omega t}$ ,  $I_2(t) = I_2e^{-i\omega t}$  e  $\Phi(t) = \Phi e^{-i\omega t}$ , intendendo che  $\mathcal{E}$  sia reale, ma lasciando  $I_1$ ,  $I_2$  e  $\Phi$  libere di essere complesse, ovvero sfasate rispetto ad  $\mathcal{E}$ . Sostituendo nelle equazioni 11), 10) e 14) rimaniamo alle prese con le relazioni algebriche

$$\mathcal{E} = -i\omega N_1 \Phi \quad , \quad N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R} \Phi \quad , \quad I_2 = -\frac{N_2}{N_1 R_c} \mathcal{E}$$

Sostituendo la prima e la terza equazione nella seconda otteniamo

$$N_1 I_1 - \frac{N_2^2}{N_1 R_c} \mathcal{E} = i \frac{\mathcal{R}}{\omega N_1} \mathcal{E} \implies I_1 = i \frac{\mathcal{R} \mathcal{E}}{\omega N_1^2} + \frac{N_2^2}{N_1^2 R_c} \mathcal{E}$$

Ma  $N_1^2/\mathcal{R} = L_1$  è il coefficiente di autoinduzione del primario, quindi possiamo concludere che

$$I_1 = i \frac{\mathcal{E}}{\omega L_1} + \frac{N_2^2}{N_1^2 R_c} \mathcal{E} \quad (8.15)$$

Questa equazione mostra che la corrente primaria ha una parte in quadratura con la forza elettromotrice, uguale alla corrente che sarebbe presente anche se il secondario non ci fosse o fosse aperto ( $R_c = \infty$ ). Questa parte comporta trasferimenti alternati di potenza dal generatore al campo elettromagnetico con valor medio temporale nullo. Ma la corrente primaria ha anche una parte in fase con la forza elettromotrice applicata, quindi il circuito primario assorbe la potenza

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{E} \Re\{I_1\} = \frac{\mathcal{E}^2}{2R_c} \frac{N_2^2}{N_1^2} \quad (8.16)$$

Tenendo conto dell'equazione 14) si vede che la potenza assorbita dal primario risulta proprio uguale alla potenza  $R_c I_2^2/2$  dissipata nella resistenza di carico! Dunque quanto detto all'inizio è vero: **la potenza fluisce dal generatore al primario, che la trasferisce al campo elettromagnetico, che la trasferisce al secondario, che la trasferisce alla resistenza di carico, che la dissipa.** Dall'equazione 15) vediamo anche che l'impedenza  $Z = \mathcal{E}/I_1$  del circuito primario è tale che

$$\frac{1}{Z} = i \frac{1}{\omega L_1} + \frac{N_2^2}{N_1^2 R_c}$$

Dunque, **l'impedenza del circuito primario dipende dalla resistenza di carico del secondario** e diventa puramente induttiva solo quando  $R_c$  tende all'infinito, ovvero quando il secondario è aperto.

Nel caso ideale che abbiamo considerato il rendimento del trasformatore risulta unitario: tutta la potenza ceduta dal generatore raggiunge il carico. Naturalmente il rendimento energetico di un trasformatore reale è limitato dalla dissipazione Joule e magnetica nel nucleo, dalla dissipazione Joule negli avvolgimenti primario e secondario e dalla dispersione di flusso, tutti effetti che abbiamo trascurato. Ma per non lasciare l'impressione che il sistema studiato sia lontano dalla realtà diciamo che il rendimento dei trasformatori moderni può raggiungere valori quasi unitari, anche maggiori di 0.99.

## ESERCIZI

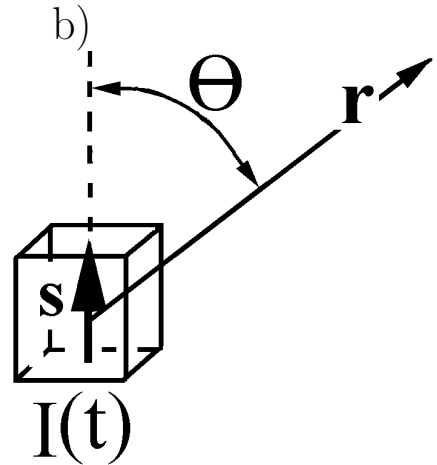
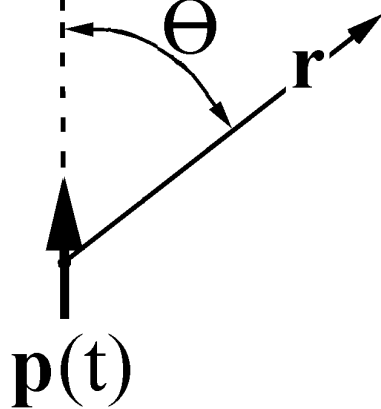
1) Un trasformatore ideale fornisce ad una resistenza collegata al secondario la potenza efficace di  $500 \text{ W}$  con tensione di picco di  $36 \text{ V}$ . Il primario è alimentato con tensione di rete ( $220 \text{ V}$  efficaci a  $50 \text{ Hz}$ ). a) Quale corrente assorbe il primario? b) Quale flusso di energia percorre il nucleo?

# Capitolo 9

## Emissione di radiazione elettromagnetica

La più semplice sorgente di radiazione elettromagnetica è il sistema mostrato in figura 1a): un dipolo puntiforme centrato nell'origine con momento di dipolo  $\mathbf{p}(t)$  di ampiezza dipendente dal tempo. Nei primi paragrafi di-

Fig. 9.1: a)



mostriamo che il campo elettromagnetico prodotto dal dipolo oscillante è descritto in ogni dettaglio dal potenziale vettore

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (9.1)$$

dove  $\dot{\mathbf{p}}(t)$  è la derivata temporale del momento di dipolo. Poi fissiamo l'attenzione sul modello di dipolo oscillante mostrato in figura 1b): un cubetto neutro di lato  $s$ , centrato nell'origine e percorso da corrente  $I(t)$  diretta nel verso di uno spigolo. Indicate con  $q(t)$  e  $-q(t)$  le cariche presenti al tempo  $t$  sulle facce superiore ed inferiore, il momento di dipolo del cubetto vale  $s\mathbf{q}(t)$  e la sua derivata temporale risulta

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = s\dot{\mathbf{q}}(t) = sI(t) = \mathbf{j}(t)d\mathcal{V}$$

dove  $\mathbf{j}(t)$  è la densità di corrente. Dunque il potenziale vettore prodotto da un elemento di corrente centrato nell'origine può essere descritto nelle forme

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{s}}{4\pi r} I\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{j}\left(t - \frac{r}{c}\right) d\mathcal{V} \quad (9.1')$$

Partendo da questa equazione possiamo calcolare il potenziale vettore per qualunque distribuzione di correnti in un volume finito: basta scomporre il volume in cubetti infinitesimi centrati in punti  $\mathbf{r}'$ , sostituire  $r$  con  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  e sommare i contributi di tutti i cubetti. In formula

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}' \frac{\mathbf{j}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.1'')$$

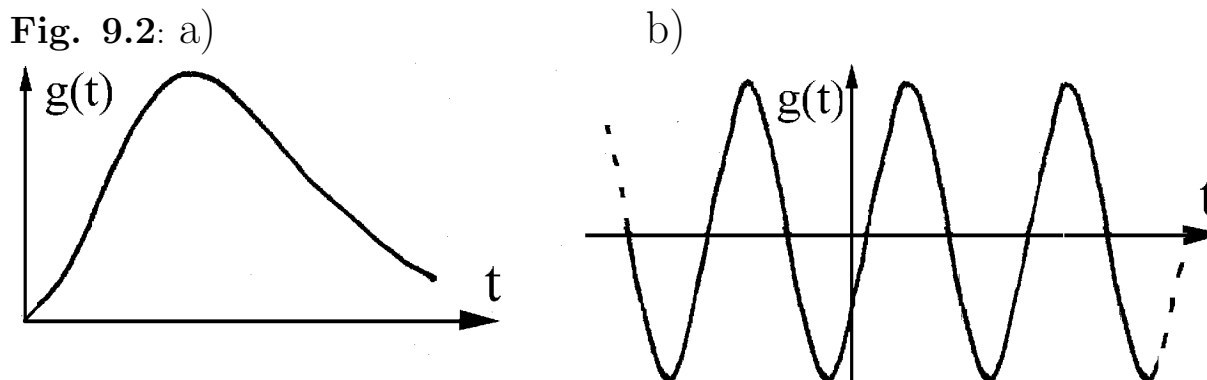
Dopo aver giustificato l'equazione 1), studiamo il campo prodotto da un dipolo oscillante con legge armonica  $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{s}I \cos(\omega t)$ , da un'antenna dipolare e da una carica in moto armonico.

## 9.1 Equazione di d'Alembert

In questo paragrafo affrontiamo il problema: data una funzione  $g(t)$  continua e dotata di derivate prima  $\dot{g}(t)$  e seconda  $\ddot{g}(t)$  limitate, determinare campi  $f(t, r)$  a simmetria sferica che si annullino all'infinito e che siano soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, r) - \nabla \cdot \nabla f(t, r) = g(t) \delta(\mathbf{r}) \quad (9.2)$$

dove  $\delta(\mathbf{r})$  è la delta di Dirac. Ad esempio la funzione sorgente  $g(t)$  può avere



l'andamento impulsivo mostrato in figura 2a) oppure l'andamento armonico mostrato in figura 2b). Naturalmente la condizione che  $\dot{g}(t)$  e  $\ddot{g}(t)$  siano limitate non esclude che tali derivate possano essere molto grandi, quindi è sempre rispettata in situazioni sperimentali.

Diciamo subito che il problema posto ha soluzioni

$$f(t, r) = \frac{1}{4\pi r} g(t - r/c) \quad \text{e} \quad f(t, r) = \frac{1}{4\pi r} g(t + r/c) \quad (9.3)$$

la prima funzione è ritardata del tempo  $r/c$  rispetto alla funzione sorgente, la seconda funzione è anticipata. Per convincerci che le funzioni ritardata ed anticipata sono soluzioni dell'equazione 2), cominciamo a notare che

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{4\pi r} g(t \pm r/c) = \frac{1}{4\pi r c^2} \ddot{g}(t \pm r/c)$$

poi usiamo l'equazione M.12), valida per  $r \neq 0$ , e notiamo che

$$\nabla \cdot \nabla \frac{1}{4\pi r} g(t \pm r/c) = \frac{1}{4\pi r} \frac{d^2}{dr^2} g(t \pm r/c) = \frac{1}{4\pi r c^2} \ddot{g}(t \pm r/c)$$

Pertanto, in punti diversi dall'origine il primo membro dell'equazione 2) è davvero nullo come il secondo. Per dimostrare che le funzioni 3) sono soluzioni anche nell'origine, cominciamo ad integrare l'equazione 2) sul volume di una sfera di raggio  $r_0$  centrata nell'origine, usiamo il teorema della divergenza e ricordiamo che l'integrale di volume della delta di Dirac è unitario, qualunque sia  $r_0$ . Otteniamo così

$$\frac{1}{c^2} \int_0^{r_0} 4\pi r^2 dr \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, r) - \oint_S d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \nabla f(t, r) = g(t)$$

Inserendo la prima delle funzioni 3) in questa equazione otteniamo

$$\frac{1}{c^2} \int_0^{r_0} r dr \ddot{g}(t - r/c) - \oint_S d\mathcal{S} \left[ -\frac{1}{4\pi r^2} g(t - r/c) - \frac{1}{4\pi r c} \dot{g}(t - r/c) \right] = g(t)$$

L'integrale esteso alla superficie della sfera è null'altro che il prodotto di  $4\pi r_0^2$  per il termine in parentesi quadra scritto con  $r = r_0$ , quindi rimaniamo alle prese con l'equazione

$$\frac{1}{c^2} \int_0^{r_0} r dr \ddot{g}(t - r/c) + g(t - r_0/c) + \frac{r_0}{c} \dot{g}(t - r_0/c) = g(t)$$

A questo punto basta far tendere  $r_0$  a zero e ricordare che  $\dot{g}(t)$  e  $\ddot{g}(t)$  sono limitate, per convincersi che la prima delle funzioni 3) è davvero soluzione dell'equazione 2). In modo analogo si dimostra che lo è anche la seconda.

## 9.2 Potenziali vettore e scalare di Lorentz

L'assenza di monopoli magnetici consente di affermare che, qualunque sia  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ , esiste una vasta classe di campi vettoriali  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  tali che

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \quad (9.4)$$

Sostituendo nella legge di induzione otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

Ciò comporta che il campo  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$  ha sempre ed ovunque rotore nullo, quindi esiste almeno un campo scalare  $\phi(t, \mathbf{r})$  tale che

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = -\nabla \phi(t, \mathbf{r}) \quad (9.5)$$

Prendendo la divergenza di ambo i membri e ricordando la legge di Gauss si ottiene

$$\frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = -\nabla^2 \phi(t, \mathbf{r})$$

Una seconda relazione tra i potenziali  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  e le densità di carica e correnti si ottiene sostituendo le equazioni 4) e 5) nella legge di Ampère-Maxwell e sviluppando  $\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]$  con l'equazione M.13). Si ottiene così

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r})] = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi(t, \mathbf{r})$$

Dalle due relazioni appena scritte emerge che, dati  $\rho$  e  $\mathbf{j}$ , i potenziali  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  possono essere determinati anche se si richiede che siano legati dalla

$$\text{condizione di Lorentz} \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \mathbf{r}) \quad (9.6)$$

In tal caso, infatti, le due relazioni si riducono ad equazioni che sappiamo risolvere, le equazioni di D'Alembert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \mathbf{r}) - \nabla^2 \phi(t, \mathbf{r}) = \frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (9.7)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \quad (9.8)$$

quindi possiamo essere certi che la condizione di Lorentz 6) è pienamente compatibile con le equazioni 4) e 5).

Si noti che l'equazione 7) lega il potenziale scalare  $\phi$  solo alla densità di carica  $\rho$ , e le tre equazioni 8) legano ciascuna delle componenti del potenziale vettore  $\mathbf{A}$  solo alla corrispondente componente della densità di corrente  $\mathbf{j}$ .

A questo punto crediamo opportuno anticipare che **il potenziale scalare  $\phi(t, \mathbf{r})$  gioca un ruolo marginale nello studio della radiazione elettromagnetica: la parte dipendente dal tempo del campo elettromagnetico è pienamente individuata dal potenziale vettore  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ .** Infatti, il rotore di  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  determina il campo  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  e, nel vuoto, la legge di Ampère-Maxwell determina la derivata temporale di  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  come

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = c^2 \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \quad (9.9)$$

Si noti anche che, calcolato  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ , basta usare la condizione di Lorentz per ottenere la derivata temporale di  $\phi(t, \mathbf{r})$ .

Ora pensiamo che la densità di corrente sia ovunque nulla tranne che nel cubetto di volume infinitesimo  $d\mathcal{V}$  considerato in figura 1b). La densità di corrente nel volumetto vale  $\mathbf{j}(t) = \mathbf{s}I(t)/d\mathcal{V} = \dot{\mathbf{p}}(t)\delta(\mathbf{r})$ , dove  $\delta(\mathbf{r})$  è la delta di Dirac, quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{s}I(t)\delta(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{p}}(t)\delta(\mathbf{r})$$



Sostituendo nell'equazione 8) e scegliendo la soluzione ritardata si giunge al potenziale vettore di dipolo oscillante dato dall'equazione 1). La scelta della soluzione ritardata è naturale nel presente contesto in quanto il dipolo oscillante gioca il ruolo di causa ed il potenziale vettore quello di effetto

Concludiamo il paragrafo dicendo che si usa definire

$$\text{l'operatore di D'Alembert} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

e si usa scrivere le equazioni 7) ed 8) nella forma

$$\square\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad , \quad \square\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$$

Si noti anche che, nel vuoto, i campi  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  soddisfano le

$$\text{equazioni di D'Alembert omogenee} \quad \square\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad , \quad \square\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (9.10)$$

Ad esempio la prima si ottiene prendendo il rotore di ambo i membri della legge di induzione e tenendo conto della legge di Ampère-Maxwell.

### 9.3 Campo magnetico di dipolo oscillante

Ora partiamo dall'equazione

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0\mathbf{s}}{4\pi r} I\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (9.1')$$

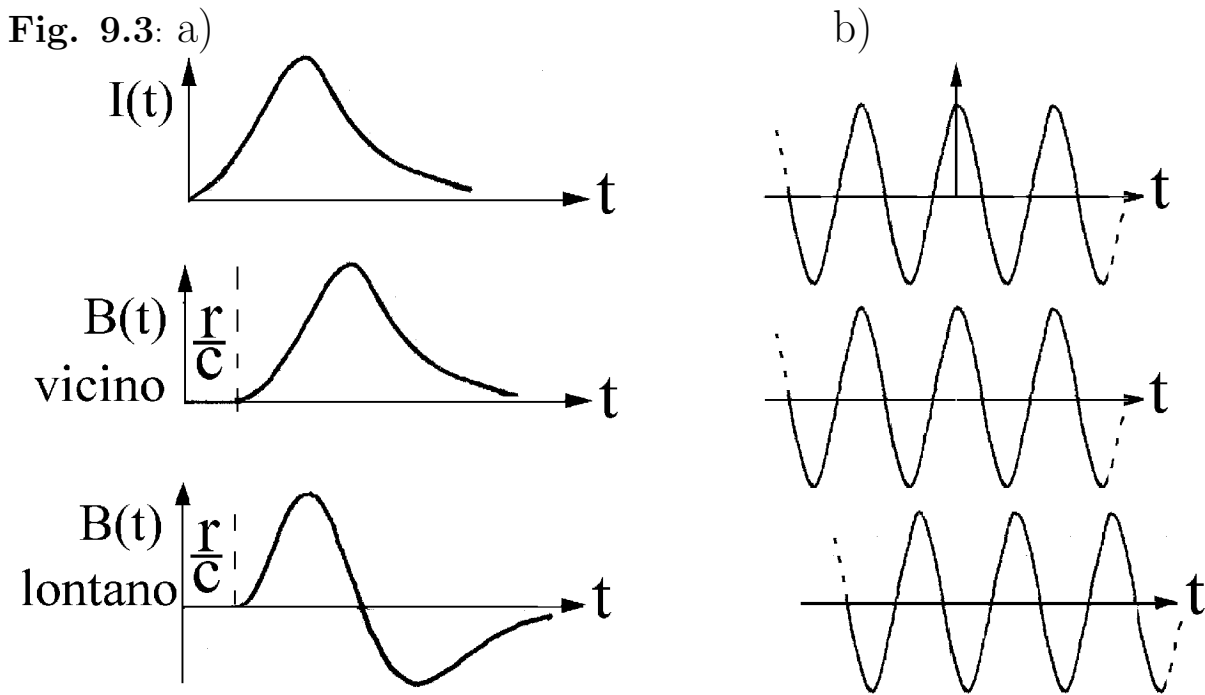
e procediamo al calcolo del campo magnetico di dipolo oscillante come segue.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{s}I(t-r/c)}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ I\left(t - \frac{r}{c}\right) \nabla \times \frac{\mathbf{s}}{r} + \frac{1}{r} \nabla \times [\mathbf{s}I(t-r/c)] \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ I\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{cr^2} \right] = \frac{\mu_0\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \left[ I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \end{aligned}$$

Dunque il **campo magnetico di dipolo oscillante** risulta

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \left[ I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \quad (9.11)$$

e differisce dal campo magnetico prodotto da un elemento di circuito percorso da corrente continua, dato dalla formula di Laplace, solo perché il termine in parentesi quadra sostituisce la corrente  $I$ . **Ma è una gran differenza:** a distanze più o meno grandi dal dipolo il secondo termine in parentesi quadra domina sul primo ed il campo decade con la distanza anziché con il quadrato della distanza. In generale, l'andamento temporale del campo  $\mathbf{B}$  in un dato punto copia quello di  $I(t - r/c)$  oppure quello di  $\dot{I}(t - r/c)$  a seconda che la distanza dal dipolo sia piccola o grande. Ad esempio la corrente considerata



in figura 3a) genera un campo  $\mathbf{B}$  che ha forme d'onda diverse a piccole ed a grandi distanze. Poiché  $I(t)$  ed  $\dot{I}(t)$  sono diversi da zero solo per  $t > 0$ , il campo  $\mathbf{B}$  insorge solo per  $t \geq r/c$ . In questo senso il campo  $\mathbf{B}$  è sempre ritardato come il potenziale vettore. Ma quando la corrente è armonica sin dal lontano passato, come in figura 3b), anche il campo  $\mathbf{B}$  è armonico ed esiste una regione più o meno estesa nella quale il campo magnetico oscilla in fase con la corrente, come vedremo nel prossimo paragrafo.

## 9.4 Campi di dipolo armonico nella regione vicina

D'ora in avanti consideriamo dipoli armonici percorsi dalla corrente  $I \cos(\omega t)$  e, per semplificare i calcoli, descriviamo la corrente come la parte reale di  $I(t) = I e^{-i\omega t}$ , convenendo di aver scelto l'origine dei tempi in modo che  $I$  sia reale. Usiamo il simbolo  $k$  ad intendere  $\omega/c$  e notiamo che

$$I(t - r/c) = I e^{i(kr - \omega t)} \quad , \quad \dot{I}(t - r/c) = -i\omega I e^{i(kr - \omega t)}$$

Sostituendo nelle equazioni 1') ed 11) si vede che il **potenziale vettore di dipolo armonico** è (la parte reale di)

$$\mathbf{A}_0(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \mathbf{s}}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (9.12)$$

mentre il **campo magnetico di dipolo armonico** è (la parte reale di)

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} e^{i(kr - \omega t)} (1 - ikr) \quad (9.13)$$

Ora consideriamo la **regione vicina**, definita dalla condizione  $kr \ll 1$ . In tale regione il potenziale vettore è sfasato di  $kr$  rispetto alla corrente, ma

il campo magnetico è in fase con la corrente, diciamo che il suo ritardo è compensato. Infatti, a meno di termini quadratici in  $kr$ , il fattore  $e^{ikr}(1 - ikr)$  vale  $(1 + ikr)(1 - ikr) \approx 1$ , quindi

$$\text{per } kr \ll 1, \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0 I(t) \mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (9.14)$$

Dunque **nella regione vicina il campo magnetico al tempo  $t$  non differisce da quello che la corrente presente a tale istante produrrebbe se fosse stazionaria.** Ad esempio per  $k \approx 10^{-2} \text{ m}^{-1}$  la regione vicina si estende sino a distanze dal dipolo di una decina di metri.

Per calcolare il campo  $E(t, \mathbf{r})$  inseriamo l'equazione 14) nella 9), ricordiamo l'equazione M.7) e notiamo che

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = c^2 \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = c^2 \mu_0 \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[ \frac{I(t) \mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \right] = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \nabla \left[ \frac{I(t) \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right]$$

A questo punto basta ricordare che l'integrale sul tempo di  $\mathbf{s}I(t)$  è il momento di dipolo  $\mathbf{p}(t)$  per concludere che

$$\text{per } kr \ll 1, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\nabla \left[ \frac{\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right] \quad (9.15)$$

Anche questo risultato è semplice: **nella regione vicina il campo elettrico al tempo  $t$  non differisce da quello che il dipolo presente a tale istante produrrebbe se fosse stazionario.** Per comprendere l'importanza di questo risultato si pensi che il momento di dipolo di un atomo oscilla con frequenza  $\omega \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$ , tipica frequenza di oscillazione delle nuvole elettroniche, e si pensi che un secondo atomo sia a distanza  $r$  dal primo. Quando  $r \ll c/\omega \approx 300 \text{ \AA}$ , i due atomi possono essere considerati vicini e **ciascun atomo risente istantaneamente del momento di dipolo presente nell'altro.** Ciò giustifica quanto detto nel paragrafo 3.12 riguardo all'interazione dipolo istantaneo-dipolo indotto, si veda in proposito l'esercizio 1. Ed è anche giustificato l'approccio seguito nello studio dei circuiti oscillanti: in un circuito di dimensioni dell'ordine di  $10 \text{ cm}$  ogni punto è "vicino" ad ogni altro punto del circuito fino a quando  $\omega$  è molto minore di  $3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ , cosa sempre verificata nei casi che abbiamo considerato finora. Ma attenzione: anche nella regione vicina dobbiamo tener conto dei ritardi per descrivere le fasi transitorie. Ad esempio, quando chiudiamo un circuito e lanciamo una corrente in un filo, il campo che fa insorgere la corrente a distanza  $r$  dall'interruttore si è propagato nel vuoto ed insorge con ritardo  $r/c$ , quindi anche la corrente insorge con tale ritardo.

Infine notiamo che l'approssimazione  $e^{ikr}(1 - ikr) = 1$  comporta che il campo  $\mathbf{B}$  è in fase con la corrente mentre il campo  $\mathbf{E}$  è in fase con il dipolo, quindi i due campi sono in quadratura ed il vettore di Poynting ha valor

medio temporale nullo. Ma se avessimo sviluppato  $e^{ikr}(1 - ikr)$  sino al terzo ordine in  $kr$  avremmo visto che nella regione vicina i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  non sono esattamente in quadratura e trasportano potenza come nella regione remota.

## ESERCIZI

1) Un atomo di raggio  $r_0$  ha momento di dipolo  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} \sin(\omega t)$  con  $\omega = 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Un atomo identico è a distanza  $r > 2r_0$  dal primo. a) Valutare l'intervallo di distanze esente da ritardi. b) Calcolare l'energia di interazione nella regione vicina.

2) Considerare il campo scalare  $\phi(t, \mathbf{r}) = \phi e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , con  $\phi$  costante, mostrare che il suo gradiente e la sua derivata temporale sono rispettivamente  $i\mathbf{k}\phi(t, \mathbf{r})$  e  $-i\omega\phi(t, \mathbf{r})$  e precisare il significato fisico di tali risultati.

3) Considerare il campo vettoriale  $\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{C} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , con  $\mathbf{C}$  vettore fisso, mostrare che la sua divergenza ed il suo rotore sono rispettivamente  $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$  e  $i\mathbf{k} \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})$ , e precisare il significato fisico di tali risultati.

## 9.5 Radiazione di dipolo armonico

Ora, con riferimento alla figura 4, fissiamo l'attenzione su un volumetto remoto centrato intorno al punto  $\mathbf{r}$  della **regione di radiazione**, ovvero della regione con  $kr \gg 1$ . Definiamo il **vettore d'onda**  $\mathbf{k}$  con l'equazione  $\mathbf{k} = k\mathbf{r}/r$  e riscriviamo il potenziale vettore nella forma

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \mathbf{s}}{4\pi r} \quad (9.16)$$

Poi pensiamo che il volumetto in figura 4 sia tanto piccolo da poter ritenere che  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{k}$  siano costanti al suo interno, senza dimenticare che  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  è grandissimo e può variare molto entro il volumetto. Ad esempio in un cubetto di spigolo  $2 \text{ mm}$  distante  $1000 \text{ m}$  da un dipolo armonico oscillante con  $k = 10^3 \text{ m}^{-1}$ , le variazioni di  $\mathbf{A}$  e del verso di  $\mathbf{k}$  sono certamente trascurabili, ma  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  varia da  $10^6 - 1$  a  $10^6 + 1$ , facendo variare molto  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ . Ora notiamo che  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  e scriviamo

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = i\mathbf{B} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{con} \quad \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{A}_T \quad (9.17)$$

dove  $\mathbf{A}_T$  è la parte fissa del **potenziale vettore di radiazione** o **potenziale vettore trasverso**, definito come proiezione del potenziale vettore di Lorentz su un piano ortogonale al vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . L'equazione 17) mostra che il campo magnetico è ortogonale al vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e all'asse dipolare, è sfasato di  $\pi/2$  in ritardo rispetto al potenziale vettore e ha ampiezza  $kA \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'**angolo di emissione**, formato da  $\mathbf{k}$  con il verso della corrente. Dalle equazioni 9) e 17), ricordando che  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_T) = -k^2 \mathbf{A}_T$ , si vede che

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = ic^2 \nabla \times [\mathbf{B} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = -c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \omega^2 \mathbf{A}_T e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Integrando sul tempo e tenendo conto che  $c^2/\omega = c/k$  giungiamo al risultato

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = i\mathbf{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad \text{con} \quad \mathbf{E} = \omega\mathbf{A}_T \quad (9.18)$$

Le equazioni 17) e 18) e la figura 5 mostrano che nella regione di radiazione il campo EM prodotto dal dipolo armonico ha le seguenti proprietà.

- Il campo elettrico ed il campo magnetico oscillano in fase. Entrambi sono sfasati in ritardo di  $kr + \pi/2$  rispetto alla corrente che li genera.
- I vettori fissi  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  formano una terna ortogonale destra.
- Le ampiezze  $E$  e  $B$  sono legate dalla relazione  $E = cB$ .

Fig. 9.4:

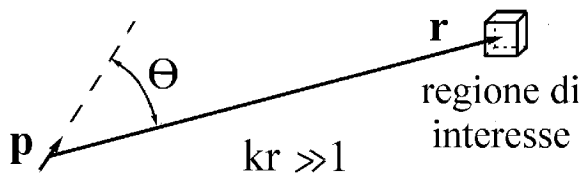
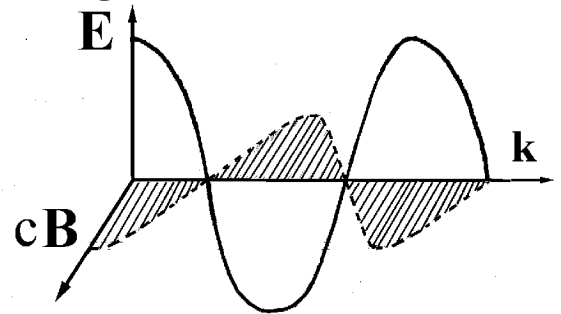


Fig. 9.5



## ESERCIZI

1) Considerare il potenziale scalare di Lorentz  $\phi(t, \mathbf{r}) = \phi e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  e: a) mostrare che  $\phi/c$  è la proiezione di  $\mathbf{A}$  su  $\mathbf{k}$ , b) ricalcolare  $\mathbf{E}$  partendo dai potenziali scalare e vettore di Lorentz.

2) In una certa regione il potenziale vettore di Lorentz vale

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \equiv (A_T \cos(kz - \omega t), 0, \sqrt{3}A_T \cos(kz - \omega t))$$

dove  $A_T$  è una costante. a) Ammettere che il potenziale dato sia prodotto da un dipolo e valutare l'inclinazione del dipolo rispetto alla direzione di propagazione. b) Calcolare il potenziale scalare di Lorentz. c) Calcolare il campo elettrico partendo dai potenziali di Lorentz. d) Verificare che il campo elettrico si ottiene anche a partire dai **potenziali di radiazione**

$$\phi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{A}_T(t, \mathbf{r}) \equiv (A_T \cos(kz - \omega t), 0, 0)$$

## 9.6 Flusso d'energia della radiazione dipolare

Dalle equazioni 17) e 16) si vede che (la parte reale de) il campo magnetico prodotto dal dipolo armonico centrato nell'origine vale

$$B(t, \mathbf{r}) = B \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{\mu_0 I k s \sin \theta}{4\pi r} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Ricordando che  $E = cB$  si vede che la densità di energia vale

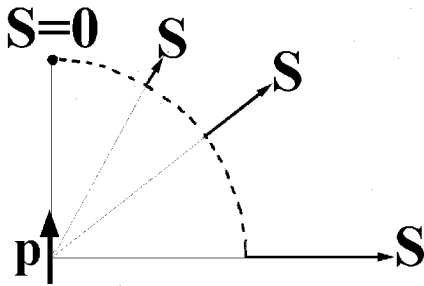
$$u_{em}(t, \mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \frac{B^2(t, \mathbf{r})}{\mu_0} = \frac{B^2(t, \mathbf{r})}{\mu_0} = \mu_0 \left( \frac{I k s \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

e la densità di flusso di energia, data dal vettore di Poynting, risulta

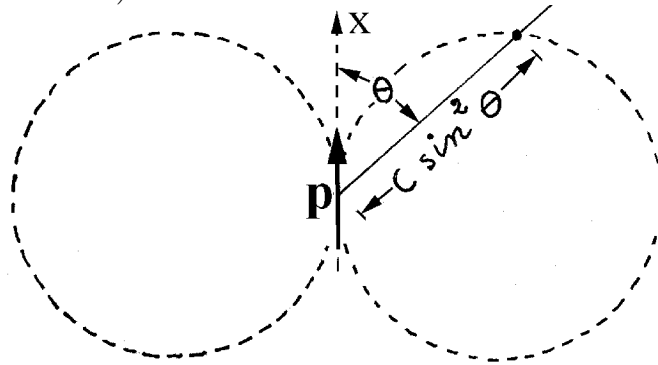
$$\mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\mu_0} = c \frac{B^2(t, \mathbf{r})}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} = cu_{em}(t, \mathbf{r}) \frac{\mathbf{k}}{k}$$

quindi la densità di flusso di energia associata al campo di dipolo armonico è un campo vettoriale diretto come  $\mathbf{k}$ , con intensità pari al prodotto della densità di energia elettromagnetica per la velocità di propagazione  $c$ . Si tenga ben presente che la densità di energia ha dimensioni energia diviso volume, mentre la densità di flusso d'energia ha dimensioni energia diviso superficie e tempo. Si noti anche che sia la densità di energia, sia la densità di flusso di energia oscillano con frequenza  $2\omega$ , sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal dipolo e sono proporzionali a  $\sin^2 \theta$ . Entrambi hanno valori di picco nulli nella direzione polare e massimi nel piano equatoriale, come mostrato in figura 6a).

Fig. 9.6: a)



b)



Nel seguito usiamo notazioni del tipo  $\langle u_{em}(t, \mathbf{r}) \rangle$  ad indicare il valor medio temporale della grandezza inserita in parentesi angolari. Tenendo presente che  $\langle \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle = 1/2$ , vediamo che il valor medio temporale della densità di flusso d'energia vale

$$\langle S(t, \mathbf{r}) \rangle = c \langle u_{em}(t, \mathbf{r}) \rangle = \frac{c\mu_0}{2} \left( \frac{I s k}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta$$

Moltiplicando questa grandezza per  $r^2 d\Omega$ , otteniamo la potenza  $dW(\omega)$  emessa entro un conetto di angolo solido  $d\Omega$  con asse inclinato di  $\theta$  sull'asse dipolare e possiamo concludere che

$$\frac{dW(\theta)}{d\Omega} = \frac{c\mu_0}{2} \left( \frac{I s k}{4\pi} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (9.19)$$

Si usa esprimere questo risultato dicendo che il dipolo armonico irradia potenza con **lobo di emissione toroidale**. Una sezione di tale lobo è la curva a forma di  $\infty$  tratteggiata in figura 6b); l'intero lobo si ottiene ruotando la figura intorno all'asse dipolare.

A questo punto conviene introdurre la costante

$$Z_0 = c\mu_0 = \frac{1}{c\epsilon_0} \approx 377 \Omega \quad (9.20)$$

e conviene sostituire  $k$  con  $2\pi/\lambda$  nell'equazione 19). Otteniamo così

$$\frac{dW(\theta)}{d\Omega} = C \sin^2 \theta \quad \text{dove} \quad C = \frac{Z_0 I^2}{8} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 \quad (9.21)$$

Non sempre, però, le grandezze  $I$  ed  $s$  sono note, spesso è noto solo il valore di picco  $p$  del momento di dipolo. In tal caso basta ricordare che  $sI(t) = \dot{p}(t)$  per vedere che, in regime armonico,  $Is = -\omega p$ . Sostituendo  $Is$  con  $-\omega p$  e  $k$  con  $\omega/c$ , il risultato 19) diventa

$$\frac{dW(\theta)}{d\Omega} = C \sin^2 \theta \quad \text{dove} \quad C = \frac{p^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \quad (9.21')$$

Infine calcoliamo la potenza totale  $W$  irradiata dal dipolo armonico. Integrando  $dW(\theta)$  su tutto l'angolo solido otteniamo

$$W = C \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin^2 \theta = -C 2\pi \int_1^{-1} d\xi (1 - \xi^2) = C \frac{8\pi}{3}$$

Quindi la potenza irradiata dal dipolo armonico su tutto l'angolo solido risulta

$$W = \frac{\pi}{3} Z_0 I^2 \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 = \frac{p^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (9.22)$$

Naturalmente questa potenza deve essere fornita al dipolo in qualche modo.

## ESERCIZI

1) Un dipolo oscilla con frequenza  $\omega = 3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$  e momento di dipolo di picco  $p = 10^{-12} \text{ Cm}$ . Calcolare: a) la potenza totale emessa, b) i campi elettrico e magnetico a  $10 \text{ m}$  di distanza per  $\theta = 30^\circ$ , c) i campi elettrico e magnetico a  $10 \text{ m}$  di distanza per  $\theta = 90^\circ$ , d) l'intensità della radiazione a  $10 \text{ m}$  di distanza per  $\theta = 45^\circ$

2) Una barretta di diametro  $1 \text{ mm}$  e lunghezza  $10 \text{ cm}$  è percorsa dalla corrente  $I \sin(\omega t)$  con  $I = 2 \text{ A}$  ed  $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Calcolare: a) l'andamento temporale del momento di dipolo, b) i campi magnetico ed elettrico presenti al tempo zero a  $10 \text{ m}$  e a  $10 \text{ km}$  dal dipolo, nella direzione polare e nel piano equatoriale, c) la potenza totale irradiata.

## 9.7 Polarizzazione lineare, ellittica e circolare

Un'onda con campo elettrico descritto da (la parte reale di)

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

con  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{k}$  vettori fissi nello spazio e nel tempo, perpendicolari l'uno all'altro, è un'**Onda Piana Progressiva Monocromatica Polarizzata Linearmente** (OPPMPL). Il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  ed il vettore  $\mathbf{E}$  individuano l'onda in tutto lo spazio ed a qualunque istante del passato o del futuro, ma all'OPPMPL

diamo significato fisico solo nella regione spaziale e nell'intervallo di tempo di nostro interesse. Ad esempio, l'onda che ci investe provenendo da un dipolo armonico distante  $10\text{ km}$  è un'OPPMPL con ottima approssimazione.

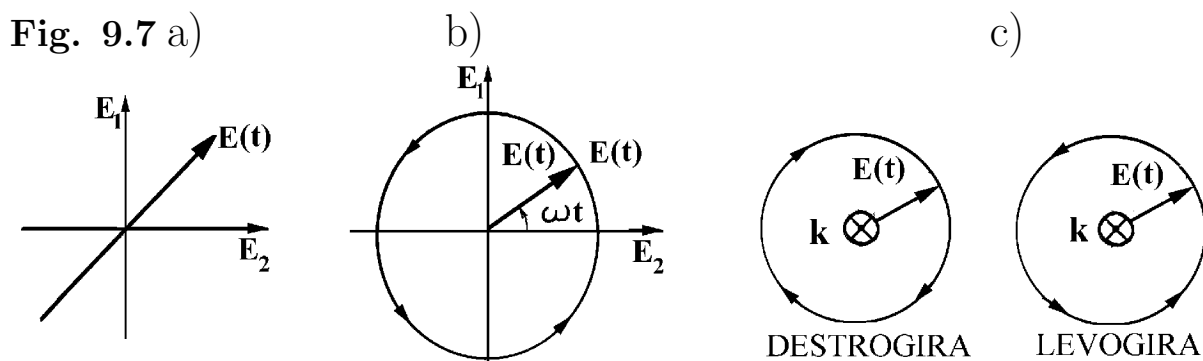
I **fronti d'onda**, definiti in generale come superfici di ugual fase, sono piani normali al vettore fisso  $\mathbf{k}$ , quindi contengono i vettori fissi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Un particolare fronte d'onda è individuato da un certo valore della fase  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  e viaggia con velocità  $c$  nel verso di  $\mathbf{k}$ . Ad ogni istante, ad esempio al tempo  $t = 0$ , i campi  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  hanno (parti reali con) valori di cresta positivi su fronti d'onda distanti  $\lambda = 2\pi/k$  l'uno dall'altro. Insomma, possiamo descrivere la situazione dicendo che un **treno d'onde** di lunghezza illimitata, composto da "vagoni" di lunghezza  $\lambda$ , viaggia nel verso del vettore d'onda con velocità  $c$ .

In un punto particolare, ad esempio nell'origine, il campo elettrico è un **segnale sinusoidale** oscillante nel tempo con frequenza angolare  $\omega$  e frequenza ciclica  $\nu = \omega/2\pi$ . L'inverso di  $\nu$ ,  $T = 2\pi/\omega$ , è il **periodo dell'onda**, da intendersi come periodo del segnale, ovvero come intervallo di tempo di passaggio dal dato punto di un "vagone" del treno d'onde.

Dato il vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , la più generale OPPM ha campo elettrico

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \mathbf{E}_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)$$

dove  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  sono vettori reali fissi nello spazio e nel tempo, perpendicolari tra loro e perpendicolari al vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , ma peraltro arbitrari, ed  $\alpha$  è una fase arbitraria. Per  $\alpha = 0$  oppure per  $\alpha = \pi$  i due campi sono in fase oppure



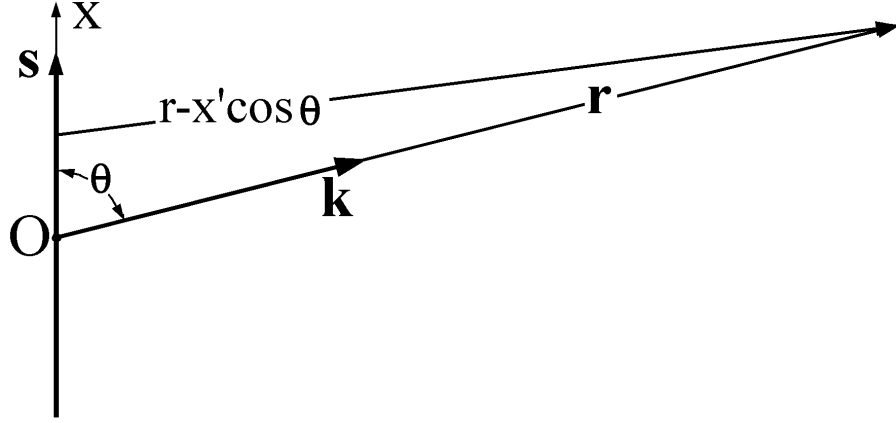
in opposizione di fase e la polarizzazione del campo complessivo è lineare, come mostrato in figura 7a). Ma quando  $\alpha = \pm\pi/2$  i due campi sono in quadratura e la loro sovrapposizione varia in direzione ed intensità come il raggio vettore dell'ellisse mostrata in figura 7b). In tal caso si dice che la polarizzazione è **ellittica**. Nel caso particolare  $|E_1| = |E_2|$ , la polarizzazione ellittica diventa **circolare**. Infine diciamo che la polarizzazione ellittica è **destrogira** (oppure **levogira**) quando i campi ruotano nel verso dal polso alle dita di una mano destra (oppure sinistra) disposta con pollice nel verso di  $\mathbf{k}$ , come mostrato in figura 7c).



## 9.8 Fattore di diffrazione

Con riferimento alla figura 8, consideriamo un filo rettilineo percorso dalla corrente  $I(t) = Ie^{-i\omega t}$ , pensando che il suo spessore sia trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi c/\omega$ , ma senza porre limiti alla lunghezza  $s$ . Per calcolare il campo elettromagnetico nella regione di radiazione scegliamo

Fig. 9.8



l'asse  $x$  lungo il filo con origine nel centro, scomponiamo il filo in trattini infinitesimi e notiamo che il trattino compreso tra  $x'$  ed  $x' + dx'$  è un dipolo con prodotto corrente-spostamento  $I dx' e^{-i\omega t}$ , distante  $r - x' \cos \theta$  dal punto d'osservazione  $\mathbf{r}$ . Trascurando  $x' \cos \theta$  rispetto ad  $r$  nel denominatore del potenziale vettore si vede che il trattino fornisce il contributo

$$d\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I s dx'}{4\pi r s} e^{i(kr - kx' \cos \theta - \omega t)} = \mathbf{A}_0(t, \mathbf{r}) \frac{dx'}{s} e^{-ikx' \cos \theta}$$

dove  $\mathbf{A}_0$  è il potenziale vettore di dipolo armonico dato dall'equazione 12). Integrando su tutto il filo si ottiene

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{A}_0(t, \mathbf{r})}{s} \int_{s/2}^{s/2} dx' e^{-ikx' \cos \theta} = \mathbf{A}_0(t, \mathbf{r}) \frac{\sin(ks \cos \theta/2)}{(ks \cos \theta/2)}$$

Questo risultato differisce da  $A_0(t, \mathbf{r})$  solo per un fattore dipendente dalla lunghezza del filo e dall'angolo di emissione  $\theta$ . Pertanto la potenza emessa dal filo nell'angolo solido  $d\Omega$  differisce da quella emessa da un dipolo oscillante nell'origine con ugual frequenza ed ugual prodotto  $Is$  solo per il

$$\text{fattore di diffrazione} \quad \frac{\sin^2(\pi s \cos \theta/\lambda)}{(\pi s \cos \theta/\lambda)^2}$$

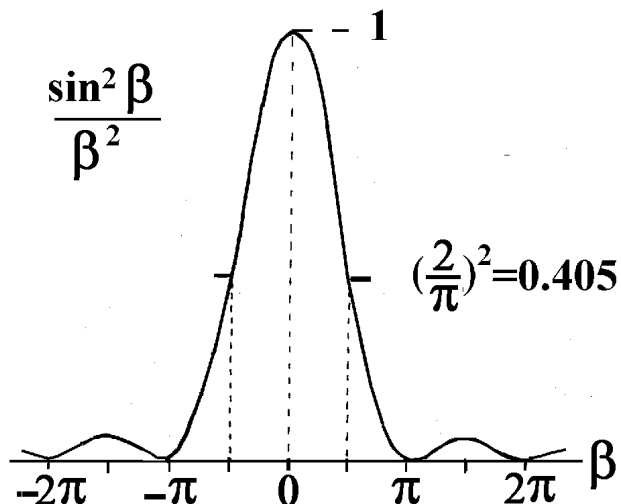
Tenendo conto delle equazioni 21) concludiamo che il lobo di emissione del filo percorso da corrente armonica è descritto da

$$\frac{dW(\theta)}{d\Omega} = \frac{Z_0 I^2}{8} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 \frac{\sin^2(\pi s \cos \theta/\lambda)}{(\pi s \cos \theta/\lambda)^2} \sin^2 \theta \quad (9.23)$$

La funzione  $\sin^2 \beta / \beta^2$ , riportata nella tabella seguente ed in figura 9, ha un picco principale di altezza unitaria per  $\beta = 0$ , ovvero in direzioni normali al filo, si annulla per  $\beta = \pi N$  con  $N$  intero non nullo e ha picchi secondari di altezza molto minore dell'unità per  $\beta \approx \pm 1.5\pi, \pm 2.5\pi, \dots$ . Il picco principale si estende da  $\beta = -\pi$  a  $\beta = \pi$  e ha altezze maggiori di  $(2/\pi)^2 = 0.405$  per  $\beta$  compreso tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . Si noti che i picchi secondari, oltre ad essere molto deboli, hanno larghezza metà di quella del picco principale.

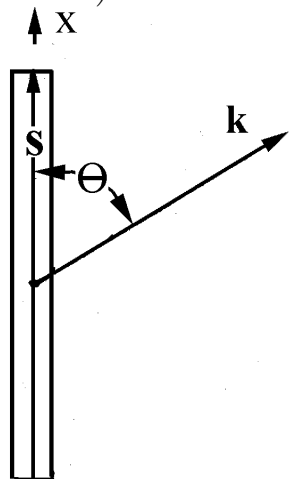
$\beta$	$\sin^2 \beta / \beta^2$
0	1
$0.05\pi$	0.992
$0.5\pi$	0.405
$\pi$	0
$1.5\pi$	1/22
$2\pi$	0
$2.5\pi$	1/62
$3\pi$	0
$3.5\pi$	1/121

Fig. 9.9

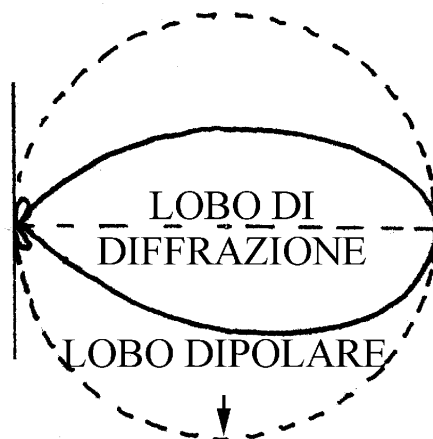


Dall'equazione 23) si vede che la potenza emessa nell'angolo solido  $d\Omega$  dipende da  $\theta$  sia perché ne dipende il fattore dipolare  $\sin^2 \theta$ , sia perché ne dipende il fattore di diffrazione. Quando  $s/\lambda$  è piccolo, diciamo minore di  $1/20$ , il fattore di diffrazione è quasi unitario su tutto l'angolo solido ed il filo emette con lobo toroidale come se fosse un dipolo armonico. Invece, quando  $s/\lambda$  è grande, il fattore dipolare è quasi unitario in tutta la regione occupata dal lobo principale, l'effetto di diffrazione diventa importante ed il lobo di emissione diventa più stretto di quello dipolare, come mostrato in figura 10. Ad esempio, per  $s/\lambda = 10$  il lobo principale ha zeri per  $\cos \theta = \pm \lambda/s = \pm 0.1$ , quindi si estende nell'intervallo  $84.3^\circ < \theta < 95.7^\circ$ .

Fig. 9.10 a)



b)



## 9.9 Antenna dipolare, resistenza di radiazione

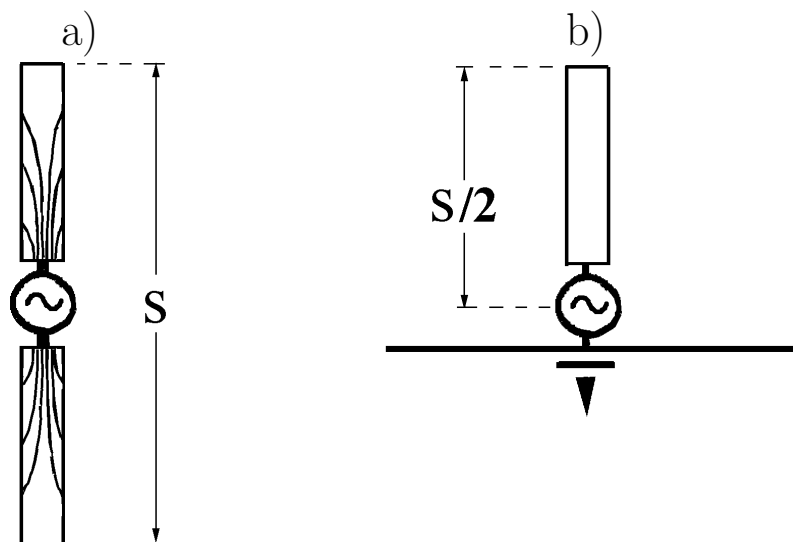
Nel paragrafo precedente abbiamo considerato un filo percorso da corrente armonica senza preoccuparci di dire come sia generata la corrente e come venga fornita la potenza irradiata. Ora concentriamo l'attenzione sul sistema mostrato in figura 11a): due sottili barrette contrapposte, di lunghezza complessiva  $s$ , alimentate al centro da un generatore di tensione armonica. Se le barrette fossero percorse dalla corrente  $I e^{-i\omega t}$  su tutta la loro lunghezza il sistema sarebbe equivalente al filo considerato in figura 10, e la distribuzione di potenza sarebbe data dall'equazione 23). Ma non è così: la distribuzione di corrente nelle barrette è indotta dal campo che essa stessa produce ed è tutt'altro che facile tenerne conto in modo consistente. Ma quando  $s$  non supera  $\lambda/2$  la situazione si semplifica notevolmente e può essere descritta come mostrato in figura 11a): le linee di flusso della densità di corrente nascono e terminano sulle superfici laterali delle barrette lasciando le regioni estreme neutre o quasi neutre. Di conseguenza la corrente diminuisce sin quasi ad annullarsi procedendo dal centro verso gli estremi ed è ragionevole pensare che il sistema emetta come se fosse percorso dalla corrente centrale  $I e^{-i\omega t}$  solo in una regione di lunghezza ben minore di  $s$ . In realtà è davvero così: il lobo di emissione non differisce sostanzialmente da quello dipolare anche per  $s = \lambda/2$ , ed una buona approssimazione della potenza irradiata si ottiene sostituendo  $s$  con  $0.62s$  nell'equazione 22). Insomma, la potenza totale irradiata da un'antenna di lunghezza minore di  $\lambda/2$ , alimentata al centro, è ben approssimata da

$$W \approx 0.4 Z_0 I^2 \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 \quad (9.24)$$

Oltre a questa potenza il generatore deve fornire la potenza dissipata nella resistenza ohmica  $R_{ohm}$  del circuito d'antenna, quindi deve erogare la potenza

$$W_{tot} = \frac{1}{2} R_{ohm} I^2 + 0.4 Z_0 I^2 \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2} I^2 \left[ R_{ohm} + 0.8 Z_0 \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2 \right]$$

Fig. 9.11



Si usa interpretare questa relazione dicendo che la parte reale dell'impedenza del circuito d'antenna è la somma della resistenza ohmica e della

$$\text{resistenza di radiazione} \quad R_{rad} = 0.8 Z_0 \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2$$

Ad esempio, un'antenna con  $s = \lambda/2$  ha  $R_{rad} \approx 75 \Omega$ , mentre un'antenna con  $s = \lambda/10$  ha  $R_{rad} \approx 3 \Omega$ . Tipicamente il circuito d'antenna ha resistenza ohmica di alcuni Ohm, quindi la prima antenna irradia circa il 95% della potenza fornita dal generatore, mentre la seconda spreca circa la metà della potenza fornita dissipandola per effetto Joule. Per questa ragione le antenne di lunghezza  $\lambda/2$  o poco minore sono molto usate in pratica.

Concludiamo il paragrafo con due note.

- Nel sistema considerato in figura 11b) il generatore è collegato tra una barretta ed il piano di massa, ad esempio la superficie terrestre. In tal caso alla barretta reale è associata la sua immagine rispetto al piano di massa, quindi i sistemi a) e b) sono equivalenti. Capiremo perché sia così quando studieremo la riflessione di onde elettromagnetiche da piani conduttori.
- Le antenne di lunghezza minore di  $\lambda/2$ , dette antenne dipolari, emettono con lobo quasi toroidale, quindi sono adatte per stazioni trasmittenti che vogliano raggiungere vaste aree.

## ESERCIZI

1) Un'antenna lunga  $10 \text{ cm}$  è percorsa dalla corrente di picco di  $10 \text{ A}$  con frequenza  $\omega = 10^9 \text{ s}^{-1}$ . Calcolare: a) i campi elettrico e magnetico a distanza di  $1 \text{ km}$  nel piano equatoriale, b) la potenza irradiata.

2) Le barrette in figura 11a) hanno lunghezza  $10 \text{ cm}$  ciascuna e sono alimentate da un generatore con  $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$  e potenza efficace  $1 \text{ kW}$ . Calcolare: a) la corrente di picco centrale nelle barrette, b) il campo elettrico a  $30 \text{ km}$  nel piano equatoriale.

3) Una stazione radio che emette con frequenza  $\omega = 10^7 \text{ s}^{-1}$  ha antenna verticale distante da noi  $10 \text{ km}$ . Noi misuriamo un campo elettrico con valore di picco di  $10 \text{ mV/m}$ . a) Quanto vale e come è diretto il potenziale vettore qui da noi? b) Quale potenza irradia l'antenna? c) Quale intensità ha la radiazione qui da noi?

## 9.10 Radiazione da cariche in moto armonico lento.

Fino ad ora abbiamo descritto la radiazione emessa da correnti distribuite in volumi fissi, ora studiamo la radiazione emessa da una carica  $q$  in moto armonico rettilineo con legge oraria  $x(t) = -s_0 \cos(\omega t)$ , quindi con velocità  $v(t) = \omega s_0 \sin(\omega t)$  ed accelerazione  $a(t) = \omega^2 s_0 \cos(\omega t)$ . Anzitutto notiamo che, a grandi distanze, i campi non differiscono da quelli che sarebbero prodotti se vi fosse anche una carica  $-q$  ferma nell'origine. Infatti la carica

ferma origina un campo elettrico che decade con il quadrato della distanza e, a grandi distanze, diventa trascurabile rispetto al campo elettrico di radiazione. In generale il calcolo del campo elettromagnetico emesso dalla carica oscillante non è semplice perché la corrente non è distribuita in un volume fisso: è localizzata nella regione occupata istantaneamente dalla carica. Impareremo a tenerne conto nel capitolo 15, qui procediamo ammettendo che la velocità di picco  $v_0 = \omega s_0$  sia molto minore di  $c$ . In tal  $ks_0 = s_0\omega/c = v_0/c$  è molto minore dell'unità e non vi sono differenze di fase apprezzabili per la radiazione che raggiunge un punto remoto provenendo dalle diverse posizioni occupate dalla carica. Quindi possiamo pensare che la carica oscillante sia un dipolo armonico concentrato nell'origine con momento di dipolo di picco  $p = qs_0$ . Sostituendo nell'equazione 22) possiamo concludere che: **una carica  $q$  in moto armonico con velocità molto minore della velocità della luce irradia potenza con valor medio temporale dato dalla**

$$\text{formula di Larmor} \quad W = \langle W(t) \rangle = \frac{q^2 s_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 v_0^2 \omega^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 a_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

dove  $a_0 = s_0\omega^2 = v_0\omega$  è il valore di picco dell'accelerazione. Si noti bene che  $W$  non dipende esplicitamente dalla massa della particella: a parità di accelerazione un elettrone ed un protone emettono la stessa potenza. Ma quando l'elettrone ed il protone sono stimolati dallo stesso campo, l'elettrone ha accelerazione 1836 volte maggiore del protone, quindi emette una potenza più di tre milioni di volte maggiore. Insomma **l'elettrone è il principale responsabile dell'emissione di radiazione elettromagnetica.**

Concludiamo riscrivendo la formula di Larmor per la carica in moto armonico in una forma che risulterà molto utile nel prossimo capitolo:

$$W = \frac{1}{2} m a_0^2 \mathcal{T} \quad (9.25)$$

dove

$$\mathcal{T} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \quad (9.26)$$

Il tempo  $\mathcal{T}$  è un parametro caratteristico della particella, ad esempio

$$\mathcal{T} \approx 6.3 \cdot 10^{-24} \text{ s} \text{ per l'elettrone} \quad , \quad \mathcal{T} \approx 3.4 \cdot 10^{-27} \text{ s} \text{ per il protone}$$

Aggiungiamo che, molto spesso, la formula di Larmor viene generalizzata scrivendo

$$W(t) = \frac{q^2 a^2(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

dove  $W(t)$  ed  $a(t)$  sono la potenza e l'accelerazione istantanee. Notiamo anche che il tempo  $\mathcal{T}$  è legato al raggio classico dell'elettrone  $r_e$  dalla relazione

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = \frac{3}{2} c \mathcal{T}$$

## 9.11 Significato della corrente di spostamento

Concludiamo il capitolo convenendo con Maxwell che il vuoto è un materiale come gli altri, diciamo un materiale con  $\epsilon = 1$  e  $\mu = 1$ . Maxwell lo chiamava etere perché non voleva rinunciare all'idea che un mezzo materiale fosse necessario per trasmettere le onde elettromagnetiche. Per capire il suo punto di vista si pensi alla **densità di corrente di spostamento** definita da

$$\mathbf{j}_s(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}_b(t, \mathbf{r}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial [\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) + \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})]}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

Il significato fisico attribuito da Maxwell a questa corrente è espresso dal nome: la densità di corrente  $\mathbf{j}_b(t, \mathbf{r})$  è dovuta agli spostamenti delle cariche di polarizzazione dei materiali, ed è ragionevole pensare che la densità di corrente  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) / \partial t$  sia dovuta agli spostamenti delle “cariche di polarizzazione dell'etere”, ipotetiche cariche tanto legate le une alle altre da non apparire mai come cariche libere. In altre parole: il campo  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  di Maxwell è il campo di polarizzazione della materia, etere incluso.

Forse Maxwell non immaginava che la sua teoria, basata sugli esperimenti di Coulomb, Volta, Ampère, Ohm e Faraday, avesse l'universalità che i successori le hanno attribuito, ma certamente ha donato all'umanità uno strumento di portata ineguagliabile.

# Capitolo 10

## Interazione di OPPMPL con elettroni liberi e legati

In questo capitolo studiamo l'interazione di OPPMPL (Onde Piane Progressive Monocromatiche Polarizzate Lineramente) con cariche libere e con cariche legate. Scopriamo che le OPPMPL, oltre a trasportare energia, trasportano momento nel verso del vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , e, guidati da Lorentz, scopriamo che le cariche tenute in moto da un'OPPMPL, sono soggette ad una nuova forma di forza d'attrito, la forza di frenamento radiativo. Poi, guidati da Einstein, scopriamo che le OPPM sono composte da onde elementari dotate di energia e momento proporzionali rispettivamente ad  $\omega$  ed a  $\mathbf{k}$ . Infine studiamo i processi di interazione delle OPPMPL con elettroni legati e scopriamo che gli effetti di risonanza giocano ruoli di estrema importanza e rendono colorata la nostra vita quotidiana.

### 10.1 Momento delle OPPM, pressione di radiazione

Con riferimento alla figura 1a), pensiamo che una particella libera di massa  $m$  e carica  $q = \pm e$  sia stimolata da un'OPPMPL con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  nel verso dell'asse  $z$ , con campo elettrico  $E \cos(kz - \omega t)$  polarizzato lungo l'asse  $x$ , quindi con campo magnetico  $(E/c) \cos(kz - \omega t)$  diretto lungo l'asse  $y$ . La forza di stimolo agente sulla particella in moto con velocità  $\mathbf{v}(t)$  vale

$$\mathbf{F}_S(t, z) = q[\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}] \cos(kz - \omega t)$$

e non dipende dalle coordinate  $x$  ed  $y$ . La sua componente  $y$  è nulla, qualunque sia  $\mathbf{v}$ , mentre le componenti  $x$  e  $z$  sono

$$F_{Sx}(t, z) = qE \left[ 1 - \frac{v_z(t)}{c} \right] \cos(kz - \omega t) \quad , \quad F_{Sz}(t, z) = qE \frac{v_x(t)}{c} \cos(kz - \omega t)$$

Qui emerge un fatto importante:  $F_{Sz}(t, z)$  è legata alla potenza  $W_S(t, z)$  fornita alla particella dalla forza di stimolo dalla relazione

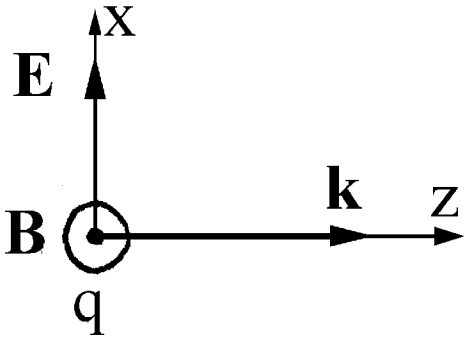
$$F_{Sz}(t, z) = \frac{W_S(t, z)}{c} \quad (1)$$

infatti

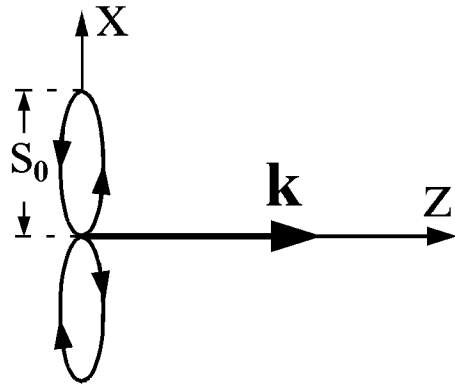
$$W_S(t, z) = \mathbf{F}_S(t, z) \cdot \mathbf{v}(t) = qEv_x(t) \cos(kz - \omega t)$$

L'equazione 1) ha una conseguenza importantissima: **quando la particella assorbe dall'onda l'energia  $\mathcal{E}$ , assorbe anche il momento  $\mathcal{E}/c$  diretto nel verso di  $\mathbf{k}$** . Quindi dobbiamo ammettere che **le OPPM, oltre a trasportare energia, trasportino momento nel verso del vettore d'onda**: se non fosse così la legge di conservazione del momento sarebbe violata. Pertanto il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$  acquista ulteriori significati. Sappiamo già

Fig. 10.1 a)



b)



che

$$\langle \mathbf{S} \rangle = c \langle u_{em} \rangle \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (10.2)$$

è la densità di flusso d'energia, ovvero la densità superficiale di potenza trasportata dall'OPPM. Ora abbiamo scoperto che

$$\frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{c} = \langle u_{em} \rangle \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (10.3)$$

è la **densità di flusso di momento**. Questa grandezza è la **pressione di radiazione** associata all'OPPM. Per convincercene pensiamo che l'OPPM incida su una superficie scambiando energia e momento con le cariche del materiale e notiamo che possono verificarsi le seguenti situazioni.

- Quando l'OPPM incide normalmente e viene completamente assorbita cede alla superficie la densità superficiale di potenza  $\langle S \rangle$  ed esercita la densità superficiale di forza  $\langle S \rangle / c = \langle u_{em} \rangle$ .
- Quando l'OPPM incide normalmente e viene totalmente riflessa possiamo pensare che la radiazione sia assorbita e rimessa all'indietro, quindi l'OPPM non cede potenza, ma esercita la pressione  $2 \langle S \rangle / c = 2 \langle u_{em} \rangle$ .
- Quando l'OPPM incide con angolo di incidenza  $\theta$  e viene totalmente riflessa non cede potenza, ma esercita la pressione  $2 \langle u_{em} \rangle \cos \theta$ .

Infine notiamo che anche il momento associato all'OPPM fluisce con velocità  $c$ , quindi dobbiamo attribuire all'OPPM la **densità di momento**

$$\frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{c^2} = \frac{\langle u_{em} \rangle \mathbf{k}}{c k} = \langle u_{em} \rangle \frac{\mathbf{k}}{\omega} \quad (10.4)$$



## ESERCIZI

1) Un'OPPMPL, con  $k = 10^3 \text{ m}^{-1}$  e intensità  $1 \text{ W/m}^2$  incide su una superficie di area  $10 \text{ cm}^2$ . Calcolare: a) il valore di picco del campo elettrico incidente, b) il flusso d'energia incidente, c) il flusso di momento incidente.

2) Un'OPPMPL con  $\omega = 10^{15} \text{ s}^{-1}$  e campo elettrico di picco di  $10 \text{ V/m}$  incide normalmente su una superficie nera di area  $100 \text{ cm}^2$ . Per definizione la **superficie nera** assorbe tutta la potenza incidente. Calcolare: a) la potenza assorbita, b) la forza esercitata dall'OPPM sulla superficie.

3) Un'OPPMPL con  $\omega = 10^{15} \text{ s}^{-1}$  e campo elettrico di picco di  $10 \text{ V/m}$ , incide su uno specchio perfetto di area  $100 \text{ cm}^2$  con angolo di incidenza di  $30^\circ$ . Calcolare la forza agente sullo specchio.

## 10.2 Carica libera tenuta in moto da un'OPPMPL

L'equazione 1) vale qualunque sia la velocità  $\mathbf{v}(t)$  della particella stimolata dall'OPPMPL, ma ora non conosciamo le leggi della dinamica relativistica e dobbiamo limitare l'attenzione a velocità piccole rispetto a  $c$ . Precisamente pensiamo che la carica sia tenuta in moto dall'OPPMPL ed oscilli intorno all'origine con  $v(t) \ll c$ , riservandoci di mostrare che in tal caso  $kz$  e  $v_z(t)/c$  sono trascurabili non solo rispetto all'unità, ma anche rispetto a  $v(t)/c$ . Ad esempio per  $v(t)/c < 10^{-6}$  vedremo che  $kz$  risulta minore di  $1.25 \cdot 10^{-13}$  e  $v_z(t)/c$  risulta minore di  $2.5 \cdot 10^{-13}$ . In tali situazioni le componenti della forza di stimolo non dipendono significativamente dalla posizione della particella e sono descritte quasi esattamente dalle equazioni

$$F_{Sx}(t) = qE \cos(\omega t) \quad , \quad F_{Sz}(t) = qE \frac{v_x(t)}{c} \cos(\omega t)$$

Dalla prima equazione si deduce che le componenti  $x$  dell'accelerazione, della velocità e dello spostamento della particella sono

$$a_x(t) = a_0 \cos(\omega t) \quad , \quad v_x(t) = v_0 \sin(\omega t) \quad , \quad x(t) = -s_0 \cos(\omega t)$$

dove

$$a_0 = \frac{qE}{m} \quad , \quad v_0 = \frac{qE}{m\omega} \quad , \quad s_0 = \frac{qE}{m\omega^2}$$

Sostituendo  $v_x(t)$  con  $v_0 \sin(\omega t)$  in  $F_{Sz}(t)$  si vede che le componenti  $z$  di accelerazione, velocità e spostamento oscillano con frequenza  $2\omega$  e hanno valori di picco piccoli rispetto a quelli delle componenti  $x$ , precisamente

$$a_z(t) = a_0 \frac{v_0}{2c} \sin(2\omega t) \quad , \quad v_z(t) = -v_0 \frac{v_0}{4c} \cos(2\omega t) \quad , \quad z(t) = -s_0 \frac{v_0}{8c} \sin(2\omega t)$$

Quindi la traiettoria della particella ha la forma ad 8 mostrata qualitativamente in figura 1b). Si noti però che il rapporto larghezza/altezza dell'8 è uguale a  $v_0/8c$ , se ne avessimo tenuto conto nel disegnare la figura, la traiettoria sarebbe risultata indistinguibile da un segmento.

A prima vista il calcolo fatto sembra perfettamente consistente, infatti i valori di picco di  $v_z(t)/c$  e di  $kz(t)$  risultano  $v_0^2/4c^2$  e  $\omega s_0 v_0/8c^2 = v_0^2/8c^2$ , quindi sono davvero trascurabili quando  $v_0/c$  è piccolo. Ma un esame più attento fa emergere un problema serio: la carica oscillante emette potenza come precisato dalla formula di Larmor 9.35), precisamente emette due onde dipolari, una con frequenza  $\omega$  distribuita con lobo dipolare intorno all'asse  $x$  ed una con frequenza  $2\omega$ , molto meno intensa, distribuita con lobo dipolare intorno all'asse  $z$ . Ma se i nostri calcoli fossero corretti il valor medio temporale della potenza ceduta dall'OPPMPL alla particella risulterebbe nullo e la legge di conservazione dell'energia sarebbe violata, infatti

$$\langle W_S(t) \rangle = qE \langle v_x(t) \cos(\omega t) \rangle = \frac{qE v_0}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

Nel 1892 Lorentz ha affrontato il problema e lo ha risolto introducendo un nuovo tipo di forza d'attrito, la **forza di frenamento radiativo** che consideriamo nel prossimo paragrafo.

### ESERCIZI

1) Un'OPPMPL di frequenza  $\omega = 10^{12} \text{ s}^{-1}$  ha campo elettrico con valore di picco di  $1700 \text{ V/m}$ . a) Per un elettrone tenuto in moto dall'onda calcolare i valori di picco dell'accelerazione, della velocità e dello spostamento. b) Come a) ma per un protone.

2) Considerare una particella stimolata da un'OPPM di frequenza  $\omega$  e calcolare il rapporto tra la potenza emessa con l'onda dipolare di frequenza  $\omega$  e quella emessa con l'onda dipolare di frequenza  $2\omega$ .

## 10.3 Forza di frenamento di Lorentz

Continuiamo a far riferimento alla figura 1a) e continuiamo a pensare che  $v_0/c$  sia piccolissimo, ma ora teniamo conto che la carica emette radiazione e deve prelevare dall'onda la potenza irradiata  $W$ , data dall'equazione 9.35). Pertanto la componente  $v_x(t)$  della velocità deve soddisfare la condizione

$$\langle W_S(t) \rangle = qE \langle v_x(t) \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} m a_0^2 \mathcal{T} \quad (10.5)$$

e non può essere esattamente uguale a  $v_0 \sin(\omega t)$ , deve differirne per un termine proporzionale a  $\cos(\omega t)$ . Per valutare tale termine ammettiamo che l'accelerazione di picco non differisca apprezzabilmente da  $a_0 = qE/m$ , riservandoci di mostrare che è davvero così. Sostituendo  $qE$  con  $ma_0$  nell'equazione 5) rimaniamo alle prese con la condizione

$$\langle v_x(t) \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} a_0 \mathcal{T}$$

e vediamo che  $v_x(t)$  deve essere

$$v_x(t) = v_0 \sin(\omega t) + a_0 \mathcal{T} \cos(\omega t) = v_0 [\sin(\omega t) + \omega \mathcal{T} \cos(\omega t)]$$

Quindi la componente  $x$  dell'accelerazione deve avere l'andamento

$$a_x(t) = \omega v_0 [\cos(\omega t) - \omega \mathcal{T} \sin(\omega t)] \quad (10.6)$$

Si noti che il termine  $\omega \mathcal{T}$  è quasi sempre estremamente piccolo: per un elettrone prende valori intorno a  $3 \cdot 10^{-8}$  a frequenze ottiche e raggiunge  $10^{-3}$  solo alla frequenza di  $1.5 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$ , frequenza che separa approssimativamente la banda dei raggi X da quella dei raggi  $\gamma$ . Dunque la legge oraria della particella differisce molto poco da quella descritta nel paragrafo precedente, almeno fino a quando la frequenza non entra nella banda dei raggi  $\gamma$ . Si noti anche che il valor medio temporale di  $a_x(t)$  è nullo, quindi il valor medio temporale dell'accelerazione è diretto nel verso di  $\mathbf{k}$ . Precisamente, partendo dall'equazione 1) si vede che l'accelerazione media vale

$$\langle a_z(t) \rangle = \frac{W}{mc} = \frac{a_0^2}{2c} \mathcal{T} = a_0 \frac{v_0}{2c} \omega \mathcal{T}$$

Questo valore è estremamente piccolo rispetto ad  $a_0$ , sia perché  $\omega \mathcal{T}$  è piccolissimo, sia perché  $v_0/2c$  è piccolo per ipotesi. Quindi è lecito descrivere la traiettoria come un 8 strettissimo accelerato come un tutto nel verso di  $\mathbf{k}$ .

A questo punto moltiplichiamo per  $m$  ambo i membri dell'equazione 6), ricordiamo che  $m\omega v_0 \cos(\omega t)$  è la componente  $x$  della forza di stimolo, che  $v_0 \sin(\omega t) = v_x(t)$  e notiamo che la componente  $x$  della forza risultante può essere scritta nell'una o l'altra delle forme

$$ma_x(t) = F_{Sx}(t) - m\omega^2 \mathcal{T} v_x(t) \quad , \quad ma_x(t) = F_{Sx}(t) + m\mathcal{T} \frac{da_x(t)}{dt}$$

La prima equazione dice che la carica viene accelerata dalla forza di stimolo e viene frenata da una forza d'attrito proporzionale alla velocità. Ciò è certamente vero per cariche in moto armonico ma non può essere vero in generale, infatti una carica non stimolata persevera nel suo stato di moto rettilineo uniforme senza emettere radiazione, quindi senza essere frenata. La seconda forma è quella scelta da Lorentz e può essere generalizzata scrivendo

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}_S(t) + \mathbf{F}_R(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_R(t) = m\mathcal{T} \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \quad (10.7)$$

In parole: la risultante delle forze agenti su una carica stimolata dalla forza  $\mathbf{F}_S(t)$  è la somma di tale forza e della **reazione di radiazione**  $\mathbf{F}_R(t)$ , detta anche **forza di frenamento radiativo** o **forza di frenamento di Lorentz**. Questa forza differisce da una comune forza d'attrito perché non agisce mai da sola, insorge solo quando una carica viene stimolata da una

forza dipendente dal tempo. Si noti però che la forza di frenamento di Lorentz prevede che una carica in moto rettilineo uniformemente accelerato non sia frenata, cosa che sembra in contrasto con il fatto che la carica irradia. Il lettore interessato ad affrontare questo problema, tutt'altro che semplice, può partire dalla tesi di dottorato di Michele Vallisneri, disponibile nel sito web vallis.org, noi ci limitiamo a ribadire che l'equazione 7) è certamente adeguata quando una forza di stimolo dipendente dal tempo agisce davvero.

Infine sottolineiamo che **la reazione di radiazione**, pur essendo quasi sempre molto piccola rispetto alla forza di stimolo, svolge un ruolo fondamentale: **governa gli scambi di energia e di momento tra il campo elettromagnetico e le particelle cariche.**

## ESERCIZI

1) Un elettrone oscilla con legge oraria  $x(t) = s_0 \cos(\omega t)$ , con  $s_0 = 10^{-15} \text{ m}$  e con  $\omega = 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Calcolare: a) la potenza irradiata, b) la reazione di radiazione, c) la forza che deve stimolare l'elettrone per tenerlo in moto con la data legge oraria.

2) Un elettrone descrive una circonferenza di raggio  $s_0 = 10^{-10} \text{ m}$  con frequenza angolare  $\omega = 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . a) Verificare che la condizione  $v_0 \ll c$  sia soddisfatta. b) Calcolare la potenza che deve essere fornita per mantenere l'elettrone in moto circolare uniforme (pensare alla sovrapposizione di due dipoli armonici ortogonali.)

3) Un elettrone è in moto con velocità  $v = 10^6 \text{ m/s}$  in un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme di intensità  $B = 1 \text{ T}$ . a) Valutare la reazione di radiazione, b) Calcolare la potenza che deve essere fornita all'elettrone per mantenere  $v$  costante.

## 10.4 Effetto fotoelettrico, fotoni

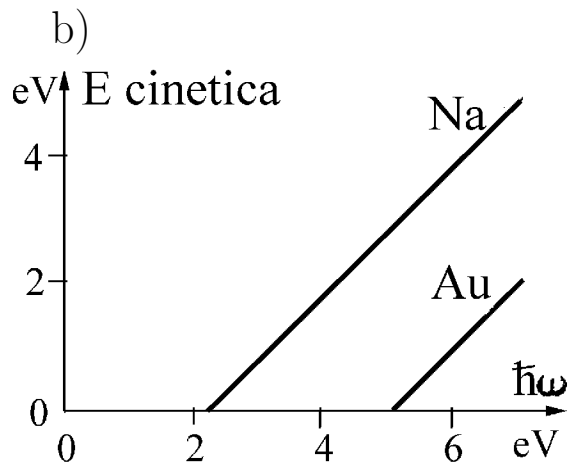
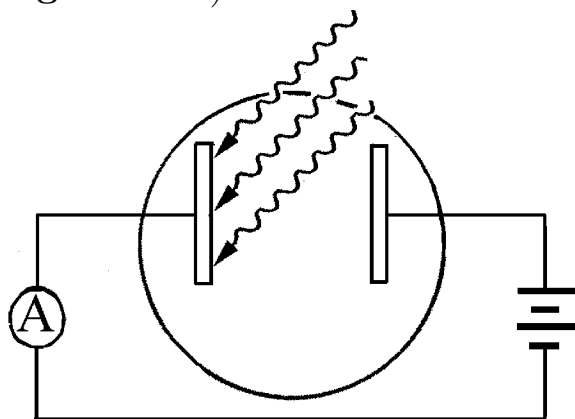
Nel novembre del 1900 Planck pubblica un lavoro che risolve il problema del corpo nero e ne apre molti altri. Noi affronteremo il problema del corpo nero nell'ultimo capitolo, qui anticipiamo che Planck interpreta i fatti sperimentali relativi all'emissione di radiazione da corpi caldi ammettendo che l'energia di un campo elettromagnetico di frequenza  $\omega$  possa assumere solo valori multipli interi di  $\hbar\omega$ , con

$$\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \approx 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$$

Ciò era sorprendente per lo stesso Planck: la teoria di Maxwell descriveva tanto bene le onde elettromagnetiche ed i fenomeni di diffrazione ed interferenza da scoraggiare anche i più convinti sostenitori della teoria corpuscolare della radiazione. Ma ben presto i risultati sperimentali sull'effetto fotoelettrico portano un forte sostegno all'ipotesi di Planck.

In figura 2a) è schematizzato l'apparato usato da Lenard per lo studio dell'effetto fotoelettrico: due lastre metalliche affacciate sono inserite in un bulbo di vetro evacuato e, mediante fili metallici passanti attraverso il vetro, sono alimentate da una batteria. Un amperometro molto sensibile (galvanometro) misura la corrente che fluisce nel circuito. I risultati ottenuti da Lenard possono essere riassunti come segue.

Fig. 10.2: a)



- Quando la lastrina collegata al morsetto negativo viene investita da radiazione ultravioletta, anche relativamente debole, il circuito è percorso da una corrente proporzionale all'intensità della radiazione incidente.
- Quando la radiazione è rossa o infrarossa non passa corrente, anche nel caso che la radiazione sia estremamente intensa.
- La corrente insorge quando la frequenza supera un valore, detto **soglia fotoelettrica**, dipendente dal metallo e dallo stato della sua superficie.

A questo punto interviene Einstein e concilia le teorie ondulatoria e corpuscolare avanzando l'ipotesi che le onde maxwelliane di frequenza  $\omega$  siano composte da onde elementari indipendenti, dette in seguito **fotoni**, ciascuna dotata di energia  $\hbar\omega$ . Con tale idea le misure di Lenard trovano una semplicissima interpretazione: i fotoni rossi ed infrarossi ( $\omega < 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ) hanno energie che non raggiungono  $2 \text{ eV}$ , non sufficienti ad estrarre gli elettroni dai comuni metalli, quindi non producono il passaggio di corrente nella cella, invece un fotone violetto o ultravioletto può cedere ad un elettrone del metallo un'energia uguale o maggiore di quella necessaria a farlo uscire nel vuoto, quindi l'illuminazione con fotoni violetti o ultravioletti genera nella cella una corrente proporzionale all'intensità incidente. Pertanto la misura della frequenza di soglia per emissione fotoelettrica diventa una misura dell'energia di estrazione degli elettroni dai metalli e conduce ai risultati riportati nella tabella del paragrafo 3.8. Aggiungiamo che l'energia cinetica degli elettroni fotoemessi dipende dall'energia dei fotoni incidenti come mostrato in figura 2b): è la differenza tra l'energia dei fotoni incidenti e l'energia di estrazione. Ad esempio con fotoni da  $6 \text{ eV}$  gli elettroni fotoemessi dal sodio e dall'oro hanno rispettivamente energia cinetica di  $3.8 \text{ eV}$  e di  $0.8 \text{ eV}$ .

Einstein non si limita ad interpretare gli esperimenti di Lenard e, partendo dai risultati classici visti nel primo paragrafo, oltre ad attribuire al fotone l'energia  $\hbar\omega$ , gli attribuisce il momento  $\hbar\mathbf{k}$ .

Naturalmente quando un fotone viene assorbito da un materiale, oltre a cedere al materiale la sua energia, cede il suo momento, in modo che l'energia ed il momento complessivi si conservino. Viceversa un sistema che emette un fotone con vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , oltre a perdere l'energia  $\mathcal{E} = \hbar\omega$ , deve perdere il momento  $\hbar\mathbf{k}$ .

## ESERCIZI

1) Un fascio parallelo di fotoni di energia  $300 \text{ eV}$  ha sezione trasversa di  $10 \text{ mm}^2$  e flusso di  $10^{10} \text{ fotoni/s}$ . Calcolare: a) il vettore di Poynting, b) il flusso di momento, c) le densità di energia e di momento.

2) Ripensare agli esercizi 2) e 3) del paragrafo 1 e calcolare: a) il flusso di fotoni incidenti sulla superficie nera e sullo specchio perfetto, b) l'energia ed il momento ceduti da un fotone nei due casi.

3) La frequenza di soglia per emissione fotoelettrica dall'argento vale  $\approx 7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Calcolare la massima energia cinetica degli elettroni emessi dal metallo quando i fotoni incidenti hanno energia di  $100 \text{ eV}$ .

## 10.5 Scattering Thomson

Torniamo a considerare l'interazione di un'OPPMPL con una carica libera e precisiamo quanto detto nel paragrafo 2. Come allora, scegliamo l'origine dei tempi in modo che il campo elettrico di stimolo risulti (la parte reale di)

$$E(t) = E e^{-i\omega t} \quad \text{con } E \text{ reale} \quad (10.8)$$

Ma ora, per semplificare i calcoli, scriviamo l'accelerazione sull'asse del campo elettrico come

$$a(t) = a e^{-i\omega t}, \quad \text{lasciando } a \text{ libero di essere complesso} \quad (10.9)$$

Consistentemente con tale scelta dobbiamo ricordare che il quadrato dell'accelerazione di picco è uguale ad  $aa^*$ . Sostituendo le equazioni 8) e 9) nelle 7) otteniamo

$$ma = qE - i\omega \mathcal{T} ma \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{qE}{m} \frac{1}{1 + i\omega \mathcal{T}} \quad \Longrightarrow \quad aa^* = \frac{e^2 E^2}{m^2} \frac{1}{1 + (\omega \mathcal{T})^2}$$

Poiché  $\omega \mathcal{T}$  è piccolissimo persino per frequenze nella banda dei raggi X, possiamo trascurare il suo quadrato senza errori significativi. Sostituendo nell'equazione 9.35), otteniamo

$$W = \frac{1}{2} m a a^* \mathcal{T} = \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2}{m} \mathcal{T} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E^2 \frac{e^2 \mathcal{T}}{m \epsilon_0 c}$$

La grandezza  $c\epsilon_0 E^2/2$  messa a fattore nel termine di destra è il valor medio temporale della densità di flusso d'energia incidente, infatti

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{2}c \langle \epsilon_0 E^2(t) + \frac{B^2(t)}{\mu_0} \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2(t) \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E^2$$

Come d'uso diciamo che  $\langle S(t) \rangle = \mathcal{I}$  è l'intensità dell'onda e scriviamo  $W$  nella forma

$$W = \mathcal{I} \sigma_T \quad \text{dove} \quad \sigma_T = \frac{e^2 \mathcal{T}}{m\epsilon_0 c} \quad (10.10)$$

In parole: **la potenza sottratta all'onda incidente ed irradiata con lobo dipolare da una carica libera è il prodotto dell'intensità dell'onda incidente per la sezione d'urto Thomson  $\sigma_T$  della particella.** Ricordando l'equazione 9.36) vediamo che

$$\sigma_T = \frac{e^2}{m\epsilon_0 c} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

In particolare le sezioni d'urto Thomson dell'elettrone e del protone sono rispettivamente

$$\sigma_T \approx 6.7 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 \quad , \quad \sigma_T \approx 2 \cdot 10^{-35} \text{ m}^2$$

L'equazione 10) può suggerire l'idea che la particella sia una pallina di sezione  $\sigma_T$  che intercetta e rimuove dal fascio tutti i fotoni che la colpiscono. Ma una tale idea deve essere rimossa per le seguenti ragioni. 1) L'elettrone sembra davvero una particella puntiforme: finora è sfuggito ad ogni tentativo di mettere in evidenza una sua struttura interna. 2) Il protone ha una sezione geometrica tre ordini di grandezza maggiore della sua sezione d'urto Thomson. 3) I fotoni non sono particelle puntiformi, ad esempio, i fotoni emessi dai puntatori laser hanno sezioni non molto minori di quelle della macchia luminosa che formano sullo schermo, quindi enormemente maggiori delle sezioni d'urto Thomson. Torneremo su questo punto nel capitolo 17.

## 10.6 Interazione di OPPMPL con elettroni legati

Continuiamo a far riferimento alla figura 1a), ma ora pensiamo che l'OPPMPL stimoli un elettrone legato all'origine dalla forza di richiamo elastica

$$F_{elastica}(t) = -m\omega_0^2 x(t)$$

In tal caso la forza risultante è la somma della forza di stimolo  $-eE(t)$ , della forza elastica e della reazione di radiazione  $m\mathcal{T}d^3x(t)/dt^3$ , quindi l'accelerazione vale

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{eE(t)}{m} - \omega_0^2 x(t) + \mathcal{T} \frac{d^3x(t)}{dt^3}$$

Sostituendo  $E(t)$  con  $Ee^{-i\omega t}$  ed  $x(t)$  con  $se^{-i\omega t}$  si vede che lo spostamento complesso  $s$  è legato ad  $E$  dalla relazione algebrica

$$-\omega^2 s = -\frac{eE}{m} - \omega_0^2 s + iT\omega^3 s \implies s = -\frac{eE}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - iT\omega^3} \implies$$

$$ss^* = \frac{e^2 E^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + T^2 \omega^6}$$

Sostituendo nell'equazione 9.35) si vede che **la potenza sottratta all'onda incidente ed irradiata con lobo dipolare dall'elettrone legato vale**

$$W = \frac{e^2 E^2}{2m} \frac{\omega^4 T}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + T^2 \omega^6} = \left[ \frac{c\epsilon_0 E^2}{2} \right] \left[ \frac{e^2 T}{\epsilon_0 m c} \right] \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + T^2 \omega^6}$$

Ricordando che il primo dei fattori in parentesi quadra è l'intensità dell'onda incidente ed il secondo è la sezione d'urto Thomson, si vede che la potenza sottratta all'onda incidente ed irradiata dall'elettrone legato risulta

$$W(\omega) = \mathcal{I}\sigma(\omega) \quad \text{dove} \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_T \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + T^2 \omega^6} \quad (10.11)$$

Per  $\omega = \omega_0$  l'onda e l'elettrone legato sono in **piena risonanza** e la sezione d'urto vale

$$\sigma(\omega_0) = \frac{\sigma_T}{T^2 \omega_0^2} \quad (10.12)$$

A frequenze ottiche  $T\omega_0$  è dell'ordine di  $10^{-7}$ , quindi la sezione d'urto di piena risonanza è quattordici ordini di grandezza maggiore della sezione d'urto dell'elettrone libero  $\sigma_T$ . Per frequenze un po' diverse da quella di piena risonanza il rapporto tra le sezioni d'urto dell'elettrone legato e dell'elettrone libero prende i valori riportati nella tabella seguente; si noti che l'effetto di risonanza rimane fortissimo in tutta la banda considerata in tabella. Insomma, **per frequenze non molto diverse da quella di piena risonanza l'elettrone legato è enormemente più efficace dell'elettrone libero nel diffondere la radiazione incidente.**

**Rapporto tra le sezioni d'urto dell'elettrone legato e dell'elettrone libero per una risonanza con  $T\omega_0 = 10^{-7}$**

$\omega/\omega_0$	0.9	0.99	0.9995	1	1.0005	1.01	1.1
$\sigma(\omega)/\sigma_T$	18	2426	$10^6$	$10^{14}$	$10^6$	2576	33

In particolare nella banda  $0.9995\omega_0 < \omega < 1.0005\omega_0$  la sezione d'urto varia di otto ordini di grandezza, ma rimane sempre almeno un milione di volte maggiore di  $\sigma_T$ , quindi conviene riscriverla sostituendo  $\sigma_T$  con  $\sigma(\omega_0)T^2\omega_0^2$ . Inoltre non commettiamo errori significativi sostituendo  $\omega$  con  $\omega_0$  ovunque tranne che nel termine  $(\omega_0 - \omega)^2$ . Otteniamo così

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(\omega_0)T^2\omega_0^6}{(2\omega_0)^2(\omega_0 - \omega)^2 + T^2\omega_0^6} = \frac{\sigma(\omega_0)(T\omega_0^2/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (T\omega_0^2/2)^2}$$



Fig. 10.3

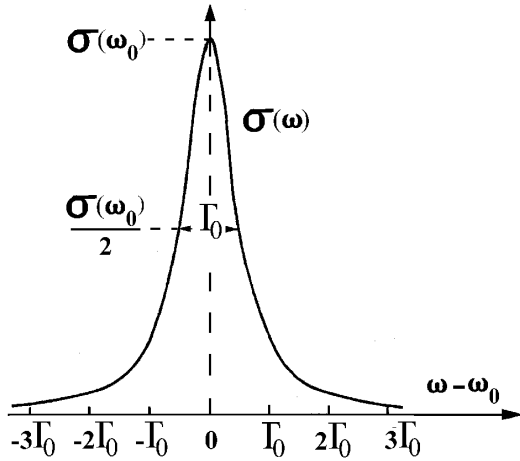
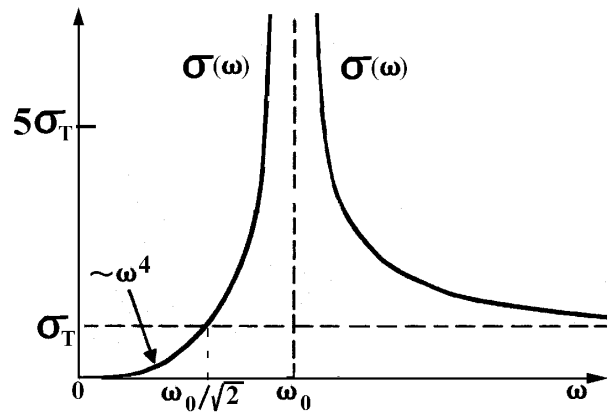


Fig. 10.4



In questa forma si vede bene che la frequenza

$$\Gamma_0 = \mathcal{T}\omega_0^2 \quad (10.13)$$

è la **larghezza a metà altezza** della risonanza, infatti  $\sigma(\omega)$  si riduce alla metà del valore di picco per  $\omega = \omega_0 \pm \Gamma_0/2$ , come mostrato in figura 3. Insomma nella banda di risonanza la sezione d'urto ha la **forma lorenziana**

$$\sigma(\omega) = \sigma(\omega_0) F(\omega) \quad \text{dove} \quad F(\omega) = \frac{(\Gamma_0/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_0/2)^2} \quad (10.14)$$

Esternamente alla banda di risonanza la sezione d'urto diventa asimmetrica rispetto ad  $\omega_0$ , come mostrato in figura 4, e può essere calcolata trascurando  $\mathcal{T}^2\omega^6$  nel denominatore dell'equazione 11). In particolare, per  $\omega \ll \omega_0$  la sezione d'urto si riduce alla

$$\text{sezione d'urto Rayleigh} \quad \sigma_R(\omega) = \sigma_T \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (10.15)$$

ed è una piccolissima frazione della già piccola sezione d'urto Thomson. Invece, per  $\omega > \omega_0$ ,  $\sigma(\omega)$  è sempre maggiore di  $\sigma_T$  e tende a  $\sigma_T$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

Infine ricordiamo che  $\mathcal{T}$  e  $\sigma_T$  sono dati dalle equazione 9.36) e 10) e notiamo che **la sezione d'urto di piena risonanza dipende solo dalla frequenza di risonanza**, infatti

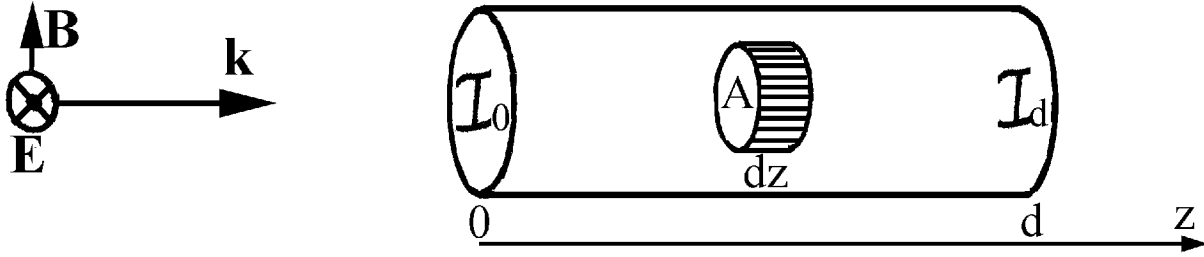
$$\sigma(\omega_0) = \frac{\sigma_T}{\mathcal{T}^2\omega_0^2} = \frac{e^2}{m\epsilon_0 c \mathcal{T} \omega_0^2} = \frac{e^2}{m\epsilon_0 c \omega_0^2} \frac{6\pi\epsilon_0 m c^3}{e^2} = \frac{6\pi c^2}{\omega_0^2} \quad (10.12')$$

Anticipiamo però che questo risultato classico sovrastima la sezione d'urto di piena risonanza di un fattore 3.

## 10.7 Sezioni d'urto di atomi rilassati

Per misurare la sezione d'urto  $\sigma(\omega)$  di una specie atomica possiamo usare una **cella d'assorbimento** del tipo mostrato in figura 5. La cella ha finestre d'ingresso e d'uscita (quasi) perfettamente trasparenti alla radiazione,

Fig. 10.5



separate dalla distanza  $d$ . Un fascio di radiazione di frequenza  $\omega$  selezionabile, centrato sull'asse della cella, attraversa la cella senza toccare le pareti laterali. Inizialmente la cella viene portata in condizioni di ultra alto vuoto per eliminare (quasi) tutte le sostanze volatili. In tal caso le intensità del fascio all'ingresso ed all'uscita della cella,  $\mathcal{I}_0$  e  $\mathcal{I}_d$ , sono (quasi) uguali. Poi la cella viene riempita con il gas monoatomico d'interesse a pressione dell'ordine di un milionesimo di atmosfera, avendo cura di misurare con precisione la densità  $n_\alpha$  di atomi nella cella. In tal caso  $\mathcal{I}_d$  è minore di  $\mathcal{I}_0$  perché gli atomi diffondono una parte dei fotoni incidenti. In realtà può avvenire che una frazione più o meno grande degli atomi presenti nella cella venga eccitata dalla radiazione, e ciò può originare fenomeni interessanti che discuteremo nel capitolo 17. Qui pensiamo che l'intensità del fascio sia tanto piccola da poter trascurare la frazione di atomi eccitati. In tal caso è facile valutare la **sezione d'urto d'assorbimento**  $\sigma(\omega)$  partendo dalle misure di  $n_\alpha$ ,  $d$ ,  $\mathcal{I}_0$  e  $\mathcal{I}_d$ . Allo scopo fissiamo l'attenzione sul cilindretto compreso tra  $z$  e  $z + dz$  ed indichiamo con  $A$  l'area delle sue basi. La potenza  $dW$  **persa** dal fascio in tale cilindretto vale

$$A[\mathcal{I}(z) - \mathcal{I}(z + dz)] = -Adz \frac{d\mathcal{I}(z)}{dz}$$

D'altra parte sappiamo che ciascuno degli  $n_\alpha Adz$  atomi presenti nel cilindretto rimuove dal fascio la potenza  $\sigma(\omega)\mathcal{I}(z)$ , quindi possiamo scrivere

$$dW = n_\alpha Adz \sigma(\omega) \mathcal{I}(z) = -Adz \frac{d\mathcal{I}(z)}{dz} \quad \implies \quad \frac{d\mathcal{I}(z)}{dz} = -n_\alpha \sigma(\omega) \mathcal{I}(z)$$

e possiamo concludere che l'intensità decade lungo il percorso con legge

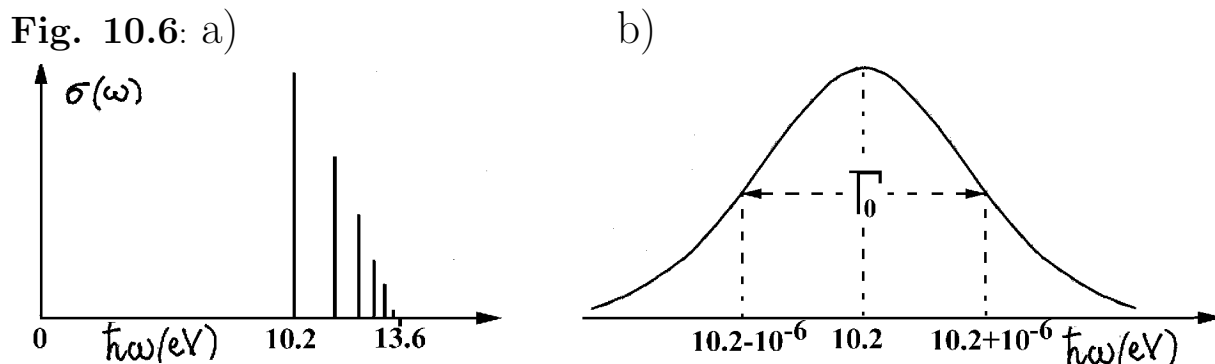
$$\mathcal{I}(z) = \mathcal{I}_0 e^{-n_\alpha \sigma(\omega) z} \quad (10.16)$$

Pertanto le misure di  $n_\alpha$ ,  $d$ ,  $\mathcal{I}_0$  e  $\mathcal{I}_d$  forniscono la sezione d'urto

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{n_\alpha d} \log \left( \frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}_d} \right) \quad (10.17)$$

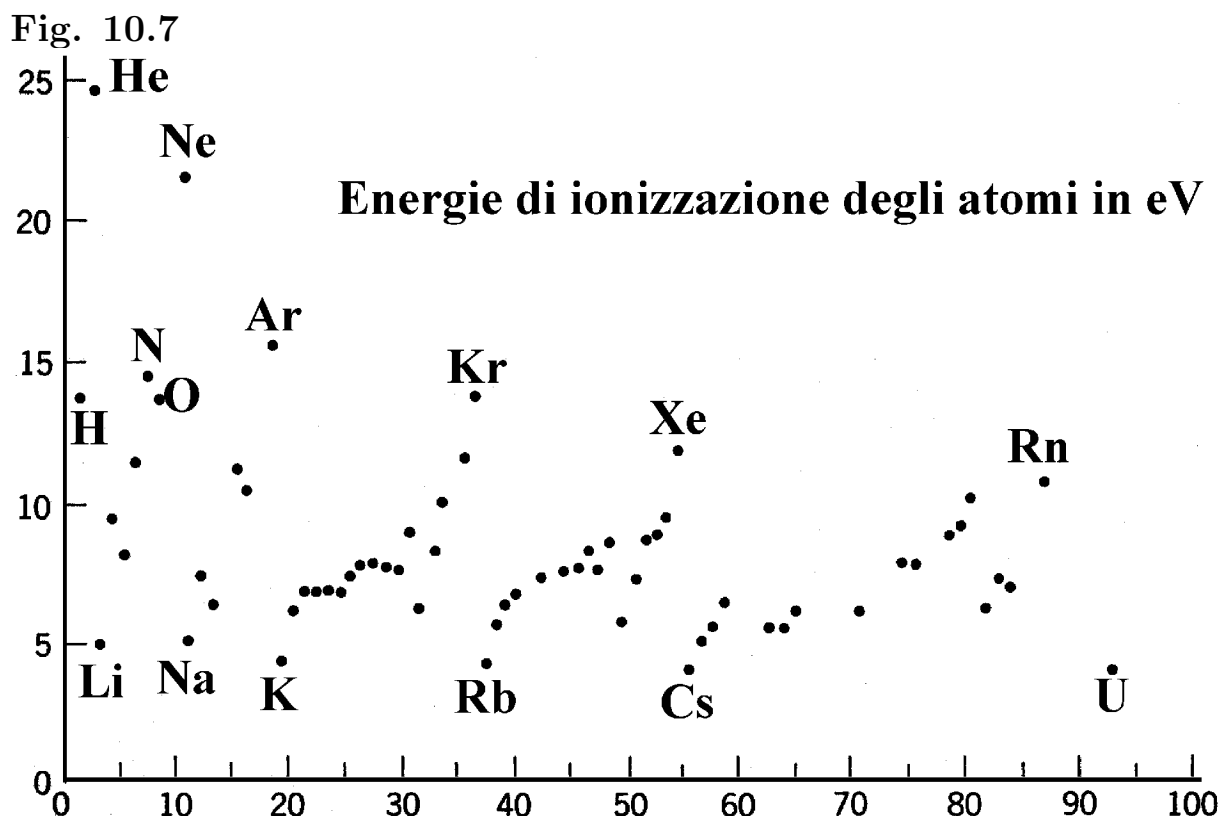
Aggiungiamo che le sezioni d'urto di atomi come l'idrogeno o l'ossigeno possono essere misurate mantenendo la cella in condizioni di scarica elettrica stazionaria tali da dissociare le molecole senza eccitare una frazione consistente degli atomi prodotti.

Per l'idrogeno atomico la sezione d'urto d'assorbimento ha l'andamento mostrato in figura 6a). Presenta un primo picco per fotoni d'energia  $\hbar\omega_0 = 10.2 \text{ eV}$ , seguito da picchi via via meno intensi che appaiono ad energie convergenti verso l'energia di ionizzazione  $\hbar\omega_R = 13.6 \text{ eV}$ . Con scala delle energie come in figura 6a) i picchi d'assorbimento hanno la forma di righe verticali, ma con scala delle energie espansa di un fattore  $10^6$  come in figura 6b), le righe d'assorbimento mostrano davvero la forma lorentziana descritta dall'equazione 14.



Per altri atomi la prima serie di righe d'assorbimento ha caratteristiche simili a quella dell'idrogeno, con picchi ad energie che convergono verso le **energie di prima ionizzazione** riportate in figura 7. L'elio ed il Cesio hanno energie di ionizzazione estreme, rispettivamente  $24.6 \text{ eV}$  e  $3.9 \text{ eV}$ , mentre atomi come il carbonio, l'ossigeno e l'azoto hanno energie di ionizzazione non molto diverse da quella dell'idrogeno.

In realtà le sezioni d'urto delle prime risonanze atomiche sono in buon



accordo con la semplice teoria esposta nel paragrafo precedente, proprio come se ciascuna risonanza coinvolgesse un solo elettrone legato dell'atomo. Ma l'equazione 12') sovrastima  $\sigma(\omega_0)$  di un fattore 3 rispetto ai valori che si ottengono con calcoli quantistici. Ne prendiamo atto e sottolineiamo che **la sezione d'urto di prima risonanza di un qualunque atomo rilassato ha valore di picco**

$$\sigma(\omega_0) = \frac{2\pi c^2}{\omega_0^2} \quad (10.18)$$

e ha forma di riga ben descritta dalla funzione lorenziana  $F(\omega)$ . Insomma

$$\sigma(\omega) = \frac{2\pi c^2}{\omega_0^2} \frac{(\Gamma_0/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_0/2)^2} \quad (10.19)$$

Alternativamente questo risultato può essere scritto nella forma

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi^2 c^2 \Gamma_0}{\omega_0^2} \mathcal{L}(\omega) \quad (10.19')$$

dove  $\mathcal{L}(\omega)$  è la **funzione lorenziana normalizzata**

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_0/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_0/2)^2} \quad (M.15)$$

Il merito dell'equazione 19') emerge quando  $\sigma(\omega)$  deve essere integrata in  $d\omega$ : l'integrale di  $\mathcal{L}(\omega)$  esteso a tutto l'asse delle frequenze è unitario.

A questo punto è opportuno aggiungere una nota di cautela: le equazione 19) o 19') sono accurate solo per gas tanto diluiti da poter escludere che un atomo collida con altri atomi mentre interagisce con la radiazione, e solo per temperature tanto basse da poter pensare che l'atomo sia quasi fermo. Torneremo estesamente su questi punti nel capitolo 17.

## ESERCIZI

1) Per l'idrogeno, l'elio, il litio ed il potassio le lunghezze d'onda della prima risonanza sono rispettivamente  $0.12 \mu m$ ,  $0.058 \mu m$ ,  $0.67 \mu m$  e  $0.77 \mu m$ . Calcolare le sezioni d'urto risonanti per i quattro atomi e confrontarle con le sezioni trasverse degli atomi ottenute dalle densità dei solidi o dei liquidi.

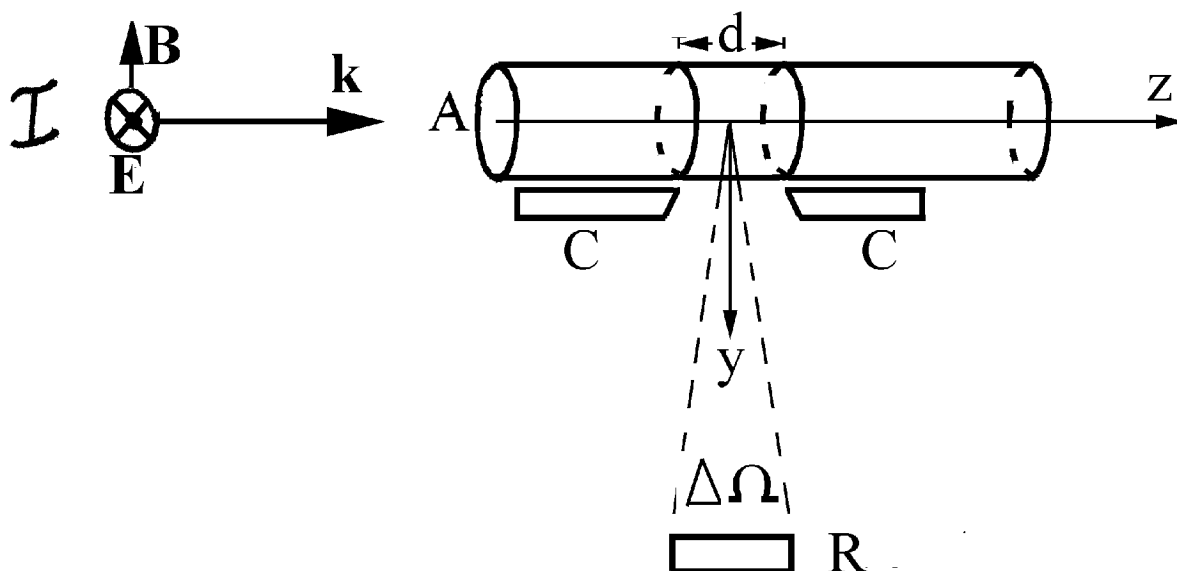
## 10.8 Scattering Rayleigh

Le prime energie di eccitazione degli atomi e molecole dell'atmosfera sono intorno a  $10 eV$ , almeno tre volte maggiori delle energie dei fotoni visibili, che vanno da  $1.6 eV$  a  $3 eV$ . Pertanto la radiazione visibile viene diffusa con sezioni d'urto ben approssimate dalla sezione d'urto di Rayleigh data dall'equazione 15). Ciò implica che la diffusione è circa 12 volte più importante per la radiazione violetta che per la rossa. Tenendolo presente possiamo comprendere l'origine dei seguenti fenomeni interessanti.

- Il cielo appare blu perché le molecole dell'atmosfera diffondono verso di noi la radiazione violetta proveniente dal Sole 12 volte più efficacemente di quella rossa.
- Il sole appare tanto più rosso quanto più si abbassa sull'orizzonte perché la radiazione solare attraversato spessori d'atmosfera crescenti con il diminuire dell'altezza solare, e in tali spessori la radiazione violetta è attenuata 12 volte più efficacemente di quella rossa.
- La radiazione che le molecole dell'atmosfera diffondono verso di noi è preferenzialmente polarizzata. Infatti, sebbene la radiazione solare diretta abbia polarizzazioni distribuite casualmente, le molecole investita da radiazione polarizzata verso di noi non emettono potenza verso il nostro occhio.

La misura delle sezioni d'urto di Rayleigh delle varie speci atomiche non è semplice: le sezioni d'urto Rayleigh sono tanto piccole da rendere inaccurato il metodo d'assorbimento descritto nel paragrafo precedente. Una tecnica di misura appropriata è illustrata in figura 8. Un fascio di radiazione di sezione  $\mathcal{A}$  e frequenza  $\omega$  è polarizzato lungo l'asse  $x$  normale al foglio e si propaga lungo l'asse  $z$  entro un gas rilassato di densità  $n_\alpha$ . I fotoni diffusi nel volumetto  $Ad$  entro l'angolo solido  $\Delta\Omega$  centrato intorno all'asse  $y$  vengono raccolti dal rivelatore R. La lunghezza  $d$  dalla regione osservata è determinata dal collimatore C posto in prossimità del fascio. In questo modo la potenza  $\Delta W_{mis}$  misurata dal rivelatore è direttamente proporzionale alla sezione d'urto Rayleigh. Sottolineiamo che la scelta di centrare il rivelatore sull'asse  $x$  sarebbe errata: **i dipoli non emettono potenza nel verso di oscillazione.**

Fig. 10.8



Gli esperimenti del tipo descritto mostrano che le sezioni d'urto degli atomi e delle molecole nella banda visibile sono ben descritte dall'equazione 12) con  $\omega_0$  sostituito dalla frequenza di ionizzazione della molecola  $\omega_R$ . Precisamente la sezione d'urto Rayleigh di una molecola nella banda visibile è ben

approssimata da

$$\sigma_R(\omega) = \tilde{Z}\sigma_T \left( \frac{\omega}{\omega_R} \right)^4 \quad (10.20)$$

dove  $\tilde{Z}$  è un parametro che dipende un po' dalla molecola, ma rimane sempre poco diverso dall'unità.

### ESERCIZI

1) Un'OPPMPL con intensità di  $30 \text{ W/m}^2$  e frequenza  $\omega = 10^{11} \text{ s}^{-1}$  attraversa una nebbiolina costituita da gocce d'acqua di volume  $1 (\mu\text{m})^3$  e densità  $10^6 \text{ gocce/m}^3$ . Trattare le gocce come se fossero metalliche e calcolare: a) la potenza diffusa da una goccia, b) l'intensità dopo il percorso di  $1 \text{ km}$  nella nebbiolina.

2) Un sottile fascio composto da fotoni rossi ( $\omega = 2.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ) e da fotoni blu ( $\omega = 5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ) percorre  $10 \text{ km}$  nell'atmosfera terrestre a livello del suolo, in assenza di umidità e polveri. All'inizio i flussi di fotoni rossi e blu sono entrambi uguali a  $10^{10}/\text{s}$ . Approssimare le frequenze di ionizzazione dell'azoto e dell'ossigeno con  $\omega_R = 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  e calcolare i flussi di fotoni dei due colori alla fine del percorso.

# Capitolo 11

## Interazione di OPPMPL con materiali LOI

Il campo ELETTRICOMAGNETICO che si instaura in un materiale e nello spazio circostante quando un'onda elettromagnetica incide sul materiale è la sovrapposizione del campo incidente e dei campi di risposta emessi dai vari atomi del materiale. Ma il campo che stimola un atomo include i campi riemessi da tutti gli altri atomi e, in generale, è tutt'altro che facile tenerne conto. Tuttavia, quando la lunghezza d'onda della radiazione incidente è grande rispetto alle dimensioni atomiche, la teoria di Maxwell descrive i fenomeni tenendo conto degli effetti di interferenza delle onde riemesse dai singoli atomi, senza doverli considerare esplicitamente.

In questo capitolo pensiamo che la lunghezza d'onda sia maggiore di  $10^{-7} m$  e studiamo le leggi della riflessione e rifrazione di OPPMPL alle interfacce piane tra materiali LOI (Lineari, Omogenei e Isotropi). Mostriamo che i coefficienti di riflessione d'onda e di potenza all'interfaccia sono determinati dalle **funzioni dielettriche** dei materiali e presentiamo modelli teorici semplici per le funzioni dielettriche dei metalli e dei dielettrici. Infine impariamo a calcolare la velocità di propagazione dell'energia elettromagnetica nei materiali e mostriamo che è diversa dalla velocità di propagazione dei fronti d'onda!

### 11.1 Funzione dielettrica

Pensiamo che un materiale LOI riempi tutto lo spazio e domandiamo: è possibile che un'OPPMPL si propaghi nel materiale? In altre parole: è possibile che i campi ELETTRICO e MAGNETICO nel materiale siano

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (11.1)$$

con  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  vettori fissi? Per rispondere ricordiamo che nelle regioni interne ai materiali omogenei la densità di carica di conduzione è nulla (anche nei metalli) e le correnti magnetiche di alta frequenza sono trascurabili (anche

nei magneti), quindi le equazioni di Maxwell si riducono a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \left[ \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right]\end{aligned}$$

Poi scriviamo le relazioni costitutive interne dei materiali LOI nelle forme

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) = g(\omega) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (11.2)$$

riservandoci di precisare gli andamenti delle funzioni  $\epsilon(\omega)$  e  $g(\omega)$  per i vari materiali. Sostituendo le equazioni 2) ed 1) nelle equazioni di Maxwell, vediamo che i vettori fissi  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono legati dalle relazioni

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad , \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \mu_0 [g(\omega) \mathbf{E} - i\omega \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}]$$

Le prime tre equazioni dicono che  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  formano **terna ortogonale destra**, come nel vuoto, e che

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{kE}{\omega} \quad (11.3)$$

Sostituendo nella quarta equazione, rimaniamo alle prese con la relazione

$$-i \frac{k^2}{\omega} \mathbf{E} = \mu_0 [g(\omega) - i\omega \epsilon_0 \epsilon(\omega)] \mathbf{E} = -i \frac{\omega}{c^2} \left[ \epsilon(\omega) + i \frac{g(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \right] \mathbf{E}$$

che deve valere per qualunque  $\mathbf{E}$ . Pertanto **la frequenza ed il modulo del vettore d'onda nel materiale LOI devono essere legati dalla**

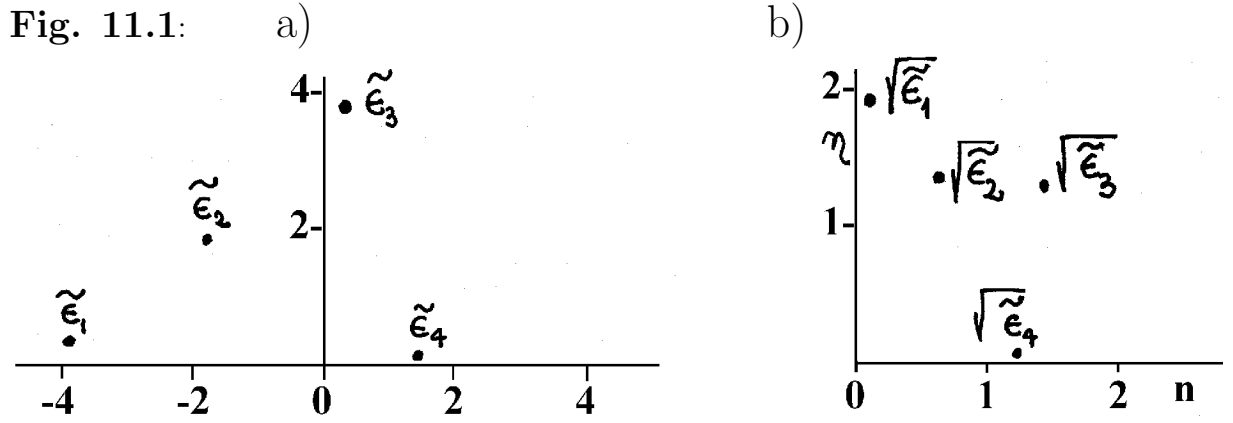
$$\text{relazione di dispersione} \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega) + i \frac{g(\omega)}{\epsilon_0 \omega}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)}$$

Nell'espressione di destra abbiamo introdotto la

$$\text{funzione dielettrica} \quad \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon(\omega) + i \frac{g(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \quad (11.4)$$

che descrive le proprietà dielettriche e di conduzione del materiale LOI. Nei dielettrici perfetti la conducibilità elettrica  $g(\omega)$  è nulla, quindi la funzione  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  coincide con  $\epsilon(\omega)$  e si riduce alla costante dielettrica a basse frequenze. Nei conduttori perfetti, sino a frequenze radiotecniche, la costante dielettrica è unitaria e la conducibilità elettrica è costante, quindi la funzione dielettrica si riduce a  $1 + ig/(\epsilon_0 \omega)$ . Più avanti studieremo gli andamenti di  $\epsilon(\omega)$  e  $g(\omega)$  ad alte frequenze, per ora ci limitiamo a dire che ogni materiale LOI rilassato è caratterizzato da una funzione dielettrica confinata nel semipiano complesso superiore, come in figura 1a). Pertanto la radice della funzione dielettrica è confinata nel primo quadrante del piano complesso, come in figura 1b).





Nel seguito scriveremo la **relazione di dispersione** nella forma

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)} = \frac{\omega}{c} [n(\omega) + i\eta(\omega)] \quad (11.5)$$

dove  $n(\omega)$  ed  $\eta(\omega)$  sono le parti reale ed immaginaria della radice della funzione dielettrica:

$$n(\omega) = \Re\{\sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)}\} \quad \text{e} \quad \eta(\omega) = \Im\{\sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)}\}$$

Per vedere il significato fisico dell'equazione 5) pensiamo che l'onda si propaghi nel materiale con  $\mathbf{k}$  nel verso di  $z$ . In tal caso le equazioni 1) e 5) mostrano che i campi ELETTRICO e MAGNETICO sono

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E} e^{-z\omega\eta/c} e^{i(z\omega n/c - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}(t, z) = \mathbf{B} e^{-z\omega\eta/c} e^{i(z\omega n/c - \omega t)}$$

e decadono di un fattore  $e$  in percorsi di lunghezza  $c/\omega\eta$ . Insomma l'onda si propaga estinguendosi tanto piú rapidamente quanto piú grande è l'**indice di estinzione**  $\eta$ . Si vede anche che i fronti d'onda si propagano con velocità  $c/n$ , quindi l'**indice di rifrazione**  $n$  è il rapporto tra le velocità di propagazione dei fronti d'onda nel vuoto e nel materiale.

Infine notiamo che i campi ELETTRICO e MAGNETICO, pur rimanendo sempre ortogonali, possono oscillare fuori fase, infatti sostituendo l'equazione 5) nella 3) vediamo che

$$B = \frac{kE}{\omega} = \frac{E}{c} [n(\omega) + i\eta(\omega)] \quad (11.6)$$

Diamo alcuni esempi riservandoci di approfondirli piú avanti.

- Nella banda visibile i vetri di buona qualità e l'acqua hanno indice di estinzione trascurabile, quindi il campo MAGNETICO è in fase con il campo ELETTRICO, proprio come nel vuoto illimitato.
- Nella banda  $\omega < 10^{13} \text{ s}^{-1}$  i metalli hanno indici di rifrazione e di estinzione quasi uguali, quindi il campo MAGNETICO è in ritardo di  $45^\circ$  rispetto al campo ELETTRICO.
- Nella banda visibile i metalli hanno indice di rifrazione piccolo rispetto all'indice di estinzione, quindi il campo MAGNETICO è in ritardo quasi di  $90^\circ$  rispetto al campo ELETTRICO.

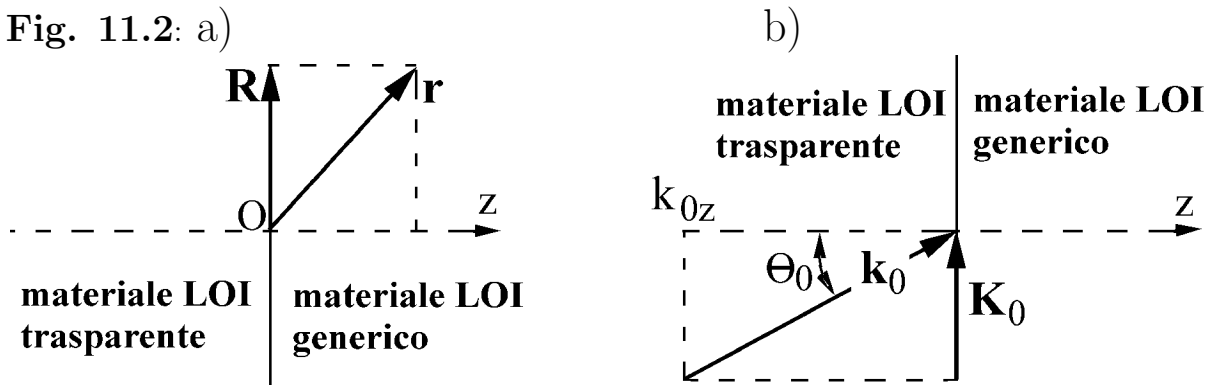
## ESERCIZI

1) In tutta la banda  $\omega \leq 10^{13} \text{ s}^{-1}$  la conducibilità elettrica e la costante dielettrica del rame non differiscono apprezzabilmente dai valori elettrostatici  $g = 6 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$  ed  $\epsilon = 1$ . Compilare una tabella con i valori delle grandezze  $\Re\{\tilde{\epsilon}(\omega)\}$ ,  $\Im\{\tilde{\epsilon}(\omega)\}$ ,  $n$ ,  $\eta$  alle frequenze di  $10^1$ ,  $10^3$ ,  $10^5$ ,  $10^7$ ,  $10^9$ ,  $10^{11}$  e  $10^{13} \text{ s}^{-1}$ .

2) Un certo dielettrico perfetto ha  $\epsilon = 2$  per  $\omega = 2.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  (rosso) ed  $\epsilon = 2.5$  per  $\omega = 4.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  (violetto). Alle due frequenze calcolare: a) gli indici di rifrazione e di estinzione, b) le lunghezze d'onda nel materiale.

## 11.2 Leggi cinematiche della riflessione

Ora pensiamo che un materiale LOI perfettamente trasparente riempia il semispazio  $z < 0$  ed un materiale LOI qualunque riempia il semispazio  $z > 0$ , come in figura 2. Scegliamo l'origine in un punto dell'interfaccia, indichiamo



con  $\mathbf{R}$  la proiezione di un generico punto  $\mathbf{r}$  sul piano dell'interfaccia, ovvero poniamo  $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{R}, z)$ , e pensiamo che un'OPPMPL si propaghi nel materiale trasparente incidendo sull'interfaccia con

$$\text{vettore d'onda incidente} \quad \mathbf{k}_0 \equiv (\mathbf{K}_0, k_{0z})$$

dove  $\mathbf{K}_0$  e  $k_{0z}$  sono le proiezioni di  $\mathbf{k}_0$  sul piano d'interfaccia e sulla normale, come mostrato in figura 2b). L'angolo formato da  $\mathbf{k}_0$  con la normale è l'**angolo di incidenza**  $\theta_0$ . Poi introduciamo il

$$\text{vettore d'onda riflesso} \quad \mathbf{k}_r \equiv (\mathbf{K}_r, k_{rz})$$

ed indichiamo con  $\theta_r$  l'**angolo di riflessione** formato da  $\mathbf{k}_r$  con la normale. Per il momento descriviamo la situazione come mostrato in figura 3, riservandoci di mostrare che tale figura è errata in vari dettagli: la situazione che dimostreremo corretta è mostrata in figura 4. Con  $\mathbf{k}$  abbiamo indicato il

$$\text{vettore d'onda trasmesso} \quad \mathbf{k} \equiv (\mathbf{K}, k_z)$$

Anche in questo caso non poniamo condizioni sulle componenti di  $\mathbf{k}$  e non poniamo condizioni sulle frequenze  $\omega_0$ ,  $\omega_r$  ed  $\omega$  delle onde incidente, riflessa

Fig. 11.3

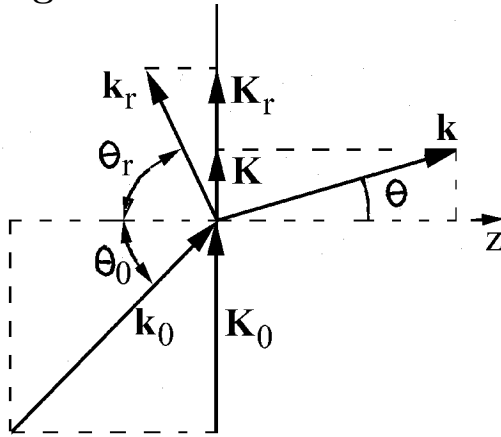
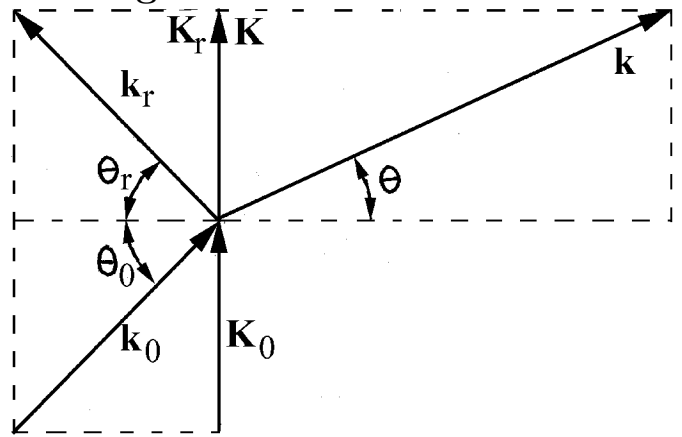


Fig. 11.4



e trasmessa, riservandoci di dimostrare che sono uguali. Allo scopo partiamo dalle equazioni 1) e scriviamo i campi magnetici delle onde incidente, riflessa e trasmessa come segue

$$\mathbf{B}_0(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_{0z} z - \omega_0 t)} \quad , \quad \mathbf{B}_r(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_r e^{i(\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R} + k_{rz} z - \omega_r t)}$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} + k_z z - \omega t)}$$

pensando di conoscere solo  $\mathbf{k}_0$  e  $\mathbf{B}_0$ . Per determinare le altre grandezze cominciamo a notare che, per  $z = 0$ , la somma dei primi due campi è il campo MAGNETICO d'interfaccia valutato nel materiale trasparente, mentre il terzo campo è il campo MAGNETICO d'interfaccia valutato nel materiale generico. Sappiamo che, a contatto con l'interfaccia, la proiezione normale del campo MAGNETICO ha lo stesso valore dalle due parti, perché  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  è solenoidale. Inoltre sappiamo che le correnti "magnetiche" oscillanti con frequenze maggiori di alcuni  $MHz$  sono trascurabili in qualunque materiale, anche nei materiali ferromagnetici, e sappiamo che le correnti di conduzione e di polarizzazione hanno densità finita anche sull'interfaccia. Quindi la circolazione di  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  lungo un percorsino di Stokes a cavallo dell'interfaccia è nulla. Ciò comporta che, nel passare da un materiale all'altro, si conserva anche la proiezione parallela di  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ , quindi **il campo MAGNETICO a contatto con l'interfaccia deve essere uguale da una parte e dall'altra, e ciò deve valere in qualunque punto  $\mathbf{R}$  dell'interfaccia ed a qualunque istante  $t$ .** Di conseguenza deve valere la

$$\text{legge di conservazione della frequenza} \quad \omega_0 = \omega_r = \omega$$

Se non fosse così i campi MAGNETICI dalle due parti, anche se fossero uguali ad un particolare istante, non potrebbero esserlo agli istanti precedenti o seguenti. Ad evitare malintesi precisiamo che la legge di conservazione della frequenza vale quando il materiale risponde in modo lineare all'onda stimolante e quando l'interfaccia è ferma nel nostro sistema di riferimento. Considereremo interfacce in moto nel capitolo 14.

Stabilita la legge di conservazione della frequenza, rimaniamo alle prese con la condizione di raccordo del campo MAGNETICO

$$\mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} + \mathbf{B}_r e^{i\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}} = \mathbf{B} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}$$

che può essere rispettata solo se le proiezioni dei tre vettori d'onda sull'interfaccia sono uguali. Se non fosse così, la condizione potrebbe essere soddisfatta in un punto particolare dell'interfaccia, ma non nei punti contigui. Pertanto sull'interfaccia tra due materiali LOI vale la **legge di conservazione della proiezione parallela del vettore d'onda**

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K} = \mathbf{K}_0$$

Si tenga ben presente che questa legge è conseguenza del fatto che tutti i punti dell'interfaccia sono equivalenti e, a rigore, è valida solo quando l'interfaccia è una perfetta terminazione dei due materiali omogenei seminfiniti. In concreto vale quando la radiazione incide su un'interfaccia planare di dimensioni grandissime rispetto alla lunghezza d'onda incidente. Ad esempio vale quando la luce visibile ( $\lambda \approx 0.4 - 0.8 \mu m$ ) incide su un'interfaccia estesa per alcuni millimetri ed esente da irregolarità di dimensioni maggiori di alcuni nanometri.

A questo punto conviene aggiornare le notazioni tenendo conto delle leggi di conservazione. Cominciamo ad indicare i vettori d'onda incidente, riflesso e trasmesso con

$$\mathbf{k}_0^+ = \mathbf{k}_0 \equiv (\mathbf{K}_0, k_{0z}) \quad , \quad \mathbf{k}_0^- \equiv (\mathbf{K}_0, -k_{0z}) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} \equiv (\mathbf{K}_0, k_z) \quad (11.7)$$

e notiamo che sono complanari: giacciono in un piano normale all'interfaccia, detto **piano sagittale**. Poiché  $\mathbf{k}_0^+$  e  $\mathbf{k}_0^-$  hanno ugual modulo ed ugual proiezione sul piano d'interfaccia, vale la **legge di Cartesio: l'angolo di riflessione e l'angolo di incidenza sono uguali e complanari**; indichiamo entrambi con  $\theta_0$ . Poi scriviamo i campi elettrici e magnetici incidenti e riflessi ed i campi ELETTRICO e MAGNETICO trasmessi come segue

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{E}^+ e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_{0z} z - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}^+(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}^+ e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_{0z} z - \omega t)} \\ \mathbf{E}^-(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{E}^- e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} - k_{0z} z - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}^-(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}^- e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} - k_{0z} z - \omega t)} \\ \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{E} e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_z z - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B} e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

Ribadiamo che  $\mathbf{E}^+$ ,  $\mathbf{E}^-$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}^+$ ,  $\mathbf{B}^-$  e  $\mathbf{B}$  sono **vettori complessi fissi nello spazio e nel tempo**: i campi si ottengono moltiplicando i vettori fissi per i rispettivi fattori di fase e prendendo le parti reali dei risultati. Ricordiamo anche che  $\mathbf{k}_0^+$ ,  $\mathbf{E}^+$  e  $\mathbf{B}^+$  formano terna ortogonale destra, come  $\mathbf{k}_0^-$ ,  $\mathbf{E}^-$  e  $\mathbf{B}^-$  e come  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . E ricordiamo che

$$B^+ = \frac{k_0}{\omega} E^+ \quad , \quad B^- = \frac{k_0}{\omega} E^- \quad , \quad B = \frac{k}{\omega} E \quad (11.8)$$

Con tali notazioni, la condizione di raccordo del campo MAGNETICO diventa

$$\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^- = \mathbf{B} \quad (11.9)$$

Per il campo ELETTRICO la situazione è un po' più complicata perché le proiezioni sulla normale all'interfaccia possono essere diverse dalle due parti. Pertanto dobbiamo limitarci a scrivere

$$(\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-)_{//} = \mathbf{E}_{//} \quad (11.10)$$

dove l'indice  $_{//}$  indica le proiezioni sull'interfaccia. Queste sono uguali perché la circolazione di  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  lungo un percorsino di Stokes a cavallo dell'interfaccia è il flusso della grandezza finita  $-\partial\mathbf{B}(t, \mathbf{r})/\partial t$  attraverso l'areola infinitesima orlata dal percorsino.

### ESERCIZI

1) Un'OPPMPL incide dal vuoto su una lastra di vetro a facce piane e parallele con angolo di incidenza  $\theta_0$  e frequenza  $3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Ammettere che il vetro abbia  $n = 1.5$  ed  $\eta$  trascurabile e descrivere i vettori d'onda delle onde che si propagano nel vuoto, da una parte e dall'altra della lastra, e delle onde che si propagano nel vetro.

2) Pensare che un'OPPMPL di frequenza  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  incida normalmente dal vuoto su una lastra di vetro ( $n = 1.5$ ) a facce piane e parallele con la faccia posteriore ricoperta da uno strato di alluminio perfettamente riflettente. Descrivere i vettori d'onda delle onde che si propagano nel vetro e nel vuoto.

## 11.3 Polarizzazione TE e TM

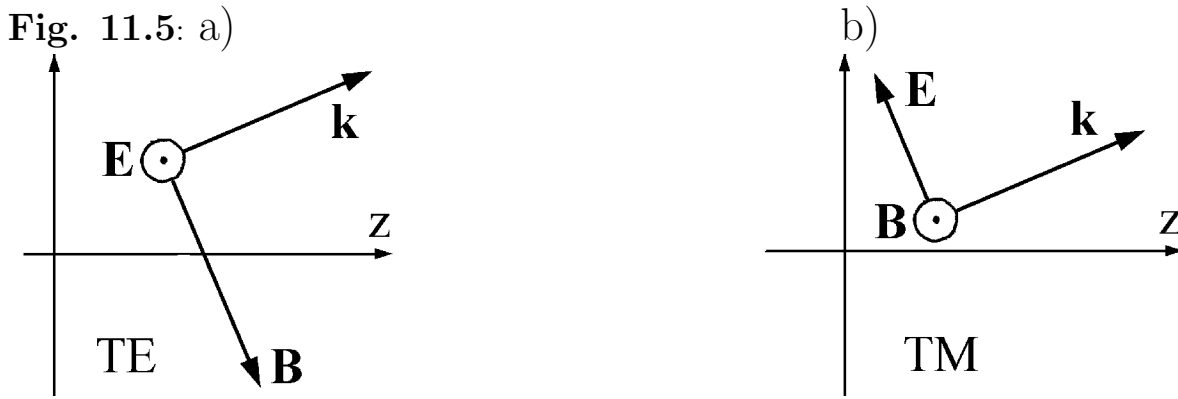
Sappiamo che la proiezione sull'interfaccia del vettore d'onda trasmesso è uguale a  $\mathbf{K}_0$ , quindi è sempre reale. Di conseguenza **la parte immaginaria del vettore d'onda  $\mathbf{k}$  è sempre normale all'interfaccia**. Per vedere bene il significato di questo fatto poniamo  $k_z = \Re\{k_z\} + i\Im\{k_z\}$  e scriviamo il campo ELETTRICO trasmesso

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + \Re\{k_z\}z + i\Im\{k_z\}z - \omega t)} = \mathbf{E}e^{-\Im\{k_z\}z} e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + \Re\{k_z\}z - \omega t)}$$

Ciò mostra che l'ampiezza dell'onda trasmessa decade di un fattore  $e$  a distanza  $1/\Im\{k_z\}$  dall'interfaccia. Si noti che l'onda trasmessa ha ampiezza indipendente da  $\mathbf{R}$ , ma ha fase dipendente sia da  $\mathbf{R}$ , sia da  $z$ . Torneremo su questo punto più avanti, per ora notiamo che le condizioni  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  e  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$  diventano

$$\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{E} + k_z E_z = 0 \quad , \quad \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{B} + k_z B_z = 0$$

La prima equazione mostra che un'onda con  $E_z$  nullo ha  $\mathbf{E}$  perpendicolare a  $\mathbf{K}_0$ , quindi è polarizzata con campo ELETTRICO perpendicolare al piano



sagittale e parallelo all'interfaccia, come in figura 5a). Le onde di questo tipo sono **Trasverse Elettriche** (TE). La seconda equazione mostra che un'onda con  $B_z$  nullo ha  $\mathbf{B}$  perpendicolare a  $\mathbf{K}_0$ , quindi è polarizzata con campo MAGNETICO perpendicolare al piano sagittale e parallelo all'interfaccia, come in figura 5b). Le onde di questo tipo sono **Trasverse Magnetiche** (TM). Dalle figure 5a) e 5b) si vede che

$$\text{per onde TE} \quad B_{//} = -\frac{k_z}{k} B \quad , \quad \text{per onde TM} \quad E_{//} = \frac{k_z}{k} E$$

Si resista alla tentazione di pensare che  $k_z/k$  sia il coseno dell'angolo formato da  $\mathbf{k}$  con la normale: è così solo quando  $k$  e  $k_z$  sono reali, ma in generale  $\mathbf{k}$  è complesso, inoltre  $k_z$  può essere complesso anche quando  $k$  è reale, come vedremo più avanti.

Infine notiamo che una generica OPPM può essere descritta come sovrapposizione di due onde, una TE ed una TM. Pertanto possiamo limitare l'attenzione a queste onde.

## 11.4 Coefficienti di riflessione e trasmissione

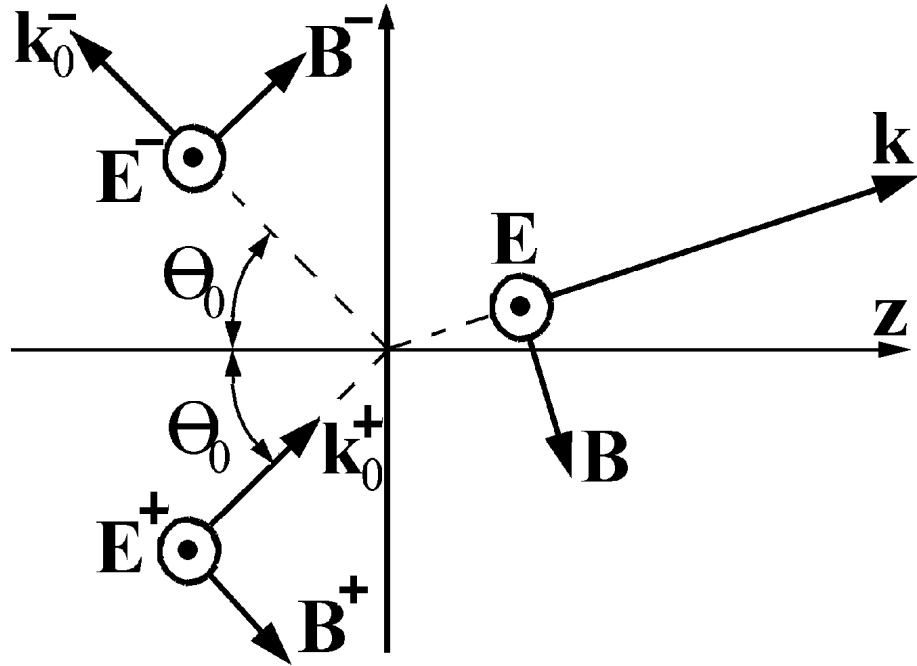
Nei paragrafi precedenti abbiamo stabilito le leggi cinematiche della riflessione e le caratteristiche dell'onda trasmessa, ora vogliamo calcolare i campi elettrici delle onde riflessa e trasmessa, dato quello dell'onda incidente. In altre parole: vogliamo calcolare il **coefficiente di riflessione d'onda** ed il **coefficiente di trasmissione d'onda**

$$r = \frac{E^-}{E^+} \quad \text{e} \quad t = \frac{E}{E^+} \quad (11.11)$$

Come d'uso abbiamo indicato questi coefficienti con  $r$  e  $t$  confidando che i simboli non siano confusi con la distanza dall'origine e con il tempo.

Cominciamo a considerare la situazione di polarizzazione TE mostrata in figura 6a). Abbiamo scelto l'origine dei tempi in modo che i vettori fissi  $\mathbf{E}^+$  e  $\mathbf{B}^+$  siano reali ed abbiamo fatto uscire dal foglio il vettore  $\mathbf{E}^+$ , quindi abbiamo diretto verso il basso il vettore  $\mathbf{B}^+$ . Abbiamo fatto uscire dal foglio anche il vettore  $\mathbf{E}^-$ , ma attenzione: se la fase di  $E^-$  risultasse maggiore di

Fig. 11.6a)



$\pi/2$  il vettore  $\mathbf{E}^-$  entrerebbe nel foglio invece di uscirne ed il vettore  $\mathbf{B}^-$  (o  $\mathbf{B}$ ) avrebbe verso opposto a quello mostrato in figura. Con tali convenzioni le condizioni di raccordo dei campi ELETTRICO e MAGNETICO sono

$$E^+ + E^- = E \quad , \quad -B^+ \cos \theta_0 + B^- \cos \theta_0 = -B \frac{k_z}{k}$$

Tenendo conto delle equazioni 8) rimaniamo alle prese con il sistema

$$E^+ + E^- = E \quad , \quad k_0 \cos \theta_0 E^+ - k_0 \cos \theta_0 E^- = E k_z$$

Moltiplicando la prima equazione per  $k_z$  e sottraendole la seconda otteniamo

$$E^+(k_z - k_0 \cos \theta_0) + E^-(k_z + k_0 \cos \theta_0) = 0$$

Quindi i **coefficienti di riflessione e trasmissione d'onda TE** risultano

$$r = \frac{E^-}{E^+} = \frac{\cos \theta_0 - k_z/k_0}{\cos \theta_0 + k_z/k_0} \quad , \quad t = \frac{E}{E^+} = \frac{E^+ + E^-}{E^+} = 1 + r \quad (11.12)$$

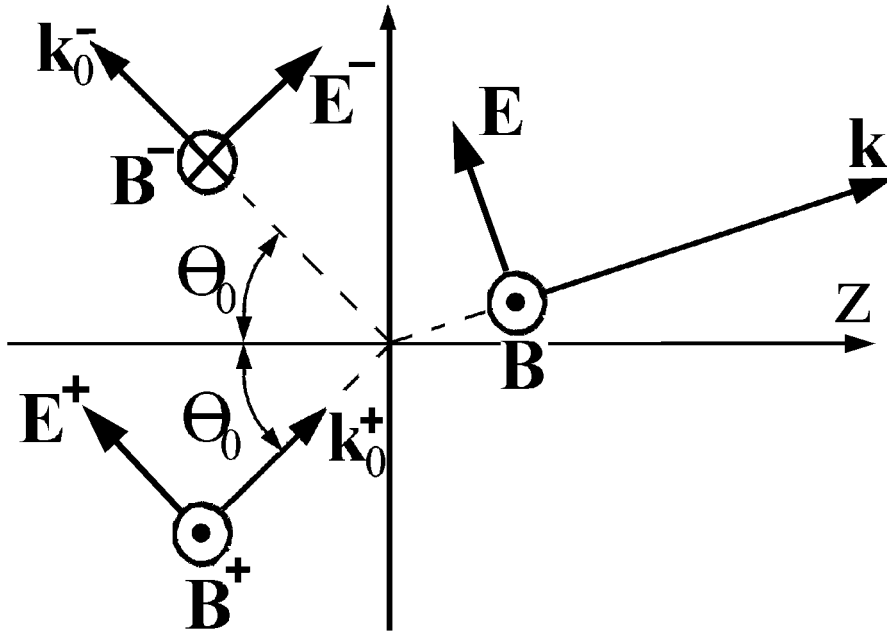
Passiamo alla situazione di polarizzazione TM mostrata in figura 6b). Per essere consistenti con le convenzioni usate nel caso TE, abbiamo disegnato i tre vettori elettrici con proiezioni superficiali dirette nello stesso verso, quindi  $\mathbf{B}^+$  e  $\mathbf{B}$  escono dal foglio, ma  $\mathbf{B}^-$  vi entra. Naturalmente se la fase di  $E^-$  risultasse maggiore di  $\pi/2$  i vettori  $\mathbf{E}^-$  e  $\mathbf{B}^-$  avrebbero versi opposti a quelli mostrati in figura. Con tali convenzioni le condizioni di raccordo dei campi sono

$$E^+ \cos \theta_0 + E^- \cos \theta_0 = E \frac{k_z}{k} \quad , \quad B^+ - B^- = B$$

Tenendo conto delle equazioni 8) rimaniamo alle prese con il sistema

$$E^+ \cos \theta_0 + E^- \cos \theta_0 = E \frac{k_z}{k} \quad , \quad E^+ - E^- = E \frac{k}{k_0}$$

Fig. 11.6b)



Moltiplicando la prima equazione per  $k/k_0$  e sottraendole la seconda moltiplicata per  $k_z/k$  otteniamo

$$E^+ \left( \frac{k}{k_0} \cos \theta_0 - \frac{k_z}{k} \right) + E^- \left( \frac{k}{k_0} \cos \theta_0 + \frac{k_z}{k} \right) = 0$$

Quindi i **coefficienti di riflessione e trasmissione d'onda TM** risultano

$$r = \frac{k_z/k - (k/k_0) \cos \theta_0}{k_z/k + (k/k_0) \cos \theta_0}, \quad t = \frac{\cos \theta_0}{k_z/k} \frac{E^+ + E^-}{E^+} = \frac{\cos \theta_0}{k_z/k} (1 + r) \quad (11.13)$$

Si noti che ad incidenza normale le equazioni 12) e 13) si riducono a

$$r = \frac{1 - k/k_0}{1 + k/k_0}, \quad t = 1 + r \quad \text{valide per } \theta_0 = 0 \quad (11.14)$$

Soprattutto si noti che le onde incidente e riflessa si propagano nello stesso materiale, quindi hanno intensità proporzionali a  $E^+(E^+)^*$  e ad  $E^-(E^-)^*$  con lo stesso fattore di proporzionalità. Il rapporto tra le intensità delle onde riflessa ed incidente è il **coefficiente di riflessione di potenza**

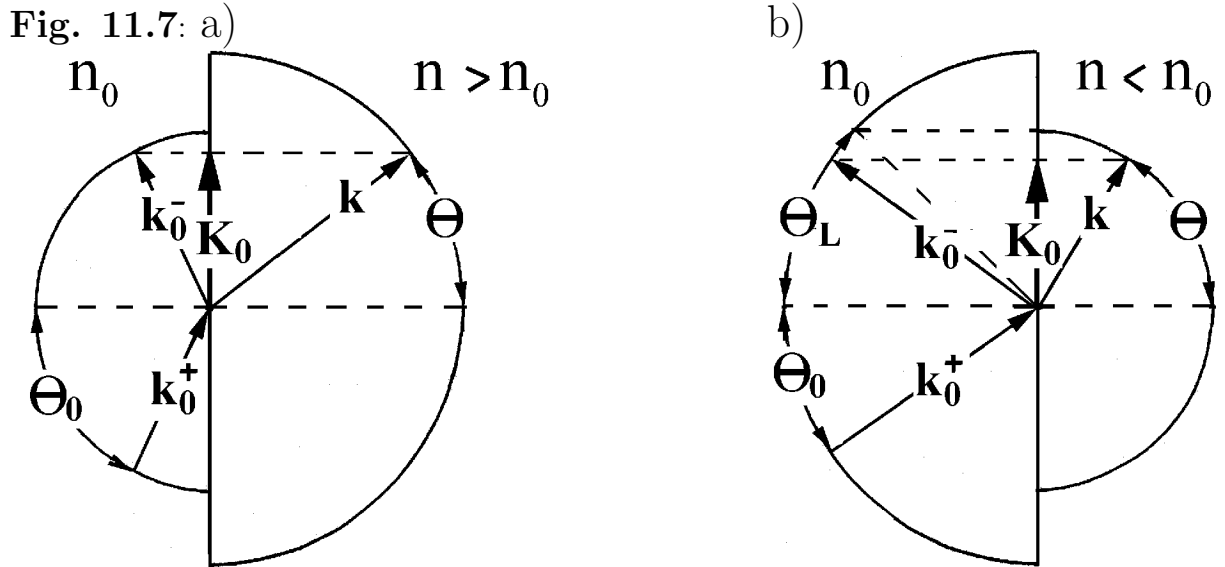
$$\mathcal{R} = \frac{E^-}{E^+} \left( \frac{E^-}{E^+} \right)^* = rr^* \quad (11.15)$$

Naturalmente la frazione  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$  della potenza incidente attraversa l'interfaccia e viene progressivamente dissipata nel materiale seminfinito, quindi  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$  è il **coefficiente di trasmissione di potenza all'interfaccia**. Sottolineiamo che  $\mathcal{T}$  **NON** è uguale a  $tt^*$ , sia perché le onde incidente e trasmessa non si propagano nello stesso materiale, sia perché il vettore di Poynting trasmesso dipende dai campi ELETTRICO e MAGNETICO che, in generale, non sono in fase. Per tale ragione conviene partire sempre dal calcolo di  $r$  ed usare l'equazione  $\mathcal{T} = 1 - rr^*$  per calcolare  $\mathcal{T}$ .



## 11.5 Rifrazione nei materiali trasparenti, onde evanescenti, riflessione totale

Ora indichiamo con  $n_0$  l'indice di rifrazione del materiale di incidenza ed indichiamo con  $n$  l'indice di rifrazione del materiale stimolato, pensando che sia anch'esso perfettamente trasparente. In tal caso conviene descrivere la cinematica della rifrazione come mostrato nelle figure 7 a) e b). Le due



semicirconferenze tracciate in ciascuna figura hanno raggi proporzionali ad  $n_0$  ed  $n$  e rappresentano  $k_0 = n_0\omega/c$  e  $k = n\omega/c$ . Nel caso a) diciamo che la rifrazione è in salita, ad intendere che  $n > n_0$ , nel caso b) diciamo che la rifrazione è in discesa, ad intendere che  $n < n_0$ . In salita, qualunque sia l'angolo di incidenza, esiste un vettore d'onda  $\mathbf{k}$  reale con proiezione parallela uguale a  $\mathbf{K}_0$ , quindi esiste un'onda trasmessa che si propaga nel materiale senza attenuazione. L'angolo  $\theta$  formato da  $\mathbf{k}$  con la normale è l'**angolo di rifrazione** ed è legato a  $\theta_0$  dalla **legge di Snell**

$$n_0 \sin \theta_0 = n \sin \theta \quad (11.16)$$

In discesa, invece, un vettore d'onda  $\mathbf{k}$  reale con proiezione parallela uguale a  $\mathbf{K}_0$  esiste solo se  $n_0 \sin \theta_0 < n$ , ovvero quando l'angolo di incidenza è minore dell'**angolo limite**

$$\theta_L = \arcsin \left( \frac{n}{n_0} \right) \quad (11.17)$$

Quando  $\theta_0$  è maggiore di  $\theta_L$ ,  $K_0$  è maggiore di  $k$  e la legge di Snell perde significato, diciamo che **la rifrazione è frustrata**. In tal caso  $k_z$  è un immaginario puro, infatti

$$k_z = \sqrt{k^2 - K_0^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0} = i\kappa \quad \text{dove} \quad \kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_0^2 \sin^2 \theta_0 - n^2}$$

Di conseguenza i campi ELETTRICO e MAGNETICO trasmessi sono

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E} e^{-\kappa z} e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B} e^{-\kappa z} e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} - \omega t)}$$

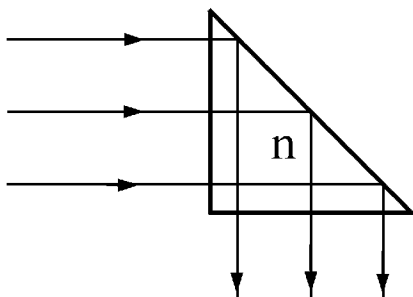
L'onda descritta da questi campi prende il nome di **onda evanescente**: si propaga parallelamente all'interfaccia con ampiezza che decade di un fattore  $e$  a distanza  $1/\kappa$  dall'interfaccia. Lo **spessore di penetrazione**  $1/\kappa$  è infinito per  $\theta_0 = \theta_L$  e diminuisce all'aumentare di  $\theta_0$ . Si noti che **in condizioni di rifrazione frustrata la riflessione è totale**, infatti i coefficienti di riflessione d'onda diventano

$$r = \frac{\cos \theta_0 - i\kappa/k_0}{\cos \theta_0 + i\kappa/k_0} \quad \text{nel caso TE} , \quad r = \frac{i\kappa/k - (k/k_0) \cos \theta_0}{i\kappa/k + (k/k_0) \cos \theta_0} \quad \text{nel caso TM}$$

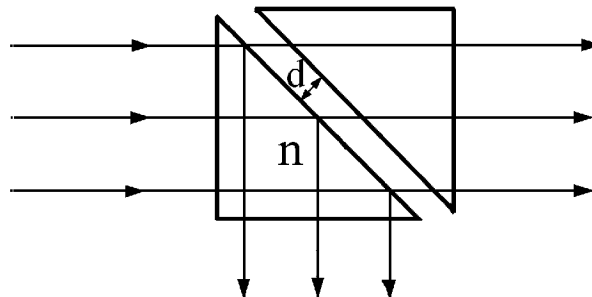
e hanno moduli unitari (numeratori e denominatori hanno gli stessi moduli).

Un'applicazione interessante della rifrazione frustrata è mostrata in figura 8a). Un fascio di radiazione incide normalmente su una faccia cateto di un prisma a  $45^\circ$  di vetro d'indice di rifrazione  $n = 1.52$ . Il fascio trasmesso incide sulla faccia ipotenuusa con angolo di incidenza di  $45^\circ$ , maggiore dell'angolo limite  $\theta_L = 41.1^\circ$ , quindi viene totalmente riflesso dalla faccia ipotenuusa ed esce dal prisma deviato di  $90^\circ$  rispetto al fascio incidente. Ma non dobbiamo dimenticare che un'onda evanescente si propaga nel vuoto parallelamente alla faccia ipotenuusa. Per dimostrare sperimentalmente che è davvero così basta accostare al primo prisma un secondo prisma a  $45^\circ$  con la faccia ipotenuusa a distanza  $d$  dell'ordine di  $1/\kappa$  da quella del primo, come mostrato in figura 8b). In tal caso i campi evanescenti presenti nell'intercapedine vuota originano un'onda che entra e si propaga nel secondo prisma, con il risultato complessivo che il fascio viene scomposto in due fasci: uno indeviato ed uno deflesso di  $90^\circ$ . Facendo variare  $d$  possiamo far aumentare l'intensità di un fascio e far diminuire quella dell'altro.

**Fig. 11.8:** a)



b)



## 11.6 Formule di Fresnel, angolo di Brewster

Sgombrato il campo dalle situazioni di rifrazione frustrata, possiamo riscrivere i coefficienti di riflessione e trasmissione d'onda per materiali trasparenti tenendo conto che

$$k_z/k = \cos \theta \quad , \quad k/k_0 = n/n_0 = \sin \theta_0 / \sin \theta \quad \text{e} \quad k_z/k_0 = \cos \theta \sin \theta_0 / \sin \theta$$

Sostituendo nelle equazioni 12) e 13), e ricordando un po' di trigonometria si giunge alle **equazioni di Fresnel**

$$r = \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\sin(\theta + \theta_0)} \quad , \quad t = 1 + r \quad \text{nel caso TE} \quad (11.18)$$

$$r = \frac{\tan(\theta - \theta_0)}{\tan(\theta + \theta_0)} \quad , \quad t = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} (1 + r) \quad \text{nel caso TM}$$

Queste equazioni valgono solo per materiali perfettamente trasparenti, quindi sono meno generali delle equazioni 12) e 13), ma hanno il merito di mettere in evidenza quanto segue.

- Per angoli di incidenza tali che  $\theta + \theta_0$  sia minore di una decina di gradi i coefficienti di riflessione e trasmissione d'onda TE e TM possono essere confusi e sono approssimati con errori minori dell'1% dalle relazioni

$$r = \frac{\theta - \theta_0}{\theta + \theta_0} = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \quad , \quad t = 1 + r \quad (11.20)$$

Si noti che  $r$  è **negativo o positivo a seconda che l'interfaccia sia attraversata in salita o in discesa**. In altre parole: l'onda riflessa da un'interfaccia in salita è in opposizione di fase con l'onda incidente, quella riflessa da un'interfaccia in discesa è in fase con l'onda incidente.

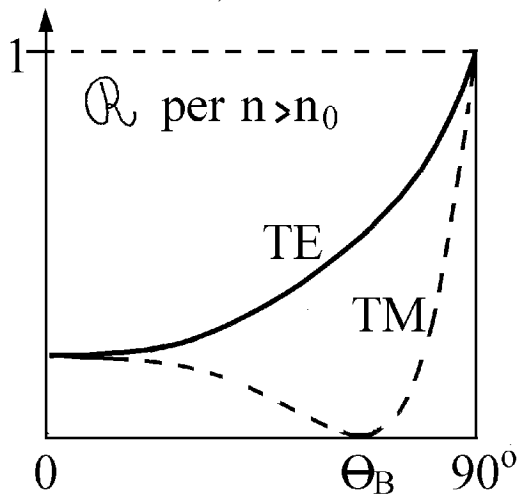
- Il coefficiente di riflessione d'onda TE ha segno indipendente dall'angolo di incidenza, negativo per interfacce in salita, positivo per interfacce in discesa, mentre il coefficiente di riflessione d'onda TM cambia segno quando  $\theta + \theta_0$  passa da  $90^\circ$ : da negativo diventa positivo per interfacce in salita e da positivo diventa negativo per interfacce in discesa. L'angolo di incidenza che rende nullo il coefficiente di riflessione TM prende il nome di **angolo di Brewster** e viene indicato con il simbolo  $\theta_B$ . Il suo valore si ottiene notando che la condizione  $\theta + \theta_B = 90^\circ$  comporta che  $\cos \theta_B = \sin \theta = (n_0/n) \sin \theta_B$ , quindi

$$\tan \theta_B = n/n_0 \quad (11.19)$$

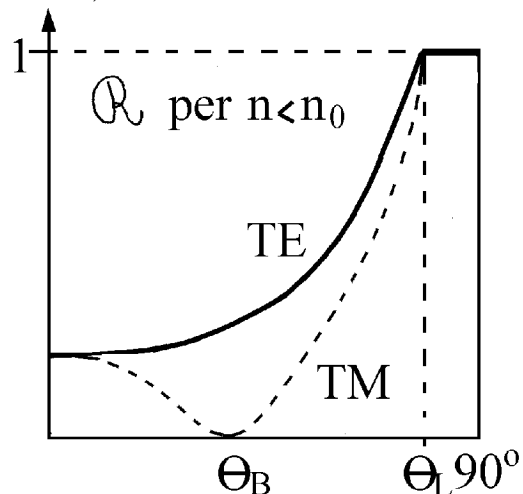
- Come mostrato qualitativamente nelle figure 9a) e b), il coefficiente di riflessione di potenza TE aumenta monotonamente all'aumentare dell'angolo d'incidenza, mentre il coefficiente di riflessione di potenza TM si annulla all'angolo di Brewster. Ciò è vero sia per rifrazione in salita, sia per rifrazione in discesa, ma in quest'ultimo caso  $\mathcal{R}$  diventa unitario quando l'angolo di incidenza raggiunge l'angolo limite e rimane unitario per angoli di incidenza maggiori dell'angolo limite, come mostrato in figura 9b).

- Quando un'OPPMPL incide su una lastra trasparente a facce piane e parallele, gli angoli di rifrazione e di incidenza sull'interfaccia d'ingresso diventano gli angoli di incidenza e di rifrazione sull'interfaccia d'uscita, con la conseguenza che i coefficienti di riflessione d'onda sulle due interfacce differiscono

Fig. 11.9: a)

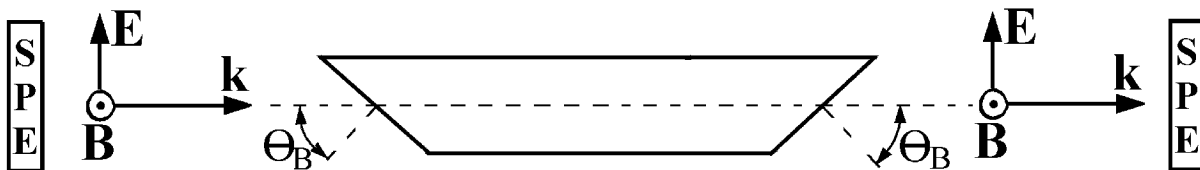


b)



solo per il segno. Quindi i coefficienti di riflessione di potenza sulle due interfacce sono uguali. In particolare, quando un'OPPM con polarizzazione TM incide con angolo di incidenza di Brewster su una lastra a facce piane e parallele, i coefficienti di riflessione d'onda e di potenza sono nulli su entrambe le interfacce, quindi tutta la potenza in ingresso viene trasmessa in uscita. Per tale ragione la configurazione di Brewster mostrata in figura 10 è molto usata per le finestre di ingresso e di uscita delle ampole dei lasers a gas.

Fig. 11.10



La radiazione elettromagnetica polarizzata con campo magnetico parallelo alle **finestre di Brewster**, può viaggiare avanti-indietro tra i due specchi attraversando le finestre un gran numero di volte senza attenuazione.

- Infine notiamo che quando un fascio di radiazione monocromatica non polarizzata incide su un materiale trasparente con angolo di incidenza di Brewster, la radiazione riflessa è perfettamente polarizzata TE.

### ESERCIZI

1) Un'OPPMPL con  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  proviene dal vuoto ed incide con angolo di incidenza di  $60^\circ$  sulla superficie piana di un materiale che ha indice di estinzione trascurabile ed indice di rifrazione 1.52. Calcolare: a) l'angolo di rifrazione, b) la lunghezza d'onda nel materiale, c) i coefficienti di riflessione d'onda e di potenza TE e TM.

2) Un'OPPMPL con  $\omega = 4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  incide dal vuoto con  $\theta_0 = 60^\circ$  sulla superficie piana di un materiale che ha  $\eta = 0$  ed  $n = 0.7$ . a) Calcolare le proiezioni parallela e normale del vettore d'onda nel materiale. b) Calcolare

i coefficienti di riflessione d'onda e di potenza TE e TM. c) Descrivere il campo ELETTROMAGNETICO nel materiale.

3) Calcolare i coefficienti di riflessione d'onda e di potenza ad incidenza normale su interfacce tra il vuoto e materiali che, alle frequenze di interesse, hanno le seguenti funzioni dielettriche: a)  $\tilde{\epsilon} = 2$ , b)  $\tilde{\epsilon} = 1 + i 10^8$ , c)  $\tilde{\epsilon} = -100 + i 0.1$ , d)  $\tilde{\epsilon} = 0.8$

4) Considerare un dielettrico perfetto che ha  $\epsilon = 2$  per  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  ed  $\epsilon = 2.5$  per  $\omega = 6 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Alle due frequenze calcolare i coefficienti di riflessione d'onda per un angolo di incidenza nel vuoto di  $64^\circ$ , in condizioni di polarizzazione TE e TM.

## 11.7 Funzione dielettrica dei conduttori

In questo paragrafo concentriamo l'attenzione sul **modello a tempo di rilassamento per conduttori con mobilità unipolare** introdotto nel paragrafo 5.3. In quel contesto abbiamo scritto l'equazione del moto della nuvola di portatori nella forma

$$\tau \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E}(t) \quad (11.21)$$

e abbiamo limitato l'attenzione al regime stazionario. Ora estendiamo il discorso al regime armonico. Indichiamo con  $n_f$  la densità del fluido di portatori, con  $q = \pm e$  la carica di un portatore, e ricordiamo che la densità di corrente di conduzione vale

$$\mathbf{j}_f(t) = qn_f \mathbf{v}(t) \quad (11.22)$$

Poi poniamo  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}e^{-i\omega t}$ , senza porre condizioni a priori sul vettore fisso  $\mathbf{v}$ . Sostituendo nelle equazioni 21) e 22) vediamo che

$$(-i\omega\tau + 1)\mathbf{v}e^{-i\omega t} = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E}(t) \quad , \quad \mathbf{j}_f(t) = qn_f \mathbf{v}e^{-i\omega t}$$

Quindi anche  $\mathbf{E}(t)$  e  $\mathbf{j}_f(t)$  sono armonici e possiamo scrivere la relazione

$$\mathbf{j}_f(t) = qn_f \frac{q\tau}{m} \frac{\mathbf{E}(t)}{1 - i\omega\tau} = \frac{e^2 n_f \tau}{m} \frac{\mathbf{E}(t)}{1 - i\omega\tau} \quad (11.23)$$

che generalizza la legge di Ohm locale per conduttori unipolari in regime armonico. Dall'equazione 23) si vede che la conducibilità elettrica dei conduttori unipolari vale

$$g(\omega) = \frac{g}{1 - i\omega\tau} = \frac{g(1 + i\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (11.24)$$

Naturalmente la conducibilità in continua  $g$  è legata ai parametri del modello dalla relazione  $g = e^2 n_f \tau / m$ , ma ciò non è rilevante nel presente contesto:

che i portatori siano lacune o elettroni, che abbiano grande densità e grande massa o viceversa non ha importanza, gli unici parametri che entrano nell'equazione 24) sono  $g$  e  $\tau$ . E come  $g$  anche  $\tau$  può essere misurato con semplicità: basta misurare la frequenza alla quale la conducibilità ha parte reale  $g/2$ , l'inverso di tale frequenza è il tempo di rilassamento  $\tau$ .

Inserendo l'equazione 24) nella 4) e ricordando che la costante dielettrica dei conduttori perfetti è unitaria, otteniamo la **funzione dielettrica dei conduttori unipolari**

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega (1 - i \omega \tau)} \quad (11.25)$$

Alternativamente possiamo introdurre la **frequenza di plasma**

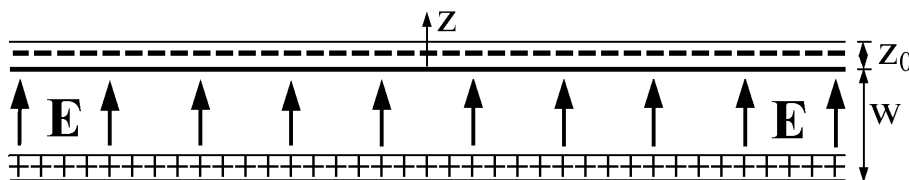
$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{\epsilon_0 \tau}} = \sqrt{\frac{e^2 n_f}{\epsilon_0 m}} \quad (11.26)$$

e possiamo riscrivere l'equazione 25) nella forma

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{i \omega \tau}{1 - i \omega \tau} \quad (11.25')$$

Concludiamo con un esercizio inteso ad illustrare il significato della frequenza di plasma. Consideriamo una lastra metallica piana di spessore  $w$  ed ammettiamo che, al tempo zero, per effetto di stimoli pregressi, la nuvola di elettroni liberi, di densità  $n_f$ , sia spostata di  $z_0$  rispetto al muro di carica formato dai core ionici positivi fermi, come mostrato in figura 11. Con nu-

**Fig. 11.11**



vola elettronica spostata di  $z$  le pareti della lastra hanno densità di carica superficiale  $-en_f z$  e  $+en_f z$ , quindi la regione interna alla lastra è sede del campo ELETTRICO  $E = en_f z / \epsilon_0$  che agisce sulla nuvola di elettroni liberi con densità di forza  $f = -en_f E = -e^2 n_f^2 z / \epsilon_0$ . Trascurando le collisioni, l'equazione del moto della nuvola elettronica risulta

$$m n_f \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = - \frac{e^2 n_f^2 z(t)}{\epsilon_0}$$

Dividendo per  $m n_f$  rimaniamo alle prese con l'equazione

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = - \frac{e^2 n_f}{\epsilon_0 m} z(t) \quad \text{che ha soluzione} \quad z(t) = z_0 \cos(\omega_p t)$$

Ciò mostra che la frequenza di plasma è la frequenza di risonanza della nuvola elettronica di conduzione. Naturalmente in situazioni reali la nuvola non

oscilla indefinitamente perché la dissipazione Joule provoca lo smorzamento delle oscillazioni con costante tempo  $\tau$ . Quindi la **risonanza plasmonica** ha **fattore di merito**  $\omega_p\tau$ . In metalli come il rame, l'argento e l'oro, il tempo di rilassamento a temperatura ambiente è dell'ordine di  $10^{-14}$  s e la frequenza di plasma ha valori intorno a  $2 \cdot 10^{16}$  s $^{-1}$ , quindi il fattore di merito delle risonanze plasmoniche ha valori intorno a 200 ed è molto minore dei fattori di merito  $\omega_0/\Gamma$  delle risonanze atomiche.

## ESERCIZI

1) Ammettere che nel rame sia libero un elettrone per atomo e calcolare:  
 a) la frequenza di plasma e b) il tempo di rilassamento a temperatura ambiente ( $g = 6 \cdot 10^7$  ( $\Omega m$ ) $^{-1}$ ) e a 77 K ( $g = 5 \cdot 10^8$  ( $\Omega m$ ) $^{-1}$ ).

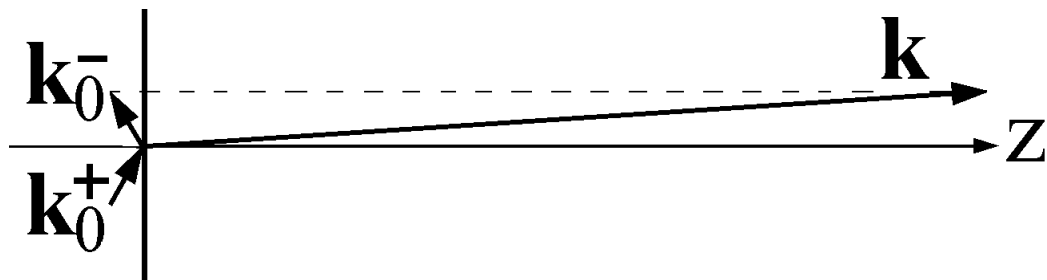
## 11.8 Interazione di radioonde e microonde con le superfici dei conduttori unipolari

In questo paragrafo studiamo il comportamento dei conduttori unipolari nella banda  $\omega \ll 1/\tau$ , banda che si estende fino a  $\omega = 10^{12}$  s $^{-1}$  ed anche un po' oltre. In tale banda  $g/\epsilon_0\omega$  non è mai minore di  $10^6$  e l'equazione 25) può essere approssimata con  $\tilde{\epsilon}(\omega) = ig/\epsilon_0\omega$  senza errori significativi. Ricordando che gli indici di rifrazione e di estinzione sono le parti reale ed immaginaria della radice della funzione dielettrica si vede che

$$n = \eta = \sqrt{\frac{g}{2\epsilon_0\omega}} \quad \text{valida per } \omega\tau \ll 1 \quad (11.27)$$

In tutta la banda considerata  $n$  ed  $\eta$  sono uguali e sono molto grandi: rimangono maggiori di 700 anche al limite superiore della banda. Ciò comporta che entro i metalli  $\mathbf{k}$  è **(quasi) normale all'interfaccia anche quando l'angolo d'incidenza  $\theta$  è grande**, molto più normale di quanto appaia in figura 12. Infatti la proiezione di  $\mathbf{k}$  sull'interfaccia è uguale a quella del vettore d'onda incidente, quindi è minore di  $\omega/c$ , mentre la componente  $k_z$  non differisce significativamente da  $k = \frac{\omega}{c}n(1+i)$ . E poiché i campi ELETTRICO e MAGNETICO d'interfaccia sono ortogonali a  $\mathbf{k}$ , dobbiamo concludere che **E e B sono quasi paralleli all'interfaccia in qualunque condizione di incidenza.**

Fig. 11.12



Pertanto possiamo valutare i coefficienti di riflessione d'onda ponendo nelle equazioni 12) e 13)  $k_z/k = 1$  e  $k_z/k_0 = k/k_0 = n(1+i)$ . Si ottiene così

$$r \approx \frac{\cos \theta_0 - n(1+i)}{\cos \theta_0 + n(1+i)} \quad \text{nel caso TE, e} \quad r \approx \frac{1 - n(1+i) \cos \theta_0}{1 + n(1+i) \cos \theta_0} \quad \text{nel caso TM}$$

Poiché  $n$  è grandissimo rispetto all'unità possiamo concludere che

$$r \approx -1 + \frac{2 \cos \theta_0}{n(1+i)} \quad , \quad t = 1 + r \approx \frac{2 \cos \theta_0}{n(1+i)} \quad \text{nel caso TE}$$

$$r \approx -1 + \frac{2}{n(1+i) \cos \theta_0} \quad , \quad t = \cos \theta_0(1+r) \approx \frac{2}{n(1+i)} \quad \text{nel caso TM}$$

Ciò consente di trarre le seguenti conclusioni.

- **Il campo elettrico riflesso è quasi esattamente in opposizione di fase con il campo elettrico incidente.**
- **Rispetto al campo elettrico incidente il campo ELETTRICO trasmesso è piccolissimo ed è sfasato di  $45^\circ$  in anticipo.**
- **Il coefficiente di riflessione di potenza TE risulta**

$$\mathcal{R} = \left[ -1 + \frac{(1-i) \cos \theta_0}{n} \right] \left[ -1 + \frac{(1+i) \cos \theta_0}{n} \right] \approx 1 - \frac{2 \cos \theta_0}{n}$$

- **Il coefficiente di riflessione di potenza TM risulta**

$$\mathcal{R} = \left[ -1 + \frac{1-i}{n \cos \theta_0} \right] \left[ -1 + \frac{1+i}{n \cos \theta_0} \right] \approx 1 - \frac{2}{n \cos \theta_0}$$

- **A parità di angolo di incidenza, la frazione di potenza che entra nel materiale e viene dissipata dipende dalle condizioni di polarizzazione.** Infatti il coefficiente di trasmissione di potenza vale

$$\mathcal{T} \approx \frac{2 \cos \theta_0}{n} \quad \text{nel caso TE} \quad \text{e} \quad \mathcal{T} \approx \frac{2}{n \cos \theta_0} \quad \text{nel caso TM} \quad (11.28)$$

- **Per angoli d'incidenza piccoli la frazione di potenza che entra nel materiale e viene dissipata è data dalla**

$$\text{legge di Hagen-Rubens} \quad \mathcal{T} = \frac{2}{n} = \sqrt{\frac{8\epsilon_0\omega}{g}} \quad (11.29)$$

Per valutare il campo MAGNETICO d'interfaccia, basta ricordare che  $B$  è legato ad  $E$  dall'equazione 6) che diventa

$$B = \frac{E}{c} n(1+i) = \frac{tE^+}{c} n(1+i) = tB^+ n(1+i)$$

Sostituendo i valori di  $t$  calcolati sopra si vede che

$$B \approx 2B^+ \cos \theta_0 \quad \text{nel caso TE} \quad \text{e} \quad B \approx 2B^+ \quad \text{nel caso TM}$$



In parole: **il campo MAGNETICO d'interfaccia è il doppio della proiezione sull'interfaccia del campo magnetico incidente.**

Ora studiamo i campi che penetrano il materiale in funzione della distanza  $z$  dall'interfaccia. Sappiamo che, per qualunque angolo di incidenza,  $\mathbf{k}$  è quasi normale all'interfaccia con

$$k = \frac{\omega}{c}n(1+i) = \frac{1+i}{\Lambda} \quad \text{dove} \quad \Lambda = \frac{c}{n\omega}$$

Pertanto possiamo approssimare le equazioni 1) con

$$E(t, z) = Ee^{-z/\Lambda}e^{i(z/\Lambda-\omega t)} \quad , \quad B(t, z) = Be^{-z/\Lambda}e^{i(z/\Lambda-\omega t)}$$

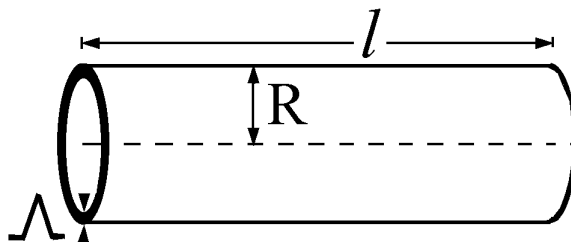
Ciò mostra che, per qualunque angolo di incidenza, i campi ELETTRICO e MAGNETICO nel materiale decadono di un fattore  $e$  nello

$$\text{spessore di pelle} \quad \Lambda = \frac{c}{n\omega} = c\sqrt{\frac{2\epsilon_0}{g\omega}} \quad (11.30)$$

A prima vista possiamo essere tentati di dire che  $2\pi\Lambda$  è la “lunghezza d'onda” nel metallo, ma ciò è improprio: in tale “lunghezza d'onda” la fase dei campi varia davvero di  $2\pi$ , ma l'intensità diventa  $e^{-2\pi} \approx 1/535$  di quella presente sull'interfaccia. Quindi l'onda non si propaga nel metallo: penetra appena, quanto basta a produrre le correnti che generano l'onda riflessa con il meccanismo di emissione dipolare descritto nel capitolo 9. Naturalmente le correnti generano un campo elettromagnetico di risposta anche entro il materiale e la sovrapposizione di tale campo con il campo elettromagnetico incidente è il campo ELETTRIMAGNETICO trasmesso.

Dall'equazione 30) si vede che lo spessore di pelle del rame vale circa  $0.16 \mu m$  per  $\omega = 10^{12} s^{-1}$ ,  $0.16 mm$  per  $\omega = 10^6 s^{-1}$ , e circa  $9 mm$  alla frequenza della rete elettrica. Ciò rende conto del fatto che la resistenza di un filo metallico dipende dalla frequenza. Ad una data frequenza, un filo di rame di lunghezza  $l$  e raggio  $R$  è quasi equivalente al tubetto mostrato in figura 13. Dunque la resistenza del filo non vale  $l/(g\pi R^2)$ , ma  $\approx l/(g2\pi R\Lambda)$ .

**Fig. 11.13**



Infine diciamo che si usa spesso l'approssimazione di conducibilità infinita. In tale approssimazione gli spessori di pelle sono infinitesimi e sono percorsi da correnti di conduzione di densità (volumetrica) infinita. Tali correnti, oltre a generare l'onda riflessa, schermano perfettamente la regione interna,

ovvero producono un'onda che cancella esattamente l'onda incidente nella regione interna. Di conseguenza il campo ELETTRICO d'interfaccia è nullo ed il campo MAGNETICO d'interfaccia è discontinuo. All'interno  $B$  è nullo, all'esterno vale  $2B^+ \cos \theta_0$  nel caso caso TE e  $2B^+$  nel caso TM. Ma non si deve mai dimenticare che tale discontinuità ha origine dall'approssimazione di conducibilità infinita, quindi è fittizia: in realtà alla frequenza di  $10^{12} \text{ s}^{-1}$  le correnti di conduzione nel rame sono distribuite in uno strato di spessore  $5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.5 \mu\text{m}$  che, pur essendo piccolo su scala umana, rimane molto grande su scala atomica. Insomma **l'unica discontinuità che può manifestarsi davvero all'interfaccia riguarda la componente normale del campo ELETTRICO**: questa può essere discontinua anche su scala atomica perché la carica d'interfaccia è localizzata in strati di spessore confrontabile con le dimensioni atomiche.

### ESERCIZI

1) Un'OPPM con  $\omega = 3 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$  incide normalmente su una lastra di rame. Calcolare: a) il coefficiente di riflessione di potenza, b) lo spessore di pelle. c) Poi descrivere il campo ELETTRICOMAGNETICO nel rame in approssimazione di conducibilità infinita.

2) Un filo d'argento ( $g = 7 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ ) con sezione di raggio  $1 \text{ mm}$  è percorso da corrente di frequenza  $10^6 \text{ s}^{-1}$  e intensità di picco di  $10 \text{ A}$ . Calcolare: a) lo spessore di pelle, b) il campo ELETTRICO incidente sul filo, c) il valore efficace del vettore di Poynting, d) il valore efficace della potenza entrante in un filo lungo  $2 \text{ m}$ , e) la tensione ai capi di tale filo.

## 11.9 Modello collisionless plasma

Per frequenze tali che  $\omega\tau \gg 1$  l'equazione 25') è ben approssimata da

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \quad (11.31)$$

In generale questa approssimazione vale quando il periodo di oscillazione dell'onda  $2\pi/\omega$  è piccolo rispetto al tempo di rilassamento, ovvero quando i portatori stimolati dal campo ELETTRICOMAGNETICO oscillano molte volte prima di trasferire momento ed energia ad altre particelle del sistema. Per tale ragione si dice che l'equazione 31) è la funzione dielettrica del **collisionless plasma**. Aggiungiamo che l'equazione 31) vale anche per plasmi gassosi molto diluiti, ad esempio la ionosfera si comporta approssimativamente come un collisionless plasma con  $\omega_p$  nella banda delle onde radio.

Sostituendo l'equazione 31) nella 5) otteniamo

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (11.32)$$

e vediamo che  $k$  è un immaginario puro per  $\omega < \omega_p$  ed è reale per  $\omega > \omega_p$ .

Ora, per dare concretezza al discorso, fissiamo l'attenzione su un collisionless plasma con  $\omega_p = 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ , che costituisce un modello di prima approssimazione per metalli come l'argento, il rame, l'oro e l'alluminio nelle bande infrarossa, visibile ed ultravioletta.

Quando un'OPPMPL di frequenza  $\omega$  incide sull'interfaccia vuoto-metallo con angolo d'incidenza  $\theta_0$ , l'onda nel metallo ha vettore d'onda  $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{K}_0, k_z)$ , con  $K_0 = (\omega/c) \sin \theta_0$ , quindi  $k_z$  deve prendere il valore

$$k_z = \sqrt{k^2 - K_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 \cos^2 \theta_0 - \omega_p^2} \quad (11.33)$$

Pertanto possiamo dire quanto segue.

- **Nelle bande infrarossa e visibile** la frequenza è minore di  $5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , quindi  $\omega^2$  è molto minore di  $\omega_p^2$  e  $k_z$  è un immaginario puro che dipende poco dalla frequenza e dall'angolo di incidenza. Approssimando  $k_z$  con  $i\omega_p/c = i\kappa$ , vediamo che il metallo è sede di un campo evanescente e l'onda viene totalmente riflessa. Entro il metallo l'ampiezza dell'onda evanescente decade di un fattore  $e$  in uno strato di spessore  $1/\kappa = c/\omega_p \approx 15 \text{ nm}$ , quindi possiamo aspettarci che uno strato metallico di spessore maggiore di  $100 \text{ nm}$  sia già uno specchio perfetto e che uno strato metallico di spessore intorno a  $10 \text{ nm}$  rifletta circa la metà della potenza incidente e lasci passare l'altra metà. Naturalmente non è esattamente così perché le collisioni dei portatori nel metallo fanno assorbire un po' di potenza; ad esempio, il miglior specchio metallico assorbe circa il 2% della potenza incidente, ed il miglior strato metallico semiriflettente assorbe circa il 10% della potenza incidente.

- **Per frequenze maggiori della frequenza di plasma** la funzione dielettrica è reale e minore dell'unità, l'indice di estinzione è nullo e l'indice di rifrazione vale

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

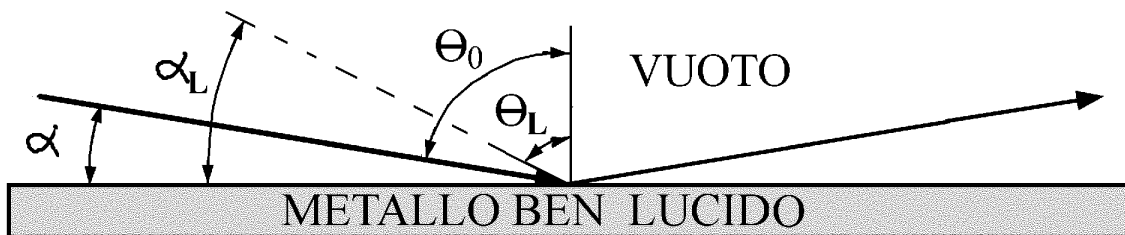
Quindi il metallo si comporta come un mezzo perfettamente trasparente (in approssimazione collisionless). Ma l'indice di rifrazione è minore dell'unità, quindi l'onda incidente incontra un'interfaccia in discesa e la rifrazione è consentita o frustrata a seconda che l'angolo di incidenza sia minore o maggiore dell'angolo limite  $\theta_L$  tale che

$$\sin \theta_L = n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \quad \text{ovvero tale che} \quad \cos \theta_L = \frac{\omega_p}{\omega}$$

Per  $\theta_0 < \theta_L$  l'onda trasmessa si propaga nel collisionless plasma senza attenuazione con  $k$  ed  $\omega$  legati dall'equazione 32). Per  $\theta_0 > \theta_L$  si verificano condizioni di **rilezione totale esterna**:  $k_z$  è un immaginario puro ed il metallo è sede di un'onda evanescente con spessore di penetrazione che tende a  $c/\omega_p$  per  $\theta_0$  tendente a  $90^\circ$ .

Applicazioni interessanti della riflessione totale esterna si incontrano nella tecnologia degli specchi per raggi X. In tali applicazioni si usano le notazioni illustrate in figura 14:  $\alpha$  è l'**angolo di radenza**, complementare dell'angolo di incidenza  $\theta_0$ , ed  $\alpha_L$  è l'angolo di radenza limite, tale che  $\sin \theta_L = \omega_p/\omega$ . Nella banda dei raggi X,  $\omega_p/\omega$  è molto minore dell'unità, quindi possiamo confondere l'angolo limite con il suo seno e dire che **i raggi X sono totalmente riflessi da superfici metalliche perfette quando vi incidono con angolo di radenza  $\alpha$  minore di  $\omega_p/\omega$ .**

Fig. 11.14



## ESERCIZI

1) Un metallo con  $10^{29}$  elettroni-liberi/ $m^3$  ha tempo di rilassamento di  $10^{-14}$  s. Un fascio di radiazione incide normalmente sulla sua superficie. Per le frequenze di  $10^9$   $s^{-1}$ ,  $10^{15}$   $s^{-1}$  e  $10^{17}$   $s^{-1}$ , calcolare: a) la funzione dielettrica, b) il coefficiente di riflessione.

2) Un gas parzialmente ionizzato contiene  $10^{12}$  coppie elettrone-ione/ $m^3$ . Il tempo di rilassamento per gli elettroni è di  $10^{-4}$  s. Alle frequenze di  $10^3$   $s^{-1}$ ,  $10^6$   $s^{-1}$ ,  $10^9$   $s^{-1}$  e  $10^{12}$   $s^{-1}$  calcolare: a) la funzione dielettrica, b) lo spessore di pelle  $\Lambda = 1/\kappa$ , c) la lunghezza d'onda nel plasma, d) il coefficiente di riflessione per incidenza normale.

3) Quale angolo di radenza deve avere la radiazione di frequenza  $\omega = 10^{18}$   $s^{-1}$  per essere totalmente riflessa da uno strato d'oro?

4) Uno specchio di rame ben lucido è investito ad incidenza normale da un'OPPMPL di intensità  $100$   $W/m^2$ . Per le frequenze  $\omega = 3 \cdot 10^{15}$   $s^{-1}$  e  $\omega = 6 \cdot 10^{16}$   $s^{-1}$ , calcolare: a) l'intensità del fascio riflesso, b) il campo ELETTRICO ed il campo MAGNETICO sull'interfaccia.

## 11.10 Onde stazionarie

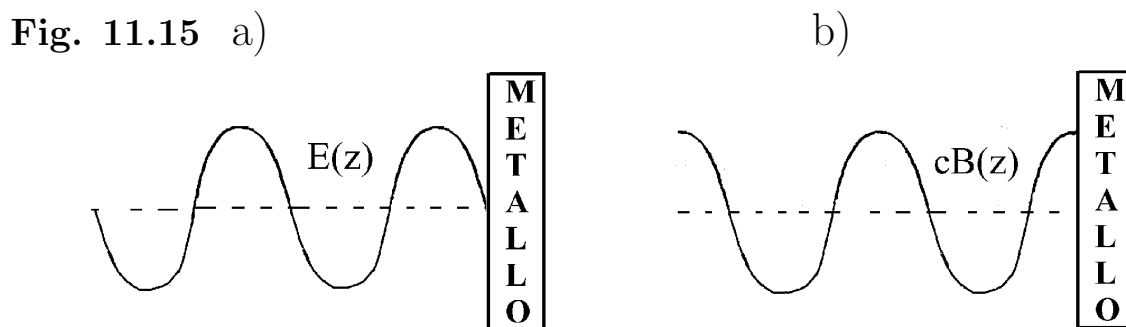
Pensiamo che un'OPPMPL con frequenza infrarossa o visibile incida normalmente su un metallo che riempie il semispazio  $z > 0$ . Poiché il coefficiente di riflessione d'onda è (quasi) uguale a  $-1$ , il campo ELETTRICO nel semispazio vuoto risulta

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E}^+ \cos(kz - \omega t) - \mathbf{E}^+ \cos(-kz - \omega t) = 2\mathbf{E}^+ \sin(kz) \sin(\omega t)$$

E poiché  $\mathbf{k}^-$ ,  $\mathbf{E}^-$  e  $\mathbf{B}^-$  formano terna ortogonale destra come  $\mathbf{k}^+$ ,  $\mathbf{E}^+$  e  $\mathbf{B}^+$ , il campo MAGNETICO nel semispazio vuoto vale

$$\mathbf{B}(t, z) = \mathbf{B}^+ \cos(kz - \omega t) + \mathbf{B}^+ \cos(-kz - \omega t) = 2\mathbf{B}^+ \cos(kz) \cos(\omega t)$$

I campi di questo tipo prendono il nome di **onde stazionarie**. Come mostrato in figura 15a) il campo ELETTRICO è nullo sull'interfaccia ed è nullo su **piani nodali** distanti dall'interfaccia di multipli interi di  $\lambda/2$ . A metà strada tra due piani nodali vi sono **piani ventrali** sui quali il campo ELETTRICO oscilla nel tempo con ampiezza di picco  $2E^+$ . Anche il campo MAGNETICO ha piani nodali e ventrali fissi nello spazio, ma i nodi del campo MAGNETICO sono ventri del campo ELETTRICO e viceversa, come mostrato in figura 15b). Qui un commento è d'obbligo: **il fatto che i campi ELETTRICO**



e MAGNETICO nel vuoto sono in fase vale per onde progressive, non in generale. Nel caso presente i campi ELETTRICO e MAGNETICO in un dato punto oscillano con fasi differenti di  $\pi/2$ , quindi non trasportano energia. Infatti il vettore di Poynting nel semispazio vuoto vale

$$S(t, z) = \frac{E(t, z)B(t, z)}{\mu_0} = \frac{E^2(t, z)}{\mu_0 c} = \frac{(E^+)^2}{\mu_0 c} \sin(2kz) \sin(2\omega t)$$

e ha valor medio temporale nullo in qualunque punto. Naturalmente ciò deriva dal fatto che il flusso di energia associato all'onda riflessa ha verso opposto a quello associato all'onda incidente. Si noti anche che la densità di energia ha valor medio temporale che non dipende dalla posizione, infatti

$$\langle u_{em} \rangle = \langle u_e + u_m \rangle = \epsilon_0 (E^+)^2 [\sin^2(kz) + \cos^2(kz)] = \epsilon_0 (E^+)^2$$

## 11.11 Suscettività dielettrica

Pensiamo di aver misurato l'indice di rifrazione  $n(\omega)$  e l'indice di estinzione  $\eta(\omega)$  di un dielettrico omogeneo in una vasta banda di frequenze e poniamo il problema: calcolare la suscettività dielettrica  $\chi(\omega) = \epsilon(\omega) - 1$ . Abbiamo scritto  $\epsilon(\omega)$  anziché  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  perché consideriamo dielettrici non conduttori. Sappiamo che  $\epsilon = (n + i\eta)^2 = n^2 - \eta^2 + 2in\eta$ , quindi

$$\epsilon'(\omega) = n^2(\omega) - \eta^2(\omega) \quad , \quad \epsilon''(\omega) = 2n(\omega)\eta(\omega)$$

dove  $\epsilon'$  ed  $\epsilon''$  sono le parti reale ed immaginaria di  $\epsilon$ . Naturalmente la suscettività  $\chi(\omega)$  ha parti reale ed immaginaria

$$\chi'(\omega) = n^2(\omega) - \eta^2(\omega) - 1 \quad , \quad \chi''(\omega) = 2n(\omega)\eta(\omega) \quad (11.34)$$

Queste relazioni consentono di calcolare  $\chi(\omega)$  partendo dalle misure di  $n(\omega)$  ed  $\eta(\omega)$ . I risultati sperimentali per dielettrici monoatomici semplici come l'argon liquido mostrano che  $\chi''(\omega)$  è apprezzabilmente diverso da zero solo in prossimità di alcune frequenze nell'ultravioletto lontano, mentre  $\chi'(\omega)$  rimane quasi uguale alla suscettività dielettrica statica  $\chi(0)$  sino a frequenze infrarosse. Nella banda visibile  $\chi'(\omega)$  diventa maggiore di  $\chi(0)$  e prende ad aumentare quadraticamente all'aumentare della frequenza. Per dielettrici poliatomici gli andamenti di  $\chi'(\omega)$  e  $\chi''(\omega)$  sono più complicati: sono presenti picchi e picchetti anche a frequenze infrarosse e, spesso, i picchi non sono ben separati l'uno dall'altro. Ma un fatto era già chiaro alla fine dell'ottocento: gli esperimenti suggeriscono che un dielettrico non conduttore sia costituito da varie classi di cariche oscillanti in modo armonico smorzato, con la  $j$ -esima classe caratterizzata da tre parametri: la **frequenza di risonanza**  $\omega_j$ , la **frequenza di smorzamento**  $\Gamma_j$  ed il numero puro

$$S_j = \frac{q_j^2 n_j}{\epsilon_0 m_j \omega_j^2}$$

dove  $q_j$  è la carica,  $m_j$  la massa ed  $n_j$  la densità degli oscillatori della  $j$ -esima classe. Per tradizione si dice che  $S_j$  è la **“forza” d'oscillatore** della  $j$ -esima classe. Quando il materiale è permeato dal campo ELETTRICO  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  l'oscillatore della  $j$ -esima classe centrato in  $\mathbf{r}$  è sollecitato dalla forza motrice  $q_j\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ , è richiamato alla posizione di equilibrio  $\mathbf{r}$  da una forza elastica proporzionale allo spostamento  $\mathbf{s}(t, \mathbf{r})$ , ed è frenato da una forza d'attrito. Poiché il moto è armonico possiamo assumere che la forza d'attrito sia proporzionale alla velocità  $d\mathbf{s}(t, \mathbf{r})/dt$  e possiamo scrivere l'equazione del moto dell'oscillatore nella forma

$$m_j \frac{d^2\mathbf{s}(t, \mathbf{r})}{dt^2} = q_j\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) - m_j\omega_j^2\mathbf{s}(t, \mathbf{r}) - \Gamma_j m_j \frac{d\mathbf{s}(t, \mathbf{r})}{dt}$$

Sostituendo  $\mathbf{s}(t, \mathbf{r})$  con  $\mathbf{s}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  si vede che i vettori fissi  $\mathbf{s}$  ed  $\mathbf{E}$  sono legati dalla relazione

$$-\omega^2\mathbf{s} = \frac{q_j}{m_j}\mathbf{E} - \omega_j^2\mathbf{s} + i\Gamma_j\omega\mathbf{s} \quad \implies \quad \mathbf{s} = \frac{q_j}{m_j} \frac{\mathbf{E}}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j\omega}$$

Quindi l'oscillatore centrato in  $\mathbf{r}$  acquista il momento di dipolo

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{r}) = q_j \mathbf{s}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \frac{q_j^2/m_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j\omega} \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$$

e gli oscillatori della  $j$ -esima classe, distribuiti nel materiale con densità  $n_j$ , contribuiscono al campo di polarizzazione con

$$\mathbf{P}_j(t, \mathbf{r}) = n_j \mathbf{p}(t, \mathbf{r}) = \frac{q_j^2 n_j / m_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega} \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$$

A questo punto basta scrivere  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{P}_j(t, \mathbf{r})$  e ricordare che  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \chi(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ , per convincersi che

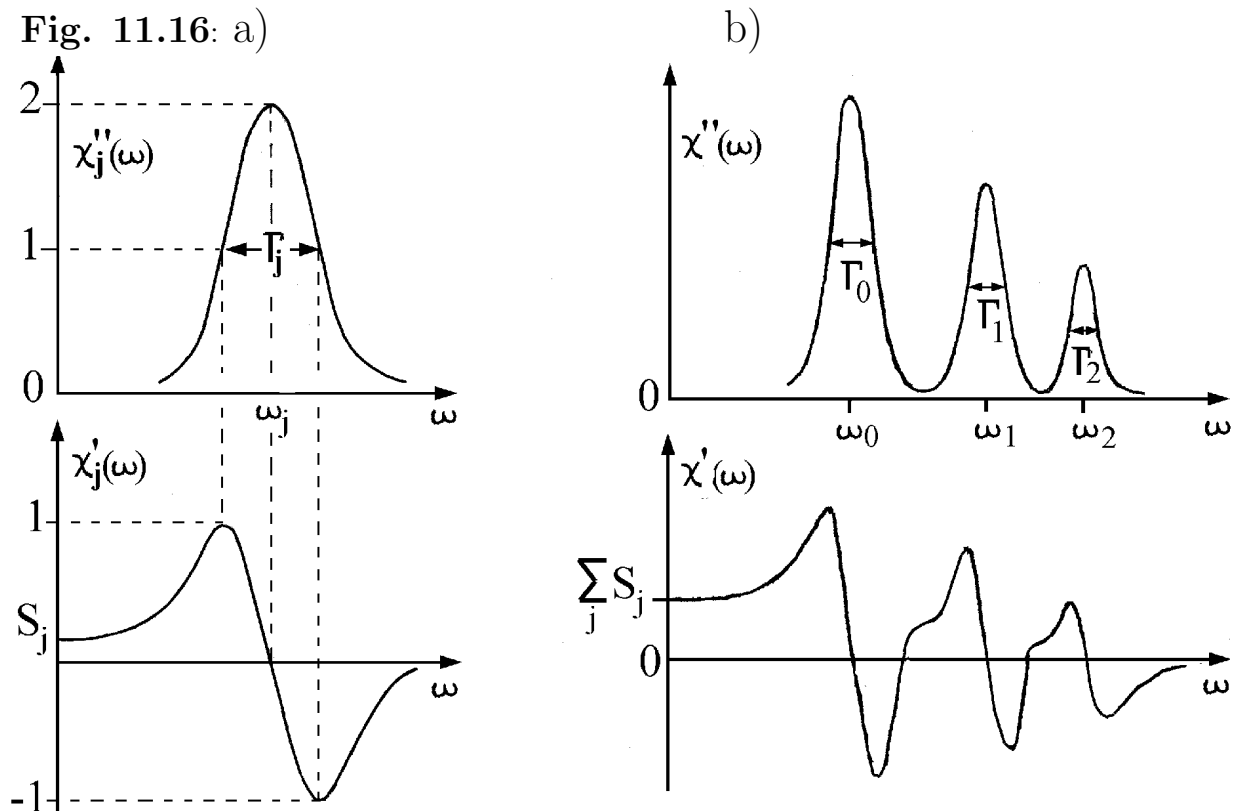
$$\chi(\omega) = \sum_j \chi_j(\omega) \quad \text{con} \quad \chi_j(\omega) = \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega}$$

Prendendo le parti reale ed immaginaria di  $\chi_j(\omega)$  si giunge alle equazioni

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \sum_j \chi'_j(\omega) \quad \text{dove} \quad \chi'_j(\omega) = \frac{S_j \omega_j^2 (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma_j \omega)^2} \\ \chi''(\omega) &= \sum_j \chi''_j(\omega) \quad \text{dove} \quad \chi''_j(\omega) = \frac{S_j \omega_j^2 \Gamma_j \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma_j \omega)^2} \end{aligned} \quad (11.35)$$

che costituiscono guide preziose nelle analisi dei risultati sperimentali.

In figura 16a) abbiamo disegnato gli andamenti delle funzioni  $\chi''_j(\omega)$  e  $\chi'_j(\omega)$  per una classe di oscillatori con  $S_j = 0.2$  e  $\Gamma_j = \omega_j/10$ . Questa scelta ha solo scopo illustrativo: se avessimo usato parametri realistici i grafici avrebbero mostrato picchi tanto stretti da apparire come righe verticali. Per la classe con  $S_j = 0.2$  e  $\Gamma_j = \omega_j/10$  la funzione  $\chi''_j$  prende il valore di picco  $S_j \omega_j / \Gamma_j = 2$  per  $\omega = \omega_j$ , si riduce a metà del valore di picco per



$\omega = \omega_j \pm \Gamma_j/2$  e ha valori importanti solo per frequenze poco diverse dalla frequenza di risonanza  $\omega_j$ . Invece  $\chi'_j$  parte dal valore statico  $S_j$ , raggiunge il valore massimo  $S_j\omega_j/2\Gamma_j = 1$  per  $\omega = \omega_j - \Gamma_j/2$ , passa da zero alla frequenza di risonanza, raggiunge il valore minimo  $-S_j\omega_j/2\Gamma_j = -1$  per  $\omega = \omega_j + \Gamma_j/2$  e ha l'andamento asintotico  $-S_j(\omega_j/\omega)^2$ . **Sottolineiamo che l'ampiezza picco a picco dell'oscillazione di  $\chi'_j$  è uguale all'altezza del picco di  $\chi''_j$ , e la distanza in frequenza tra il massimo ed il minimo di  $\chi'_j$  è uguale alla larghezza a metà altezza del picco di  $\chi''_j$ .**

In figura 16b) abbiamo riportato gli andamenti di  $\chi''(\omega)$  e  $\chi'(\omega)$  per un materiale ideale con alcune risonanze ben separate l'una dall'altra. In tal caso  $\chi'(\omega)$  parte dal valore statico  $\chi(0) = \sum_j S_j$ , rimane costante sino a frequenze un po' minori della prima frequenza di risonanza, poi aumenta, raggiunge un valore massimo appena prima della prima risonanza, passa da un minimo relativo appena dopo la prima risonanza, riprende ad aumentare, mostra una seconda oscillazione intorno alla seconda frequenza di risonanza, e così via. Per frequenze maggiori della più alta frequenza di risonanza,  $\chi'(\omega)$  rimane minore di zero ed aumenta tendendo a zero per  $\omega \rightarrow \infty$ , come nel caso del collisionless plasma.

È importante notare che per materiali con **risonanze ben risolte** la curva sperimentale  $\chi''(\omega)$  fornisce tutti i parametri del modello. Infatti le frequenze dei picchi individuano le frequenze  $\omega_j$ , le larghezze a metà altezza dei picchi forniscono le frequenze  $\Gamma_j$  e le altezze dei picchi, moltiplicate per  $\Gamma_j/\omega_j$ , forniscono le forze d'oscillatore  $S_j$ . Ciò implica che la curva  $\chi'(\omega)$  è completamente determinata quando è nota  $\chi''(\omega)$ . Naturalmente anche la misura di  $\chi'(\omega)$  determina tutti i parametri del modello, quindi dobbiamo concludere che **le parti reali ed immaginaria della suscettività dielettrica sono legate da relazioni funzionali che consentano di calcolare una delle due quando è nota l'altra**. Lasciamo a corsi più avanzati il compito di dimostrare che la proprietà evidenziata in grassetto non è un artefatto del modello che abbiamo esposto, vale sempre, anche quando il materiale ha bande di assorbimento ricche di risonanze non ben risolte.

Ora consideriamo un dielettrico monoatomico con risonanze nell'ultravioletto lontano e concentriamo l'attenzione sulla banda visibile. In tale banda il dielettrico è certamente trasparente perché i picchi di  $\chi''$  sono nell'ultravioletto. Inoltre i contributi a  $\chi'$  di tutte le risonanze diverse dalla prima possono essere approssimati senza errori significativi da  $S_j$  perché  $\omega^2$  è trascurabile rispetto a  $\omega_j^2$ . Per la prima risonanza, cui attribuiamo l'indice 0, rimane vero che il termine  $(\Gamma_0\omega)^2$  al denominatore di  $\chi_0(\omega)$  è trascurabile perché la risonanza è ben fuori dalla banda visibile, quindi possiamo scrivere

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) \approx \frac{S_0\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \sum_{j=1}^{\infty} S_j \approx S_0 \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j = \chi(0) + S_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$



dove  $\chi(0) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j$  è la suscettività statica. Abbiamo così giustificato il fatto che la suscettività di un dielettrico monoatomico nella banda visibile è maggiore di quella statica di una quantità che aumenta quadraticamente con la frequenza. In realtà molti dielettrici poliatomici che risultano quasi perfettamente trasparenti nella banda visibile hanno bande di assorbimento nel lontano infrarosso dovute ai modi di oscillazioni dei core ionici. Anche per tali materiali la suscettività nella banda visibile ha andamento ben approssimato da  $\chi(\omega) = a + b\omega^2$  con  $b$  positivo, ma in tal caso la costante  $a$  è ben minore della suscettività statica.

Infine partiamo dalla seconda delle equazioni (34) e notiamo che l'indice di estinzione può essere scritto come  $\eta = \chi''/2n$ . Pertanto il campo ELETTROTRICO e l'intensità di un'OPPM che si propaga nel dielettrico lungo l'asse  $z$  decadono con gli andamenti

$$E(z) = E(0)e^{-\frac{\omega}{c} \frac{\chi''(\omega)}{2n(\omega)} z}, \quad \mathcal{I}(z) = \mathcal{I}(0)e^{-\frac{\omega}{c} \frac{\chi''(\omega)}{n(\omega)} z}$$

Il confronto di quest'ultima equazione con l'equazione (10.16) suggerisce di attribuire ad un atomo immerso nel materiale la sezione d'urto

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega \chi''(\omega)}{cn(\omega)n_\alpha}$$

dove  $n_\alpha$  è la densità di atomi. Ma questa sezione d'urto può essere ben diversa da quella dell'atomo isolato, sia perché le frequenze di risonanza e di smorzamento dipendono dalla densità e dallo stato di aggregazione, sia perché la presenza dell'indice di rifrazione  $n(\omega)$  al denominatore può rendere non lorentziani i profili dei picchi di assorbimento.

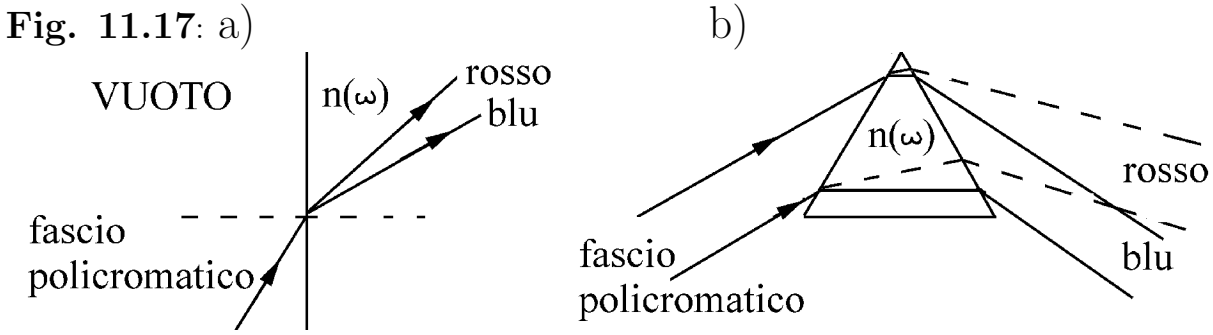
## ESERCIZI

1) Considerare un dielettrico contenente una sola classe di oscillatori con densità  $n_0 = 10^{29}/m^3$ , frequenza di risonanza  $\omega_0 = 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  e frequenza di smorzamento  $\Gamma_0 = 10^{12} \text{ s}^{-1}$ . Per le frequenze di  $10^{15} \text{ s}^{-1}$  e  $10^{17} \text{ s}^{-1}$ , calcolare i valori a) della funzione dielettrica, b) dell'indice di rifrazione, c) dell'indice di estinzione, d) della riflettività ad incidenza normale.

## 11.12 Velocità di fase e di gruppo

Finora abbiamo ragionato come se le OPPMPL avessero significato fisico autonomo, ovvero abbiamo pensato che nella regione spaziale e nell'intervallo di tempo di nostro interesse possano esistere campi elettromagnetici ben approssimati da OPPMPL. Nel vuoto illimitato è davvero così, ma nei materiali le onde elettromagnetiche si propagano con la **relazione di dispersione**  $k = (\omega/c)n(\omega)$  che, in generale, non è lineare in  $\omega$ , e ciò origina **effetti di dispersione**.

Un primo effetto di dispersione si manifesta quando un fascio di radiazione ben collimato angularmente incide dal vuoto su una superficie di vetro con angolo di incidenza non piccolo, come mostrato in figura 17a). Il fascio



viene disperso angularmente perché l'indice di rifrazione (di solito) aumenta all'aumentare della frequenza. La dispersione angolare viene sfruttata nello spettrografo a prisma schematizzato in figura 17b). Il fascio parallelo di radiazione incidente sul prisma viene disperso angularmente sull'interfaccia d'ingresso e, ammesso che incida sulla seconda interfaccia con angolo d'incidenza minore dell'angolo limite, esce dal prisma ancor più disperso angularmente. Su uno schermo posto a grande distanza la dispersione angolare appare come dispersione cromatica.

Un secondo effetto di dispersione, meno spettacolare, ma ancor più importante, riguarda la velocità di propagazione dell'energia elettromagnetica. Cominciamo a pensare che due OPPMPL si propagano lungo l'asse  $z$  con  $\omega$  lievemente diverse, ma con ampiezze e versi di polarizzazione comuni individuati dal vettore fisso reale  $\mathbf{E}$ . Indichiamo con  $\omega - d\omega$  e  $\omega + d\omega$  le due frequenze, con  $k - dk$  e  $k + dk$  i moduli dei due vettori d'onda e scriviamo il campo ELETTRICO complessivo come

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, z) &= \frac{1}{2} \mathbf{E} e^{i[(k-dk)z - (\omega-d\omega)t]} + \frac{1}{2} \mathbf{E} e^{i[(k+dk)z - (\omega+d\omega)t]} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} e^{i(kz - \omega t)} [e^{-i(zdk - td\omega)} + e^{i(zdk - td\omega)}] = \mathbf{E} e^{i(kz - \omega t)} \cos(zdk - td\omega) \end{aligned}$$

Prendendo la parte reale vediamo che il campo ELETTRICO vale

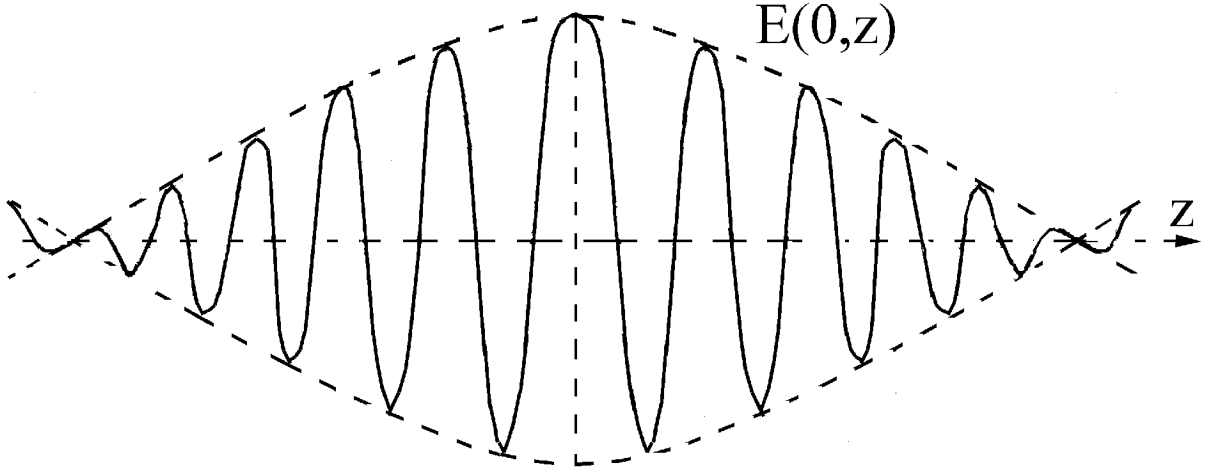
$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E} \cos(kz - \omega t) \cos[dk(z - t \frac{d\omega}{dk})] \quad (11.36)$$

ed è il prodotto dell'onda portante  $\mathbf{E} \cos(kz - \omega t)$  per il **fattore di modulazione**  $\cos[dk(z - t d\omega/dk)]$ . Si noti subito che l'onda portante ed il fattore di modulazione si propagano con velocità diverse, rispettivamente

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \quad , \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega} \quad (11.37)$$

La prima prende il nome di **velocità di fase**, la seconda prende il nome di **velocità di gruppo**. Nel vuoto la due velocità sono uguali, ma nei materiali sono sempre diverse. Per capire il significato della velocità di gruppo

Fig. 11.18



pensiamo che  $k/2dk = N$  sia un intero molto maggiore dell'unità, e notiamo che il campo al tempo zero vale

$$\mathbf{E}(0, z) = \mathbf{E} \cos(kz) \cos\left(\frac{kz}{2N}\right)$$

Dalla figura 18, disegnata per  $N = 10$ , si vede che il treno d'onde è formato da **pacchetti** contenenti  $N$  oscillazioni complete. Al passare del tempo i pacchetti si spostano con la velocità di gruppo e, poiché la densità di energia è massima al centro del pacchetto e nulla agli estremi, dobbiamo concludere che la velocità di propagazione dell'energia nel materiale è proprio la velocità di gruppo  $v_g(\omega)$ . Si noti che questa conclusione non dipende dal numero di oscillazioni in ciascun pacchetto: anche l'onda progressiva più monocromatica che si possa immaginare è costituita da pacchetti d'onde che si propagano con la velocità di gruppo. Aggiungiamo che in situazioni reali i diversi pacchetti non si susseguono con periodicità, come quelli che abbiamo ottenuto sovrapponendo solo due OPPMPL, e devono essere descritti sovrapponendo tante OPPMPL. Comunque rimane vero che il numero  $N$  di ondulazioni in un pacchetto è una misura del grado di monocromaticità del fascio.

Come esempio consideriamo il collisionless plasma. Per frequenze maggiori della frequenza di plasma,  $\omega$  e  $k$  sono legati dalla relazione di dispersione 32) che possiamo riscrivere nella forma

$$\omega(k) = \sqrt{c^2k^2 + \omega_p^2} \quad (11.38)$$

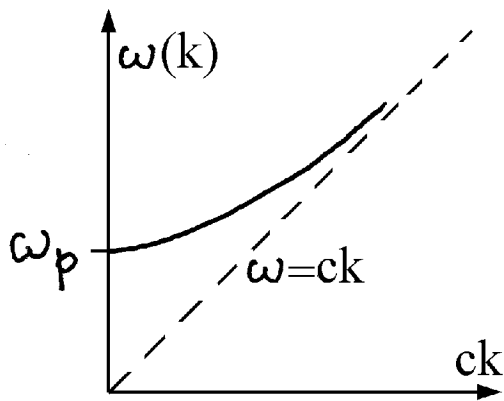
Questa relazione, riportata nel grafico di figura 19a), mostra che la velocità di fase delle onde progressive nel plasma vale

$$v_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} = c\sqrt{1 + \omega_p^2/(ck)^2} \quad (11.39)$$

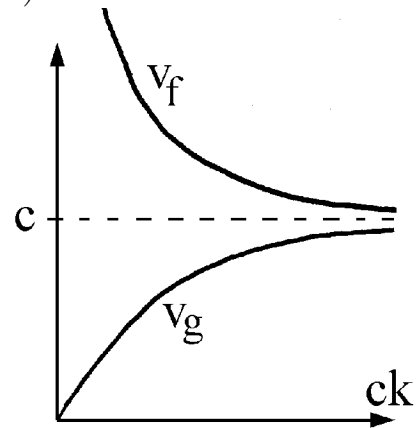
mentre la velocità di gruppo risulta

$$v_g(k) = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{c^2k}{\sqrt{c^2k^2 + \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2/(ck)^2}} \quad (11.40)$$

Fig. 11.19: a)



b)



Come mostrato in figura 19b), la velocità di fase e la velocità di gruppo tendono entrambe a  $c$  all'aumentare della frequenza, ma sono ben diverse a basse frequenze, la prima è maggiore di  $c$  la seconda è minore di  $c$ .

Infine sottolineiamo che, entro un generico materiale, **l'intensità di una onda progressiva è il prodotto della densità d'energia elettromagnetica per la velocità di gruppo**, non per la velocità di fase. In particolare quando un'onda elettromagnetica incide dal vuoto su un materiale, l'intensità dell'onda trasmessa deve essere calcolata come prodotto dell'intensità dell'onda incidente sul materiale per il coefficiente di trasmissione di potenza  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$ , e la densità di energia nel materiale deve essere calcolata come rapporto tra l'intensità dell'onda trasmessa e la velocità di gruppo.

### ESERCIZI

1) Un'OPP quasi monocromatica si propaga con frequenza  $\omega = (3 \cdot 10^{15} \pm 10^8) \text{ s}^{-1}$  entro un materiale trasparente che ha  $n = 1.45$  per  $\omega = 2.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , e  $n = 1.55$  per  $\omega = 3.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Valutare: a) la velocità di fase, b) la velocità di gruppo, c) la lunghezza d'onda.

2) Un'OPP quasi monocromatica si propaga con  $\omega = 5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  entro un materiale trasparente che ha  $n = 0.63$  per  $\omega = 4.9 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  ed  $n = 0.65$  per  $\omega_p = 5.1 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Calcolare: a) le velocità di fase e di gruppo, b) la lunghezza d'onda nel materiale.

3) Un'onda di frequenza  $\omega = 5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  ed intensità  $\mathcal{I} = 1 \text{ W/cm}^2$  incide normalmente su un materiale che, alla data frequenza, ha  $n = 0.8$  e  $d\omega/dk = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Calcolare: a) l'intensità dell'onda trasmessa al materiale, b) la densità d'energia elettromagnetica nel materiale.

# Capitolo 12

## Principi di funzionamento di strumenti in riflessione

In questo capitolo studiamo gli effetti di diffrazione-interferenza che si manifestano quando la radiazione viene riflessa da dischi, nastri e pettini di nastri, e quando passa attraverso fori, fenditure e pettini di fenditure. Poi descriviamo strumenti basati sulla riflessione, che consentono di manipolare i fasci di radiazione e di studiarne le caratteristiche.

### 12.1 Principio di Fermat

Nei primi decenni dell'800, quando l'elettromagnetismo muoveva i primi passi, l'ottica era già una scienza ben sviluppata: la teoria ondulatoria aveva preso il sopravvento su quella corpuscolare ed i suoi principi fondamentali, introdotti da Fermat e da Huyghens nella seconda metà del XVII secolo, erano stati precisati ed estesi principalmente ad opera di Fresnel, ed erano stati convalidati da una vasta mole di fatti sperimentali. Il **principio di Fermat** può essere enunciato dicendo che, **nel propagarsi da un punto ad un altro la radiazione segue il cammino di sfasamento minimo**. Precisamente, quando una sorgente  $P$  puntiforme e monocromatica ed un rivelatore puntiforme  $Q$  sono immersi in un ambiente di indice di rifrazione  $n(\mathbf{r})$  dipendente dalla posizione, il cammino della radiazione dalla sorgente al rivelatore è quello che rende minimo lo

$$\text{sfasamento} \quad \int_P^Q k(\mathbf{r}) ds \quad \text{dove} \quad k(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} n(\mathbf{r})$$

In altre parole: la radiazione segue il cammino che rende minimo il

$$\text{percorso ottico} \quad \int_P^Q n(\mathbf{r}) ds$$

Per giustificare il principio di Fermat, cominciamo a considerare la situazione mostrata in figura 1. La sorgente  $P$ , schermata in modo da non illuminare il rivelatore  $Q$ , illumina lo specchio piano  $S_p$  normale al foglio.

Fig. 12.1

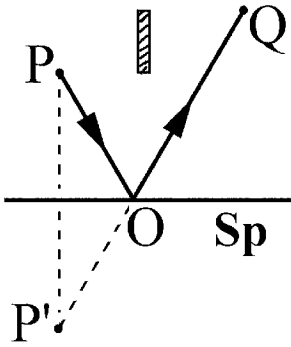
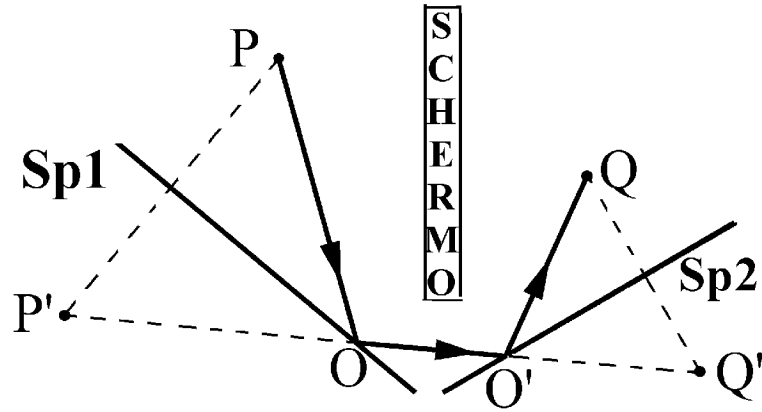


Fig. 12.2



Per individuare il cammino di sfasamento minimo da  $P$  a  $Q$  con impatto sullo specchio basta costruire la sorgente virtuale  $P'$  speculare di  $P$  e congiungerla con  $Q$  (oppure il rivelatore virtuale  $Q'$  speculare di  $Q$  e congiungerlo con  $P$ ). Indicato con  $O$  il punto d'intersezione del segmento  $P'Q$  con lo specchio, è facile convincersi che i cammini con impatto in punti diversi da  $O$  hanno lunghezza maggiore di  $\overline{PO} + \overline{OQ}$ , quindi hanno sfasamento maggiore di  $k(\overline{PO} + \overline{OQ})$ . Poiché le rette  $PO$  e  $OQ$  formano con lo specchio angoli complanari uguali, si vede che il principio di Fermat conduce alla legge di riflessione di Cartesio. Nel caso considerato in figura 2, la sorgente monocromatica  $P$  illumina lo specchio piano  $Sp1$  mentre il rivelatore vede direttamente lo specchio piano  $Sp2$ ; entrambi gli specchi sono ortogonali al foglio. In tal caso costruiamo la sorgente virtuale  $P'$  speculare di  $P$  rispetto al primo specchio ed il rivelatore virtuale  $Q'$  speculare di  $Q$  rispetto al secondo specchio. Indicati con  $O$  ed  $O'$  i punti d'intersezione del segmento  $P'Q'$  con i due specchi, il cammino di minimo sfasamento è  $POO'Q$ .

Nei casi considerati nelle figure 1 e 2 i cammini di sfasamento minimo sono unici, ma spesso non è così: i sistemi di focalizzazione della radiazione sono

Fig. 12.3

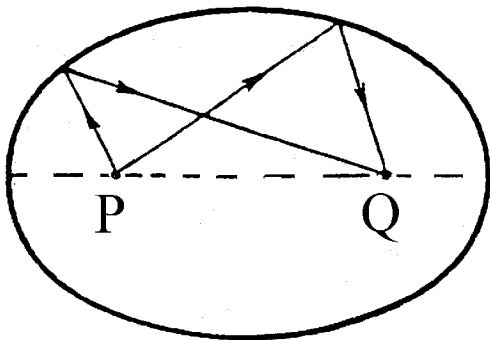
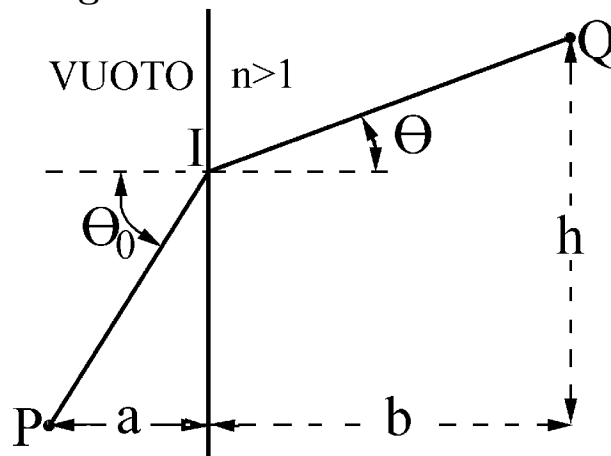


Fig. 12.4



costruiti in modo che lo sfasamento dalla sorgente al rivelatore sia minimo per un insieme di cammini contigui. Ad esempio, nel caso considerato in figura 3 la potenza emessa dalla sorgente  $P$  viene concentrata nel punto  $Q$

per riflessione sulla parete interna di un ellissoide di rotazione con fuochi in  $P$  e  $Q$ ; tutti i cammini dalla sorgente al rivelatore con impatto sull'ellissoide hanno lunghezza uguale a quella dell'asse maggiore e soddisfano la condizione di minimo sfasamento; inoltre soddisfano la legge di Cartesio: gli angoli d'incidenza e di riflessione sull'ellissoide sono uguali e complanari.

Passiamo a considerare la situazione mostrata in figura 4. La sorgente  $P$  è a distanza  $a$  dal piano che separa il vuoto da un materiale di indice di rifrazione  $n$ ; il rivelatore  $Q$  è posto entro il materiale a distanza  $b$  dall'interfaccia; le proiezioni di  $P$  e  $Q$  sul piano d'interfaccia sono separate da distanza  $h$ . Scelto sull'interfaccia un punto d'impatto  $I$  ed indicati con  $\theta_0$  e  $\theta$  gli angoli formati dalle rette  $PI$  ed  $IQ$  con la normale all'interfaccia, lo sfasamento dalla sorgente al rivelatore per il cammino che passa da  $I$  risulta  $k\overline{PI} + nk\overline{IQ}$ , quindi il percorso ottico vale

$$\overline{PI} + n\overline{IQ} = \frac{a}{\cos \theta_0} + n\frac{b}{\cos \theta}$$

e la condizione di minimo percorso ottico diventa

$$\frac{a \sin \theta_0 d\theta_0}{\cos^2 \theta_0} + n\frac{b \sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = 0$$

D'altra parte la figura mostra che  $a \tan \theta_0 + b \tan \theta = h$ , quindi

$$\frac{a d\theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \frac{b d\theta}{\cos^2 \theta} = 0$$

Dalle due relazioni si vede che **il principio di Fermat conduce alla legge di Snell**  $\sin \theta_0 = n \sin \theta$ . Nel prossimo capitolo vedremo che, anche in questo caso, l'interfaccia può essere sagomata in modo che la condizione di sfasamento minimo sia soddisfatta da un insieme di cammini contigui.

A prima vista il principio di Fermat sembra in contrasto con quanto abbiamo visto nei capitoli precedenti; ad esempio nel caso considerato in figura 1 ogni elemento dello specchio investito dall'onda incidente è sede di correnti e riemette onde dipolari che raggiungono il rivelatore, quindi dobbiamo pensare che la radiazione segua tutti i possibili percorsi, non solo quello di sfasamento minimo. In realtà ogni fascetto di percorsi contigui che raggiunge il rivelatore fornisce un contributo al campo elettrico (o magnetico) caratterizzato da verso, ampiezza e fase, ed il campo elettrico sul rivelatore è la somma di tutti i contributi, come vedremo nei prossimi paragrafi.

## 12.2 Metodo di Huyghens-Fresnel, zone di Fresnel

In questo paragrafo introduciamo gli elementi essenziali della teoria della diffrazione di Huyghens-Fresnel limitando l'attenzione ad una situazione semplice. Pensiamo che un'OPPMPL incida normalmente su uno specchio piano

Fig. 12.5

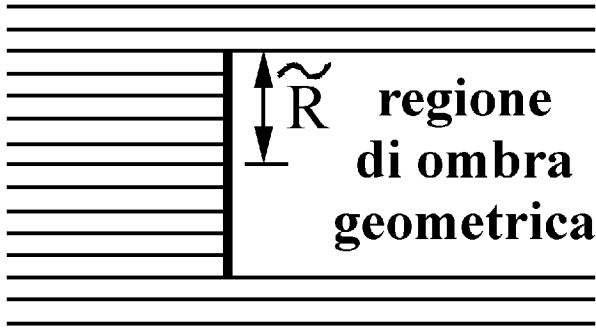
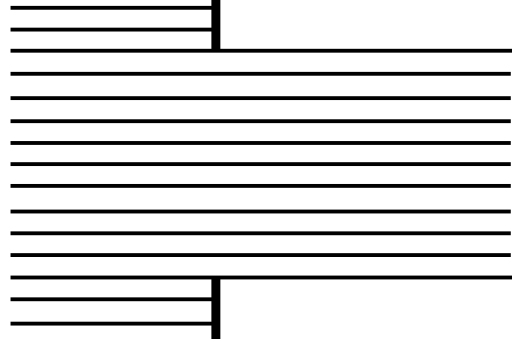


Fig. 12.6



perfetto di raggio  $\widetilde{R}$ , come mostrato in figura 5, ed ammettiamo che la densità di corrente indotta nello specchio sia quella che sarebbe presente in uno specchio illimitato, ovvero trascuriamo gli effetti di bordo. Poi consideriamo la situazione complementare mostrata in figura 6: la stessa OPPMPL incide normalmente su uno specchio piano illimitato nel quale è aperto un foro che può essere chiuso esattamente dallo specchio di figura 5. Se il foro fosse davvero chiuso le correnti indotte nello specchio completo genererebbero un campo elettrico che, nella regione di destra, cancellerebbe il campo elettrico incidente rendendo nullo il campo ELETTRICO. Poiché la situazione con foro aperto equivale alla sovrapposizione dello specchio completo e di un tappo percorso da correnti opposte a quelle che percorrono lo specchio centrale, il foro emette come un disco percorso da correnti armoniche. Con questo approccio, introdotto da **Babinet**, è facile giustificare la teoria di Fresnel facendola discendere dal principio di sovrapposizione dei campi EM emessi dalle correnti distribuite sugli specchi perfetti o sulle aperture complementari, e ciò senza perdere di vista il fatto che i campi elettrico e magnetico sono ortogonali al verso di propagazione, cosa quasi sempre trascurata anche da trattazioni formali presentate come “rigorose”. Sottolineiamo che **si sovrappongono i campi EM, non le intensità**; ad esempio la sovrapposizione di due OPPMPL con lo stesso vettore d’onda, la stessa ampiezza e la stessa polarizzazione ha intensità nulla quando le due onde sono in antifase e intensità quattro volte maggiore di quella di ciascun’onda quando le due onde sono in fase.

Ora pensiamo che il rivelatore Q sia posto sull’asse del foro, a distanza  $z$  dal centro, come in figura 7, e pensiamo che il campo elettrico incidente sia polarizzato nel piano del foglio e sia descritto, al tempo zero, da (la parte reale di)  $Ee^{ikz}$ , con  $E$  reale. Per calcolare il campo elettrico in Q, scomponiamo il foro in anelli concentrici, indichiamo con  $h$  la differenza tra le distanze di Q dall’anello ombreggiato in figura e dal centro del foro, ovvero

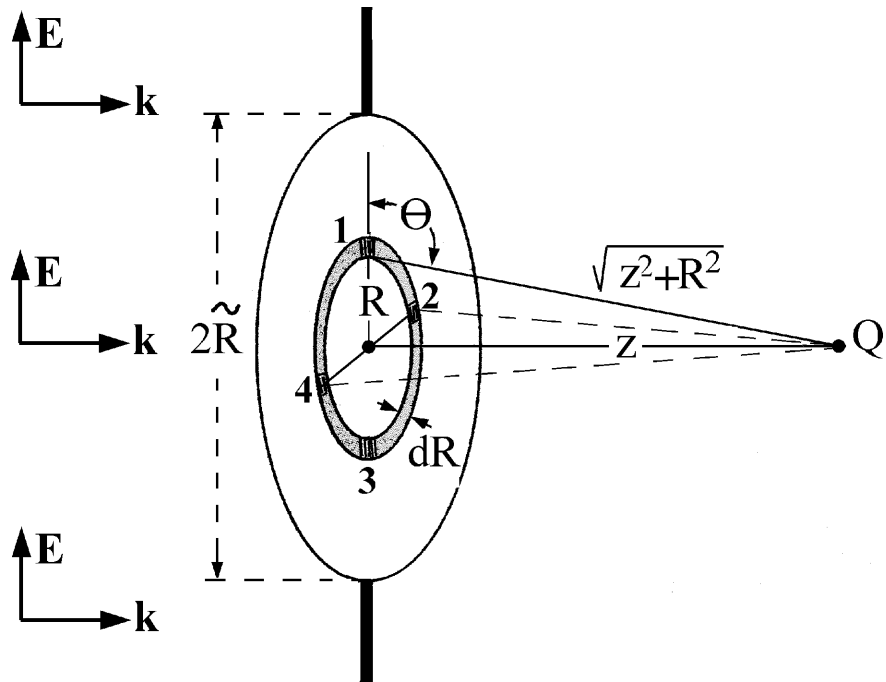
$$h = \sqrt{z^2 + R^2} - z \quad \Longrightarrow \quad R^2 = 2zh + h^2 \quad (12.1)$$

e notiamo che l’area dell’anello ombreggiato risulta

$$2\pi R dR = \pi dR^2 = 2\pi(z + h)dh$$



Fig. 12.7



Poi pensiamo che  $z$  sia ben maggiore di  $\lambda$ , ovvero che  $kz$  sia molto maggiore dell'unità, in modo da poter descrivere i campi generati dagli elementi di corrente in approssimazione di campo remoto. In tal caso il contributo dell'anello al campo elettrico in  $Q$  è il prodotto dei seguenti fattori.

- Un fattore proporzionale all'ampiezza  $E$  del campo elettrico incidente. Lo indichiamo con  $\gamma E$ , riservandoci di determinare il numero complesso  $\gamma$  che dipende dagli sfasamenti tra il campo elettrico incidente e le correnti indotte e tra queste ed il campo elettrico riemesso.
- L'area dell'anello  $2\pi(z+h)dh$ .
- Il fattore  $1/(z+h)$ , dovuto al fatto che i campi di radiazione sono inversamente proporzionali alla distanza dalla sorgente.
- Il fattore  $e^{ik(z+h)}$  che tiene conto dello sfasamento dall'anello al punto  $Q$ .
- Il **fattore d'obliquità di Sommerfeld**  $\sin \theta = z/(z+h)$ . Per giustificare questo fattore conviene considerare il campo magnetico che è legato alle correnti in modo diretto. Le correnti in tutti gli elementi d'anello oscillano nella direzione di  $\mathbf{E}$ , quindi i contributi al campo  $\mathbf{B}$  degli elementi 1 e 3 sono concordi, normali al foglio e sono proporzionali al seno dell'angolo  $\theta$  formato dal verso di oscillazione e di emissione. Per gli elementi 2 e 4 il seno di  $\theta$  è unitario, ma i contributi a  $\mathbf{B}$  dei due elementi non sono normali al foglio, sono inclinati da parti opposte in modo che la loro somma è normale al foglio ed è anch'essa proporzionale ad  $z/(z+h)$ . Per il campo  $\mathbf{E}$  il discorso è più complicato e porta ad un fattore d'obliquità un po' diverso, ma per evitare di appesantire il discorso più del necessario e per concentrare l'attenzione sugli aspetti essenziali della teoria di Fresnel, usiamo il fattore d'obliquità di Sommerfeld  $\sin \theta = z/(z+h)$  e lo approssimiamo con  $e^{-h/z}$ , come lecito per  $h \ll z$ , riservandoci di tornare su questo punto alla fine del paragrafo.

Tenendo conto dei fattori elencati, vediamo che il contributo dell'anello al campo elettrico in Q risulta

$$dE = \gamma E 2\pi(z+h)dh e^{ik(z+h)} \frac{1}{z+h} e^{-h/z} = 2\pi\gamma E e^{ikz} e^{(ik-1/z)h} dh$$

e vediamo che il risultato può essere riscritto nella forma

$$dE = \frac{2\pi\gamma}{ik-1/z} E e^{ikz} e^\xi d\xi \quad \text{dove} \quad \xi = (ik-1/z)h$$

Per determinare  $\gamma$ , integriamo  $dE$  su un foro di raggio infinito, ovvero consideriamo la situazione di propagazione libera, e richiediamo che il risultato sia  $Ee^{ikz}$ , come deve. Tenendo presente che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{(ik-1/z)h} e^\xi d\xi = \lim_{h \rightarrow \infty} [e^{(ik-1/z)h} - 1] = -1$$

vediamo che anche il fattore  $2\pi\gamma/(ik-1/z)$  deve valere  $-1$ , ovvero che

$$\gamma = -\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{2\pi z} \quad (12.2)$$

Quindi possiamo concludere che il contributo dell'anello al campo in Q vale

$$dE = -E e^{ikz} e^\xi d\xi \quad \text{dove} \quad \xi = (ik-1/z)h \quad (12.3)$$

Ora indichiamo con  $\tilde{h}$  la differenza delle distanze di Q dal bordo e dal centro del foro, e calcoliamo il campo  $E_Q$  integrando  $dE$  su tutto il foro:

$$E_Q = -E e^{ikz} \int_0^{(ik-1/z)\tilde{h}} e^\xi d\xi = E e^{ikz} [1 - e^{(ik-1/z)\tilde{h}}]$$

Dunque il campo in Q è il prodotto del campo che vi sarebbe in assenza di ostacoli per il fattore in parentesi quadra. In formula

$$E_Q = E e^{ikz} f(k\tilde{h}) \quad \text{dove} \quad f(k\tilde{h}) = 1 - e^{ik\tilde{h}} e^{-\tilde{h}/z} \quad (12.4)$$

Come mostrato in figura 8, il fattore  $f(k\tilde{h})$  è una spirale del piano complesso: parte dall'origine per  $\tilde{h} = 0$ , circola in senso antiorario intorno al punto  $(1,0)$  e converge in tale punto. Un punto della spirale è individuato dall'angolo al centro  $k\tilde{h}$  e dalla distanza  $e^{-\tilde{h}/z}$  che lo separa dal centro. Il modulo di  $f(k\tilde{h})$  ha l'andamento mostrato in figura 9: ha un primo massimo lievemente minore di 2 per  $k\tilde{h} = \pi$ , ovvero per  $\tilde{h} = \lambda/2$ , poi oscilla intorno all'unità con ampiezza decrescente all'aumentare di  $k\tilde{h}$ . I valori massimi e minimi vengono raggiunti per  $k\tilde{h} = N\pi$ , ovvero per

$$\tilde{h} = N\lambda/2 \quad \text{con } N \text{ intero}$$

Fig. 12.8

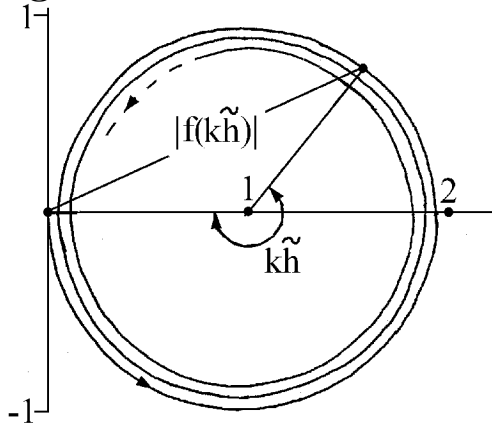
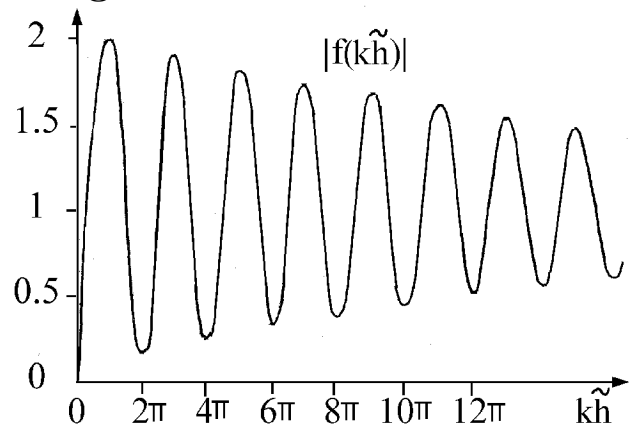


Fig. 12.9



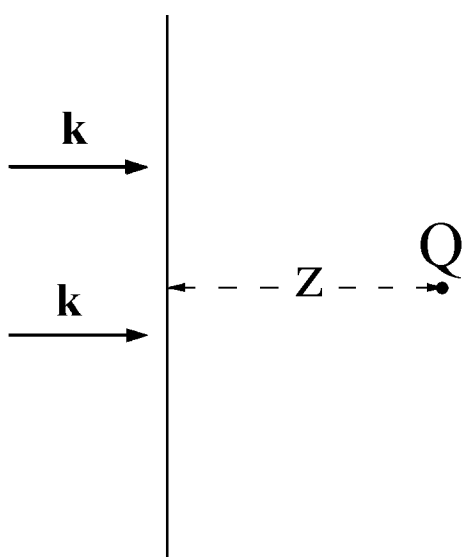
Ricordando che  $R$  è legata ad  $h$  dall'equazione 1), possiamo concludere che il campo sull'asse a distanza dal foro  $z \gg \lambda$  ha valori minimi e massimi quando il raggio del foro prende i valori

$$R_N = \sqrt{Nz\lambda + (N\lambda/2)^2} \quad (12.5)$$

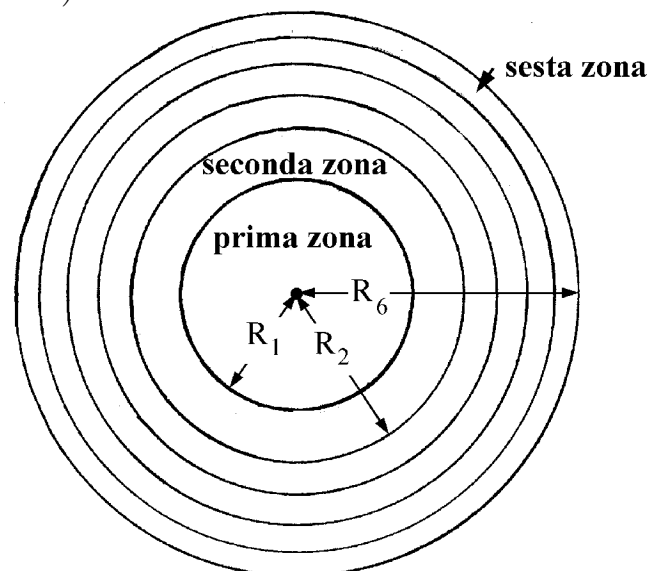
Il campo è massimo per  $N$  dispari e minimo per  $N$  pari. Si noti che un foro di raggio  $\tilde{R} = R_1$  produce in  $Q$  un campo quasi doppio di quello prodotto da un foro illimitato, e un foro di raggio  $R_2$  produce un campo quasi nullo.

A questo punto conviene fissare l'attenzione sulla configurazione geometrica mostrata in figura 10a). Dato un vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , un piano normale a  $\mathbf{k}$  ed un rivelatore puntiforme posto a distanza  $z$  dal piano, scomponiamo il piano in **zone di Fresnel** centrate nel piede di perpendicolare dal rivelatore al piano, come mostrato in figura 10b). La prima zona di Fresnel è il cerchio

Fig. 12.10: a)



b)



di raggio  $R_1$ , l' $N$ -esima zona di Fresnel è l'anello confinato tra le circonferenze di raggio  $R_N$  ed  $R_{N-1}$ . Poi pensiamo che il piano sia ricoperto da uno strato riflettente ovunque tranne che in una particolare zona di Fresnel. Indichiamo

con  $E_N$  il campo presente sul rivelatore quando è aperta solo l' $N$ -esima zona di Fresnel e notiamo che vale il seguente risultato importante

$$E_{N+1} = -\alpha E_N \quad \text{dove} \quad \alpha = e^{-\lambda/2z} \quad (12.6)$$

Infatti partendo dalle equazioni 4) e ricordando che  $\tilde{h} = N\lambda/2$  si vede che

$$E_1 = Ee^{ikz}(1 - e^{i\pi}e^{-\lambda/2z}) = Ee^{ikz}(1 + \alpha)$$

$$E_2 = Ee^{ikz}(1 - \alpha^2) - Ee^{ikz}(1 + \alpha) = -Ee^{ikz}\alpha(1 + \alpha) = -\alpha E_1$$

$$E_3 = Ee^{ikz}(1 + \alpha^3) - Ee^{ikz}(1 - \alpha^2) = Ee^{ikz}\alpha^2(1 + \alpha) = -\alpha E_2$$

e così via. In condizioni tipiche il parametro  $\alpha$  è lievemente minore dell'unità, ad esempio  $\alpha = 0.99$ , quindi due successive zone di Fresnel danno contributi al campo sul rivelatore quasi uguali in valore assoluto, ma di segno opposto.

Ora pensiamo che il piano sia ricoperto da uno strato riflettente ovunque tranne che su un foro di raggio  $\tilde{R}$  centrato proprio come le zone di Fresnel, e studiamo la potenza trasmessa sull'asse del foro. Anzitutto notiamo che per  $z \gg \tilde{R}^2/\lambda$  la prima zona di Fresnel ha raggio  $R_1 \approx \sqrt{z\lambda}$  molto maggiore del raggio del foro, quindi tutte le regioni del foro contribuiscono quasi in fase al campo sul rivelatore e l'equazione 4) si riduce a

$$E_Q = -iEe^{ikz}\frac{\pi\tilde{R}^2}{\lambda z} \quad \text{valida per} \quad z \gg \frac{\tilde{R}^2}{\lambda} \quad (12.7)$$

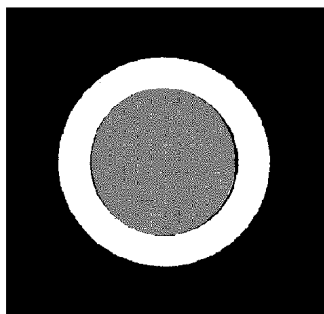
infatti  $f(k\tilde{h})$  si riduce a  $-ik\tilde{h}$  e  $\tilde{h}$  si riduce a  $\tilde{R}^2/2z$ . L'equazione 7) descrive il campo sull'asse nell'**approssimazione di Fraunhofer** che useremo estesamente a partire dal paragrafo 4. Per ora notiamo che a grandi distanze l'intensità  $\mathcal{I}_Q$  della radiazione sull'asse del foro è legata all'intensità  $\mathcal{I}_0$  della radiazione incidente dalla relazione

$$\mathcal{I}_Q = \mathcal{I}_0 \left( \frac{\pi\tilde{R}^2}{\lambda z} \right)^2 \quad \text{valida per} \quad z \gg \frac{\tilde{R}^2}{\lambda} \quad (12.8)$$

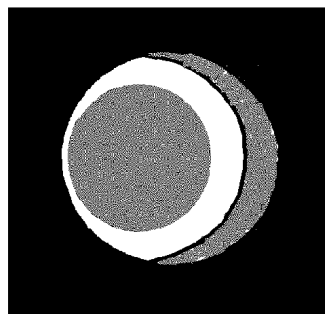
Al diminuire della distanza le zone di Fresnel si rimpiccioliscono, come precisato dall'equazione 5, ed il campo in Q aumenta sino a raggiungere valore massimo quando la prima zona di Fresnel riempie il foro, poi diminuisce sino a diventare minimo quando le prime due zone riempiono il foro, torna ad aumentare sino a raggiungere un massimo un po' minore del precedente quando le prime tre zone riempiono il foro e così via.

Finora abbiamo pensato che il rivelatore sia sull'asse del foro, ora consideriamo qualitativamente le situazioni mostrate in figura 11. In a) il rivelatore è ancora sull'asse del foro e vede aperte le prime due zone di Fresnel, quindi misura un campo quasi nullo perché i contributi delle due zone sono quasi opposti. In b) e c) il foro è spostato lateralmente rispetto al rivelatore e la situazione cambia radicalmente. Nel caso b) il foro apre tutta la prima zona

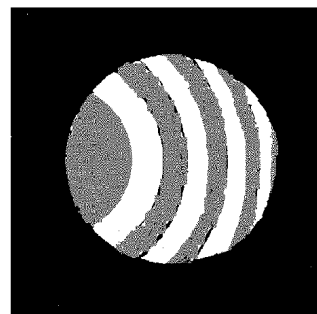
Fig. 12.11: a)



b)



c)



e parti della seconda e della terza che hanno approssimativamente la stessa area, quindi il campo sul rivelatore è poco diverso da quello prodotto dalla prima zona. Nel caso c) il foro apre frazioni di varie zone ed il campo sul rivelatore è proporzionale alla differenza tra l'area totale delle zone dispari e quella delle zone pari aperte dal foro.

Infine notiamo che la forma analitica della **spirale di vibrazione** data della seconda delle equazioni 4) è stata ottenuta approssimando il fattore d'obliquità con  $e^{-h/z}$ , tuttavia l'equazione  $E_Q = Ee^{ikz} f(k\tilde{h})$  vale in generale, pur di ammettere che la spirale di vibrazione  $f(k\tilde{h})$  converga un po' più lentamente di quella che abbiamo ottenuto. Analogamente, la prima delle equazioni 6) vale in generale, pur di ammettere che il parametro  $\alpha$  possa dipendere un po' da  $N$  quando  $N$  diventa grande.

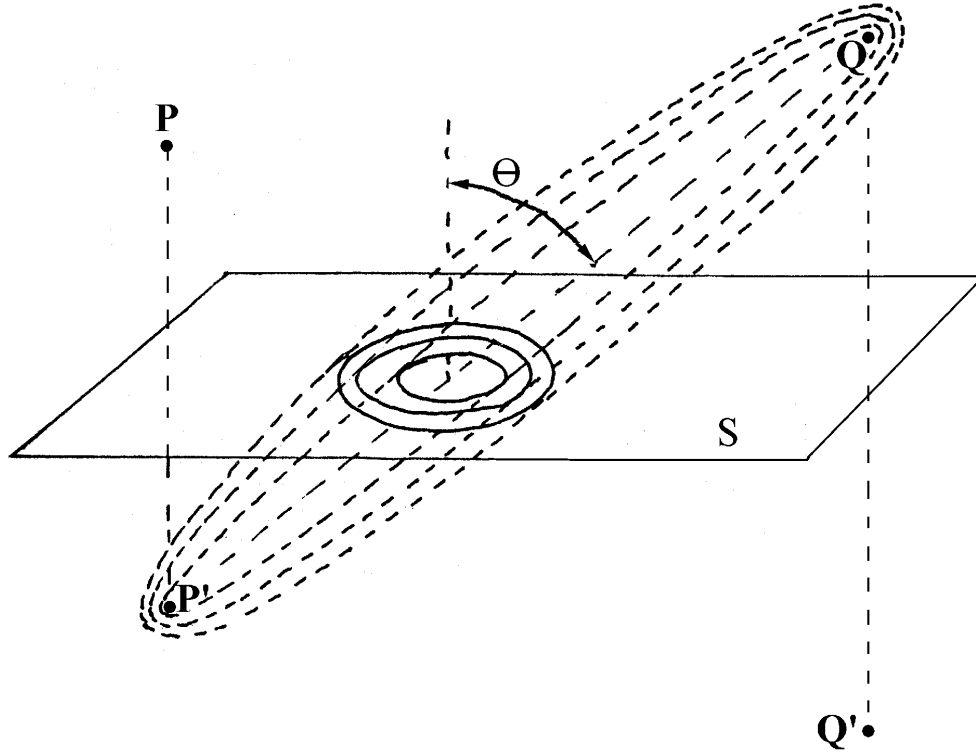
### 12.3 Lenti di Fresnel, diffrazione da palline e spigoli

Armati dei risultati e del linguaggio stabiliti nel paragrafo precedente possiamo affrontare problemi più complicati. In generale, date le posizioni della sorgente monocromatica P, del rivelatore Q e della superficie sulla quale intendiamo disporre strati riflettenti dotati di fori o fenditure di varie forme, la prima operazione da fare è puramente geometrica: "disegnare" sulla superficie le zone di Fresnel. Ad esempio quando P e Q giacciono dalla stessa parte di un piano possiamo procedere come mostrato in figura 12. Costruiamo la sorgente virtuale P', speculare di P, poi con fuochi in P' e Q disegniamo ellissoidi con assi maggiori di lunghezze

$$\overline{P'Q} + N\lambda/2 \quad \text{con } N \text{ intero}$$

L'intersezione dell' $N$ -esimo ellissoide con il piano è un'ellisse tanto più eccentrica quanto più grande è l'angolo  $\theta$  formato dalla retta P'Q con il piano. Le regioni del piano delimitate da due ellissi contigue sono le zone di Fresnel della configurazione geometrica data. Naturalmente quando il rivelatore viene spostato nella posizione speculare Q' le zone di Fresnel rimangono inalterate. Tali costruzioni assicurano che le lunghezze dei percorsi da P a Q'

Fig. 12.12



(e da P a Q) con impatto entro una zona di Fresnel differiscono in media di  $\lambda/2$  dalle lunghezze dei percorsi con impatto in una zona contigua.

Ora indichiamo con  $E_N$  il contributo al campo in Q originato da uno strato riflettente che copre l' $N$ -sima zona. Poiché le deviazioni dalle condizioni di specularità aumentano all'aumentare di  $N$ , dobbiamo aspettarci che, anche in questo caso,  $E_{N+1} = -\alpha E_N$ , con  $\alpha$  lievemente minore dell'unità. Poi pensiamo che il piano sia totalmente riflettente. In tal caso

$$E_Q = E_1(1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \dots) = \frac{E_1}{1 + \alpha}$$

è quasi uguale alla metà del contributo della prima zona. Quindi uno specchio che copre solo la prima zona invia in Q una potenza quasi quattro volte maggiore di quella inviata dall'intero specchio, uno specchio che copre le prime due zone invia in Q potenza quasi nulla, e così via.

Infine pensiamo che lo strato riflettente ricopra solo tutte le zone dispari, oppure tutte le zone pari. In entrambi i casi il sistema è una **lente di Fresnel** ed agisce sia in riflessione, sia in trasmissione. Le zone riflettenti contribuiscono in fase al campo in Q, le fenditure contribuiscono in fase al campo in Q'. Ad esempio, quando riflettono le zone dispari

$$E_Q = E_1(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{E_1}{1 - \alpha^2}$$

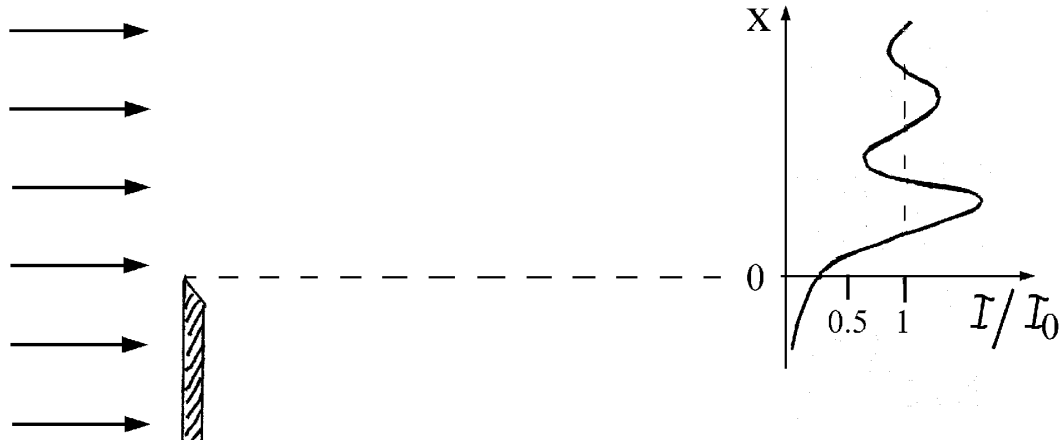
è molto maggiore del campo prodotto da specchi continui: per  $\alpha = 0.99$ ,  $E_Q$  è 50 volte maggiore di  $E_1$  che, a sua volta, è il doppio del campo prodotto dallo specchio continuo, quindi l'intensità in Q è diecimila volte maggiore di

quella prodotta dallo specchio continuo. La stessa intensità si ottiene in  $Q'$  quando sono aperte solo le zone dispari. In tal caso sono riflettenti le zone pari e l'intensità in  $Q$  è minore di quella in  $Q'$  solo per il fattore  $\alpha^2$ .

Passiamo a considerare una situazione che, oltre ad essere sorprendente, ha un notevole interesse storico. Con riferimento alla figura 5, pensiamo che l'OPPMPL incida su una pallina opaca e consideriamo il campo sull'asse della zona d'ombra. Costruiamo le zone di Fresnel sul piano passante per il centro della pallina e notiamo che il campo in un punto dell'asse è prodotto dalle zone di Fresnel non coperte dalla pallina. Equivalentemente possiamo dire che il campo in un punto dell'asse è la differenza tra il campo presente in assenza di pallina e quello prodotto dalle zone di Fresnel coperte dalla pallina. A meno del fattore  $Ee^{ikz}$ , il primo è il numero complesso  $(1, 0)$  nel quale converge la spirale di vibrazione in figura 8, il secondo è individuato da un punto della spirale di vibrazione. Dunque il modulo del campo è proporzionale alla distanza di un punto della spirale di vibrazione dal punto  $(1, 0)$ , quindi decresce molto lentamente all'aumentare della distanza. In prima approssimazione vale  $E\alpha^N$ , dove  $N$  è l'ordine dell'ultima zona di Fresnel coperta dalla pallina. Ciò comporta che su uno schermo ortogonale all'asse, a qualunque distanza dalla pallina, è presente una macchia luminosa che prende il nome di **macchia di Poisson**. L'origine del nome è molto interessante: nel 1818, una commissione formata da Poisson, Laplace, Biot, Arago e Gay-Lussac era impegnata a valutare la teoria della diffrazione di Fresnel che aspirava al premio dell'Accademia di Francia. Poisson, intendendo portare un argomento contro tale teoria aveva mostrato che prevedeva l'esistenza di un fuso luminoso sull'asse della zona d'ombra, cosa che egli riteneva assurda. Ma Arago eseguì l'esperimento e provò inequivocabilmente l'esistenza del fuso luminoso sull'asse della zona d'ombra. Quindi le argomentazioni di Poisson, invece di invalidare la teoria di Fresnel, finirono per darle definitiva conferma e farle vincere il premio. Aggiungiamo che i commissari e lo stesso Fresnel ignoravano che una macchia luminosa al centro della zona d'ombra era già stata osservata da Maraldi quasi un secolo prima.

Infine consideriamo la situazione mostrata in figura 13. Uno schermo con spigolo rettilineo è investito ad incidenza normale da un'OPPMPL. Il rivelatore può essere spostato lungo l'asse  $x$  normale allo spigolo per misurare l'intensità luminosa in funzione della posizione. In figura abbiamo riportato il rapporto  $\mathcal{I}/\mathcal{I}_0$  tra le intensità misurate in presenza ed in assenza dello schermo. Quando il rivelatore è in  $x = 0$ , ovvero sul bordo della zona d'ombra geometrica, la situazione è molto semplice: tutte le zone di Fresnel sono tagliate a metà dallo schermo, quindi l'ampiezza del campo è la metà di quella in piena luce e  $\mathcal{I}/\mathcal{I}_0 = 0.25$ . Quando il rivelatore si sposta lungo l'asse  $x$  si spostano anche le zone di Fresnel sul piano dello schermo. Con rivelatore nella regione di luce geometrica tutte le zone di Fresnel sono aperte oltre la

Fig. 12.13

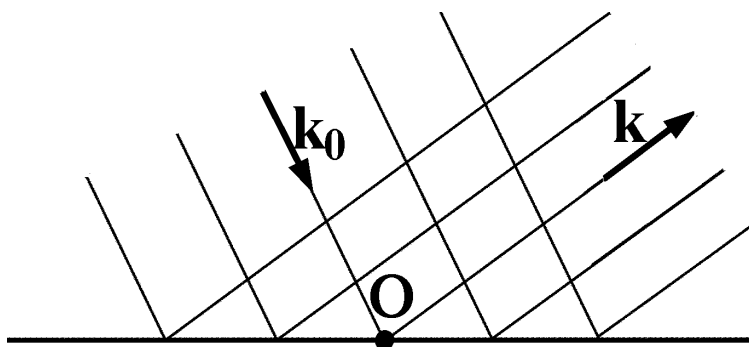


metà e compare un primo massimo d'intensità quando tutta la prima zona emerge dallo schermo, seguito da un minimo quando emerge anche tutta la seconda zona, da un nuovo massimo quando emerge anche tutta la terza, e così via. Invece, quando il rivelatore entra nella regione d'ombra tutte le zone di Fresnel si coprono oltre la metà e l'intensità decresce monotonamente.

## 12.4 Diffrazione di Fraunhofer

Da questo paragrafo iniziamo lo studio della diffrazione-interferenza in condizioni di Fraunhofer: continuiamo a pensare a regioni speculari e fenditure disposte su un piano, ma pensiamo che la sorgente ed il rivelatore siano a distanze enormi, tanto da poter approssimare la radiazione incidente con un'OPPMPL di vettore d'onda  $\mathbf{k}_0$  e la radiazione diretta al rivelatore con un'OPPMPL di vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , come schematizzato in figura 14a. Nel

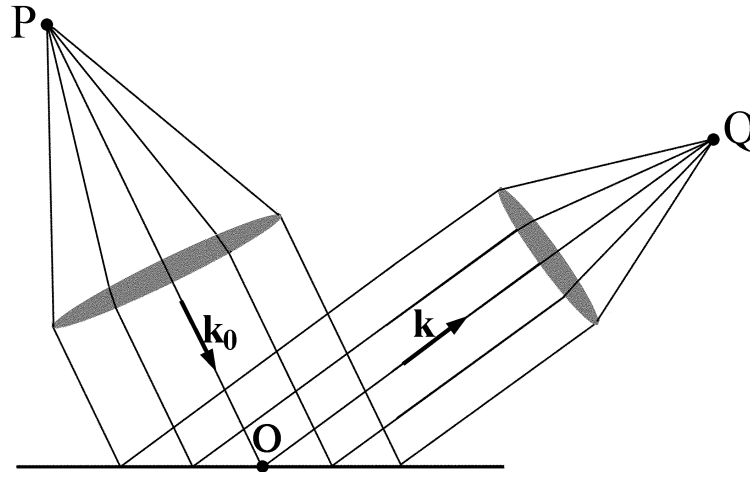
Fig. 12.14a



prossimo capitolo vedremo che la configurazione di Fraunhofer può essere realizzata sperimentalmente ponendo la sorgente ed il rivelatore nei fuochi di lenti convergenti, come in figura 14b), per ora facciamo riferimento alla figura 14a) e, per acquisire una buona visione tridimensionale, pensiamo che la struttura di specchi e fenditure sia centrata su un tavolo rotondo di raggio  $k = k_0$ , sormontato da una cupola emisferica di ugual raggio, come in figura 15. Conveniamo che il piano del tavolo sia il piano  $(k_x, k_y)$  quando consideriamo lo spazio dei vettori d'onda, detto **spazio reciproco**, oppure il piano



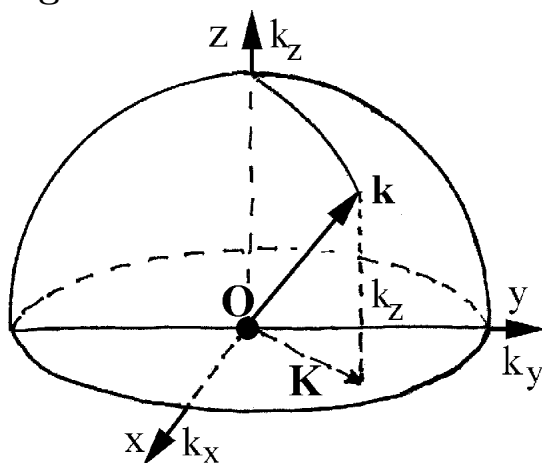
**Fig. 12.14b** Realizzazione sperimentale della configurazione di Fraunhofer.



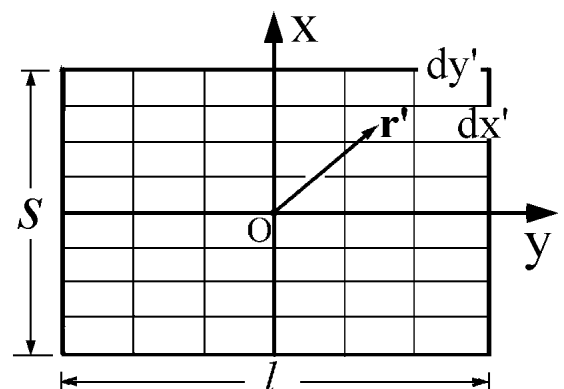
$(x, y)$  quando consideriamo lo spazio reale. In tal caso pensiamo che il raggio  $r$  della cupola sia enorme rispetto alle dimensioni degli oggetti che centriamo sul tavolo, che il rivelatore sia mobile sopra la cupola e che la sorgente sia disposta sulla cupola ad illuminare dall'alto le regioni riflettenti, oppure nella posizione speculare, ad illuminare dal basso le fenditure, sempre con campo elettrico polarizzato lungo l'asse  $x$ . Nello spazio reciproco un vettore dal centro del tavolo ad un punto della cupola individua un vettore d'onda uscente: la sua distanza dal tavolo è la componente  $k_z$  e la sua proiezione sul tavolo è il vettore  $\mathbf{K} \equiv (k_x, k_y)$ . Naturalmente la sommità della cupola individua il vettore d'onda normale, mentre l'orlo del tavolo individua vettori d'onda radenti. Se il tavolo fosse perfettamente riflettente o perfettamente trasparente  $\mathbf{K}$  risulterebbe uguale a  $\mathbf{K}_0$ , ma ora non è così: la proiezione parallela al piano del vettore d'onda non si conserva perchè i punti del piano non sono equivalenti, sia a causa delle dimensioni finite degli oggetti che considereremo, sia per l'eventuale alternanza di zone riflettenti e fenditure. Però rimane sempre vero che  $k = k_0$  perchè l'interazione con oggetti dotati di relazioni costitutive interne lineari, **fermi** sul piano, è invariante per traslazione temporale.

Ora notiamo che un percorso dalla sorgente al rivelatore con impatto nel

**Fig. 12.15**



**Fig. 12.16**



punto  $\mathbf{r}'$  del tavolo ha sfasamento diverso da quello del percorso che impatta nell'origine della quantità

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}') = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'$$

Naturalmente la differenza di fase  $\Delta\varphi(\mathbf{r}')$  è nulla quando  $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$  è ortogonale al tavolo, ovvero quando  $\mathbf{k}_0$  e  $\mathbf{k}$  hanno la stessa proiezione sul tavolo, come avviene in condizioni di riflessione speculare o di trasmissione senza deflessione, ma le onde provenienti dai diversi punti del tavolo interferiscono costruttivamente sul rivelatore anche quando  $\Delta\varphi(\mathbf{r}')$  rimane piccolo rispetto a  $\pi$ , come avviene per uno specchio di dimensioni piccole rispetto a  $\lambda$ , ed anche quando  $\Delta\varphi(\mathbf{r}')$  prende valori distribuiti in intervalli disgiunti, ciascuno piccolo rispetto a  $\pi$ , ma diversi l'uno dall'altro per multipli interi di  $2\pi$ .

Per cominciare consideriamo un caso semplice: uno specchio rettangolare di lunghezza  $s$  e larghezza  $l$ , oppure l'apertura complementare, illuminato ad incidenza normale con campo elettrico polarizzato lungo l'asse  $x$ . In tal caso anche le correnti indotte nello specchio o le correnti opposte indotte nell'apertura complementare oscillano lungo l'asse  $x$ , quindi l'ampiezza dell'onda uscente con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  è certamente proporzionale al fattore dipolare  $\sin\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo formato da  $\mathbf{k}$  con l'asse  $x$ . Per calcolare l'intensità  $\mathcal{I}(\theta, \phi, r)$  sul rivelatore posto a distanza  $r$  enorme rispetto ad  $s$  ed  $l$ , scomponiamo il rettangolo in rettangolini di area  $dx'dy'$ , come mostrato in figura 16, e notiamo che l'equazione 2) si riduce a  $\gamma = -i/\lambda$ , il fattore d'obliquità è uguale a  $\sin\theta$  per tutti i rettangolini e lo sfasamento dal punto  $\mathbf{r}' \equiv (x', y')$  al punto  $\mathbf{r}$  vale  $kr + \Delta\varphi(\mathbf{r}') = kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$ . Quindi il contributo di un rettangolino al campo elettrico in  $\mathbf{r}$  vale

$$dE = -\frac{i}{\lambda} E_0 \frac{1}{r} e^{kr - k_x x' - k_y y'} dx' dy' \sin\theta = -\frac{i E_0 e^{kr}}{\lambda r} \sin\theta e^{-k_x x' - k_y y'} dx' dy'$$

dove  $E_0$  è l'ampiezza del campo incidente. Integrando sul rettangolo e tenendo presente che

$$\int_{-s/2}^{s/2} dx' e^{-ik_x x'} \int_{-l/2}^{l/2} dy' e^{-ik_y y'} = sl \frac{\sin(k_x s/2)}{(k_x s/2)} \frac{\sin(k_y l/2)}{(k_y l/2)}$$

si vede che il campo elettrico sulla superficie sferica di raggio  $r$  vale

$$E(\mathbf{k}, r) = -\frac{i E_0 e^{kr}}{\lambda r} \sin\theta sl \frac{\sin(k_x s/2)}{(k_x s/2)} \frac{\sin(k_y l/2)}{(k_y l/2)} \quad (12.9)$$

e che l'intensità su tale superficie risulta

$$\mathcal{I}(\mathbf{k}, r) = \mathcal{I}_0 \left( \frac{sl}{\lambda r} \right)^2 \sin^2\theta \frac{\sin^2(k_x s/2)}{(k_x s/2)^2} \frac{\sin^2(k_y l/2)}{(k_y l/2)^2}$$

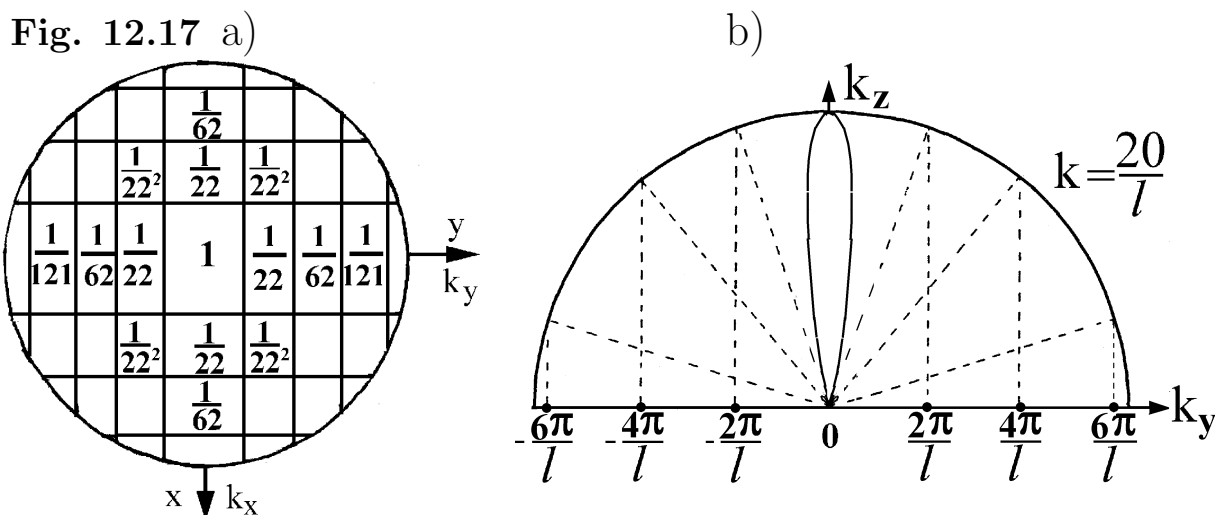
dove  $\mathcal{I}_0$  è l'intensità incidente. Infine, moltiplicando per  $r^2 d\Omega$ , si vede che la potenza  $dW(\mathbf{k})$  emessa nell'angolo solido  $d\Omega$  centrato intorno a  $\mathbf{k}$  è tale che

$$\frac{dW(\mathbf{k})}{d\Omega} = C \sin^2\theta \frac{\sin^2(k_x s/2)}{(k_x s/2)^2} \frac{\sin^2(k_y l/2)}{(k_y l/2)^2} \quad \text{dove} \quad C = \mathcal{I}_0 \left( \frac{sl}{\lambda} \right)^2 \quad (12.10)$$

Il confronto di questa equazione con l'equazione 9.21) mostra che la potenza emessa differisce da quella emessa da un dipolo armonico solo per un **fattore di diffrazione** costituito dal prodotto di due funzioni del tipo  $\sin^2 \beta / \beta^2$ , una con  $\beta = k_x s / 2$ , l'altra con  $\beta = k_y l / 2$ . Confrontando  $\mathcal{C}$  con  $C$  potremmo anche calcolare l'ampiezza e la fase della corrente indotta in funzione di ampiezza e fase del campo elettrico incidente; lo lasciamo per esercizio.

Dall'equazione 10), tenendo presente che  $k_x s / 2$  e  $k_y l / 2$  hanno valori estremi  $\pm \pi s / \lambda$  e  $\pm \pi l / \lambda$ , si vede che l'emissione ha le seguenti caratteristiche.

- Quando  $s / \lambda < 1 / 20$  e  $l / \lambda < 1 / 20$  il fattore di diffrazione è maggiore di 0.99 su tutta la cupola, anche in condizioni di emissione radente. Dunque **un'apertura (o uno specchio) di dimensioni minori di  $\lambda / 20$  emette a grande distanza proprio come se fosse un dipolo armonico**. La potenza emessa nell'angolo solido  $d\Omega$  è uniforme nel **piano equatoriale** ( $k_y, k_z$ ), dove  $\theta = 90^\circ$ , e decresce come  $\sin^2 \theta$  procedendo verso l'asse polare.
- Per  $s = l = \lambda$  i valori di  $\beta$  nelle due funzioni variano da  $-\pi$  a  $\pi$  (non indipendentemente). In tal caso il lobo principale di diffrazione si estende su tutta la cupola, annullandosi solo in direzioni radenti, ma rimane vero che la potenza emessa è proporzionale a  $\sin^2 \theta$ .
- Per un'apertura (o specchio) di dimensioni maggiori della lunghezza d'onda, conviene descrivere la situazione come in figura 17a), disegnata nel piano ( $k_x, k_y$ ). Il fattore di diffrazione è nullo in tutti i punti della cupola che



hanno proiezioni sul tavolo lungo le rette  $k_x = 2\pi N / s$ , con  $N$  intero positivo o negativo, ma non nullo, e lungo le rette  $k_y = 2\pi M / l$ , con  $M$  intero positivo o negativo, ma non nullo. Tali rette, formano un reticolo a maglie rettangolari con lati lunghi paralleli ai lati corti del rettangolo spaziale. **L'area della maglia centrale è il doppio di quelle delle maglie intersecate da un solo asse ed è quattro volte maggiore di quelle delle maglie non intersecate dagli assi**. Il fattore di diffrazione è unitario al centro della maglia centrale, ha valori  $1/22$ ,  $1/62, \dots$  al centro delle maglie intersecate dagli assi e ha valori ancora più piccoli al centro delle maglie non intersecate

dagli assi, ad esempio  $1/22^2$ ,  $1/(22 \times 62)$ , .... Pertanto la potenza riflessa dallo specchio o trasmessa dalla fenditura è concentrata soprattutto nel **lobo di diffrazione principale**: gli altri lobi di diffrazione, oltre ad avere intensità massima molto minore, hanno larghezze minori. In particolare, per  $k_x = 0$  l'angolo  $\theta$  vale  $90^\circ$  e l'equazione 10) si riduce a

$$\frac{dW(k_y)}{d\Omega} = \mathcal{C} \frac{\sin^2(k_y l/2)}{(k_y l/2)^2} \quad \text{dove} \quad \mathcal{C} = \mathcal{I}_0 \left( \frac{sl}{\lambda} \right)^2$$

Ad esempio, per  $l = 20/k \approx 3.2\lambda$ , possiamo rappresentare la potenza emessa intorno al piano  $(k_y, k_z)$  come in figura 17b). Sul diametro di una semicirconfenza di raggio  $k$  riportiamo un reticolo di punti di passo  $2\pi/l$  centrato nell'origine, proiettiamo i punti del reticolo sulla semicirconfenza normalmente al diametro e tratteggiamo le semirette che congiungono l'origine con i punti d'intersezione. Tali semirette individuano i versi di emissione nulla. Infine disegniamo i lobi di diffrazione principale e secondari avendo cura che siano tangenti alle semirette tratteggiate. In realtà i lobi secondari sono quasi invisibili in questo tipo di figure. Lasciamo per esercizio di disegnare i lobi per altri valori di  $l$ , ad esempio per  $l = \lambda$  e per  $l = 10\lambda$ , e fissiamo l'attenzione sul lobo di diffrazione principale. Si estende tra  $k_y = -2\pi/l$  e  $k_y = 2\pi/l$  e ha intensità che rimane maggiore del 40.5% del valore massimo in tutto l'intervallo  $-\pi/l < k_y < \pi/l$ . Seguendo **Rayleigh** diciamo che  $\Delta k_y = 2\pi/l$  è la **larghezza reciproca** del lobo di diffrazione principale. Con tale convenzione, la larghezza reciproca del lobo principale è uguale alla distanza reciproca tra il centro del picco ed i primi punti di intensità nulla. Quando la larghezza reciproca è piccola rispetto a  $k$ , la larghezza angolare del lobo principale è ben approssimata da  $\Delta\phi = \Delta k_y/k = \lambda/l$ .

Nel piano  $(k_x, k_z)$  la situazione è più complicata perché entra in gioco anche il fattore dipolare  $\sin^2\theta$ , ma quando  $s/\lambda$  è grande il fattore dipolare è quasi unitario in tutta la regione occupata dal lobo principale e le larghezze reciproca ed angolare del lobo principale sono indistinguibili da  $\Delta k_x = 2\pi/s$  e  $\Delta\theta = \lambda/s$ . Ad esempio, per  $s/\lambda = 10$  il lobo principale ha zeri per  $\cos\theta = \pm\lambda/s = \pm 0.1$ , quindi si estende nell'intervallo  $84.3^\circ < \theta < 95.7^\circ$  dove il fattore  $\sin^2\theta$  è maggiore di 0.99.

Riassumendo: per un'apertura o uno specchio di dimensioni ben maggiori della lunghezza d'onda il lobo di diffrazione principale ha larghezze reciproche

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{s} \quad , \quad \Delta k_y = \frac{2\pi}{l} \quad (12.11)$$

e ha larghezze angolari

$$\Delta\theta = \frac{\Delta k_x}{k} = \frac{\lambda}{s} \quad , \quad \Delta\phi = \frac{\Delta k_y}{k} = \frac{\lambda}{l} \quad (12.12)$$

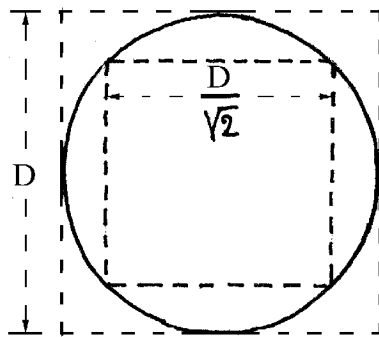
Si noti che le larghezze reciproche dipendono solo dalle dimensioni dell'apertura o dello specchio; **a grandi larghezze spaziali corrispondono**

**piccole larghezze reciproche e viceversa.** Invece le larghezze angolari dipendono anche da  $\lambda$ . Ad esempio per  $s = l = 1$  m e  $\lambda = 10$  cm il lobo di diffrazione principale ha larghezze reciproche  $\Delta k_x = \Delta k_y = 2\pi/l = 6.28$  m<sup>-1</sup> e larghezze angolari  $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.1 \approx 5.7^\circ$ .

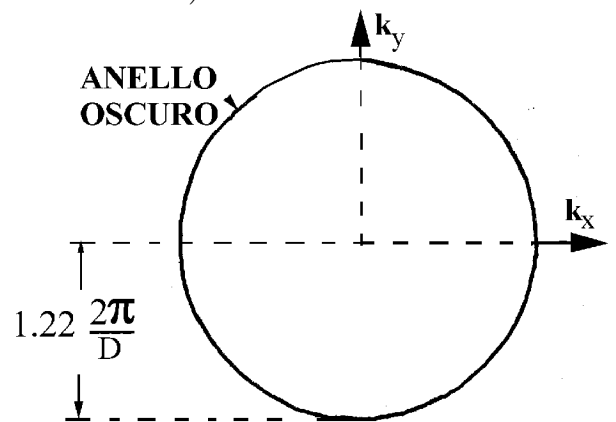
## 12.5 Lobo di diffrazione per un'apertura circolare

Ora pensiamo che lo specchio o l'apertura investita ad incidenza normale dall'OPPMPL sia circolare con diametro  $D$  ben maggiore di  $\lambda$ . In tal caso, in tutte le direzioni comprese entro il lobo di diffrazione principale, il fattore

Fig. 12.18 a)



b)



$\sin^2 \theta$  non differisce apprezzabilmente dall'unità, quindi il lobo è (quasi) invariante per rotazione intorno alla normale. Dalla figura 17a) si arguisce che il lobo è più largo di quello emesso da un quadrato di lato  $D$  ed è più stretto di quello emesso da un quadrato di lato  $D/\sqrt{2}$ . Pertanto, indicata con  $\mathbf{K}$  la proiezione di  $\mathbf{k}$  sul piano del disco, possiamo aspettarci che l'intensità abbia un primo zero per  $K$  a metà strada tra  $2\pi/D$  e  $2\pi\sqrt{2}/D$ , ovvero per  $K \approx 1.21 \times 2\pi/D$ . In realtà un calcolo più accurato, ma molto più impegnativo, mostra che il primo anello di intensità nulla appare per  $K = 1.22 \times 2\pi/D$ , come mostrato in figura 13b). Insomma, **un'apertura o uno specchio di diametro  $D$  investita ad incidenza normale da un'OPPMPL emette con lobo di diffrazione principale di larghezza reciproca**

$$\Delta K = 1.22 \frac{2\pi}{D} \quad (12.13)$$

**uguale al raggio reciproco del primo anello di intensità nulla.** Quando  $\Delta K$  è piccolo rispetto a  $k$ , la larghezza angolare del lobo di emissione principale risulta

$$\Delta\phi = \frac{\Delta K}{k} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (12.14)$$

## 12.6 Pettini di nastri riflettenti o di fenditure

Ora pensiamo che al centro del tavolo di figura 15 sia posta una delle strutture mostrate in figura 19: un pettine di passo  $d$  con  $N$  denti costituiti da nastri riflettenti paralleli di larghezza  $l$  e lunghezza  $s$ , oppure il pettine complementare di fenditure. Pensiamo che i pettini siano illuminati ad incidenza

Fig. 12.19

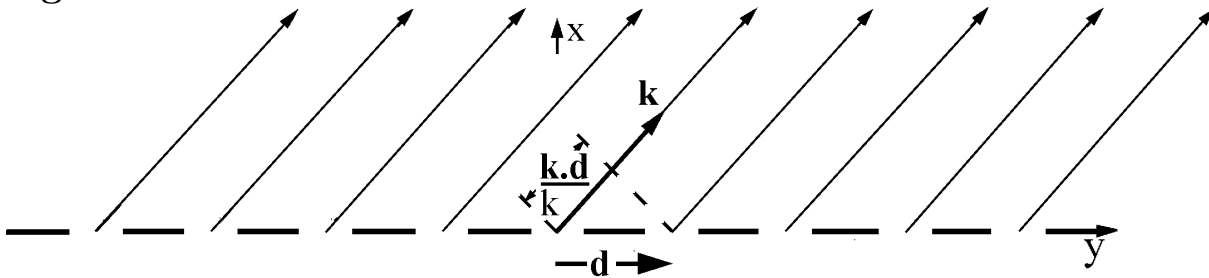


normale da un'OPPMPL e studiamo la distribuzione angolare della potenza emessa dal pettine di nastri o trasmessa dal pettine di fenditure in condizioni di Fraunhofer. Dapprima pensiamo che  $N = 2M + 1$  sia dispari, centriamo il dente centrale nell'origine, lo disponiamo lungo l'asse  $x$  di polarizzazione del campo elettrico incidente e pensiamo che sia lunghissimo rispetto a  $\lambda$ . In tal caso l'emissione è concentrata intorno al piano  $(k_y, k_z)$  ortogonale ai denti e in tale piano il campo elettrico emesso dal dente centrale è descritto dall'equazione

$$E(\mathbf{k}, r) = -\frac{iE_0 e^{kr}}{\lambda r} sl \frac{\sin(k_y l/2)}{(k_y l/2)}$$

Gli altri denti sono centrati in  $y = nd$ , con  $n$  intero variabile da  $-M$  ad  $M$ , ed emettono campi elettrici che differiscono da quello emesso dal dente centrale solo per il fattore di fase  $e^{-nk_y d}$ , come si vede dalla figura 20, quindi

Fig. 12.20



il campo elettrico nel piano ortogonale al pettine risulta

$$E_{pet}(\mathbf{k}, r) = E(\mathbf{k}, r) \sum_{n=-M}^M e^{-ink_y d}$$

Per calcolare la somma dei fattori di fase notiamo che  $2M = N - 1$  e che

$$\sum_{-M}^M e^{-in\alpha} = e^{iM\alpha} \sum_0^{N-1} e^{-in\alpha} = e^{i(N-1)\alpha/2} \frac{1 - e^{-iN\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}} = \frac{e^{iN\alpha/2} - e^{-iN\alpha/2}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

Pertanto il campo elettrico prodotto dal pettine risulta

$$E_{pet}(\mathbf{k}, r) = E(\mathbf{k}, r) \frac{\sin(Nk_y d/2)}{\sin(k_y d/2)}$$

Per convincerci che questo risultato vale anche per  $N$  pari, consideriamo il caso  $N = 2$ ; centrata l'origine tra i due denti, otteniamo il risultato

$$E_{pet}(\mathbf{k}, r) = E(\mathbf{k}, r)[e^{ik_y \frac{d}{2}} + e^{-ik_y \frac{d}{2}}] = E(\mathbf{k}, r)2 \cos(k_y d/2) = E(\mathbf{k}, r) \frac{\sin(2k_y d/2)}{\sin(k_y d/2)}$$

che è in pieno accordo con il precedente. Pertanto la potenza emessa nell'angolo solido  $d\Omega$  centrato nel piano ortogonale al pettine è tale che

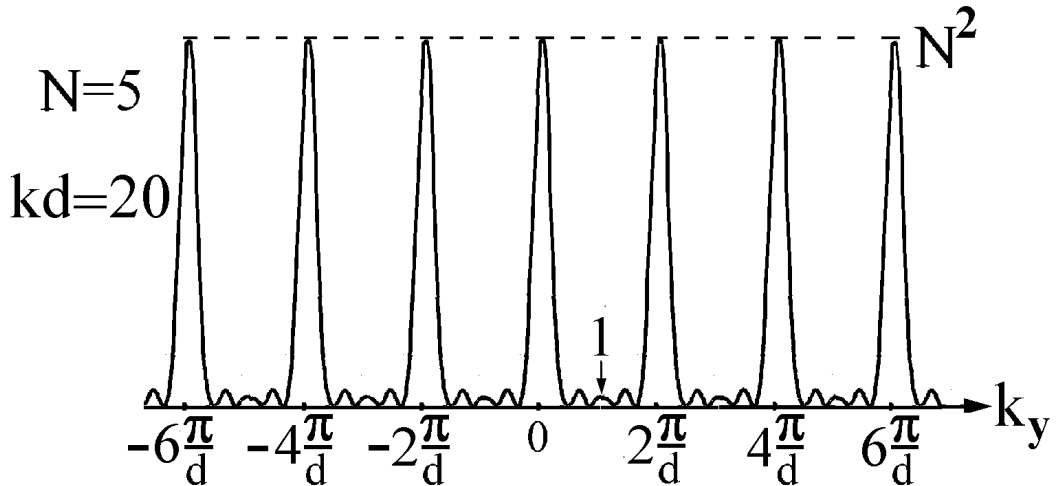
$$\frac{dW_{pet}(k_y)}{d\Omega} = \mathcal{C} \frac{\sin^2(\pi k_y l/2\pi) \sin^2(Nk_y d/2)}{(\pi k_y l/2\pi)^2 \sin^2(k_y d/2)} \quad (12.15)$$

Per vedere bene la situazione cominciamo a riportare in grafico il

$$\text{fattore d'interferenza} \quad \frac{\sin^2(Nk_y d/2)}{\sin^2(k_y d/2)} \quad (12.16)$$

per un pettine con cinque denti. Come mostrato in figura 21 il fattore di

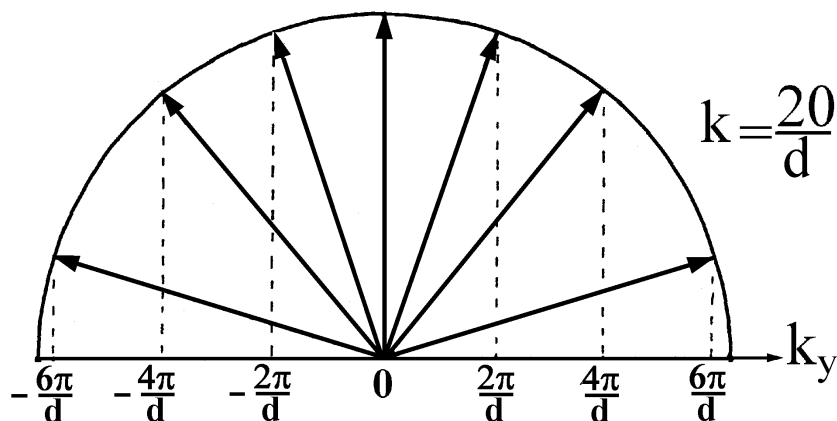
**Fig. 12.21** Fattore d'interferenza per un pettine di 5 dipoli



interferenza è un **pettine reciproco** con picchi di altezza  $N^2$  separati sull'asse  $k_y$  dalla **distanza reciproca**  $2\pi/d$ . Per  $k_y = \pm\pi/Nd$  l'altezza del dente vale  $1/\sin^2(\pi/2N)$   $0.42N^2$  per il pettine di cinque dipoli ed hanno altezza  $0.405N^2$  per  $N$  grande, quindi non sbagliamo molto dicendo che la larghezza di Rayleigh dei picchi di interferenza vale  $\Delta k_y = 2\pi/Nd$ . Si noti bene che questa larghezza reciproca è uguale a quella del picco di diffrazione principale prodotto da un'apertura di larghezza uguale a quella dell'intero pettine. Ma **nel fattore di interferenza tutti i picchi principali hanno altezza  $N^2$  e larghezza reciproca  $2\pi/Nd$** , mentre nel fattore di diffrazione il picco principale ha altezza unitaria ed i picchi secondari hanno altezze molto minori e larghezze reciproche dimezzate. Si noti anche che nel fattore di

diffrazione il primo picco secondario ha invariabilmente altezza  $1/22$  di quella del picco principale, mentre nel fattore d'interferenza le altezze dei picchi secondari sono  $N^2$  volte minori di quelle dei picchi principali e diventano trascurabili quando  $N$  diventa grande. Per determinare le posizioni angolari dei picchi possiamo procedere come in figura 22, disegnata per un pettine

**Fig. 12.22** Vettori d'onda uscenti da un pettine per incidenza normale



con  $d = 20/k$ . Sul diametro di una semicirconferenza di raggio  $k$ , riportiamo da una parte e dall'altra del centro un reticolo di punti di passo  $2\pi/d$ , proiettiamo tali punti normalmente al diametro sino ad intersecare la semicirconferenza e tracciamo i vettori dal centro ai punti di intersezione. Tali vettori individuano le posizioni angolari dei picchi di massima interferenza costruttiva.

Ora torniamo all'equazione 15) e notiamo che la potenza emessa dal pettine è il prodotto della potenza emessa dal singolo dente per il fattore d'interferenza. Complessivamente la potenza riflessa o trasmessa è quella incidente sul pettine, quindi è  $N$  volte maggiore di quella riflessa o trasmessa da un singolo dente, ma è distribuita in picchi di intensità proporzionale ad  $N^2$  e di larghezza inversamente proporzionale ad  $N$ . Ad esempio, per un pettine con cinque denti con  $d = 4l$  la potenza emessa nell'angolo solido  $d\Omega$  dipende da  $k_y$  come mostrato in figura 23: i picchi d'interferenza hanno larghezza reciproca  $2\pi/5d$ , il picco centrale ha intensità  $25C$  e gli altri picchi d'interferenza hanno intensità modulata dal fattore di diffrazione del singolo dente. Si noti che i picchi di interferenza con  $k_y = \pm 2\pi/l$  sono soppressi perché il fattore di diffrazione del singolo dente è nullo per tali valori di  $k_y$ . Per una doppia fenditura con  $d = 2l$  il profilo di diffrazione-interferenza ad incidenza normale è mostrato in figura 24. Si noti che il rapporto  $d/l$  determina il numero dei picchi di interferenza presenti entro il lobo di diffrazione principale: sono 7 per  $d/l = 4$  e solo 3 per  $d/l = 2$ , mentre il numero di fenditure determina la larghezza dei picchi. Quando  $N$  è grande, come nel caso considerato in figura 25, i picchi di interferenza appaiono in grafico come righe di altezza modulata dal fattore di diffrazione.

Nelle condizioni d'incidenza normale che abbiamo considerato finora i



Fig. 12.23 Profilo di diffrazione-interferenza da 5 fenditure con  $d = 4l$

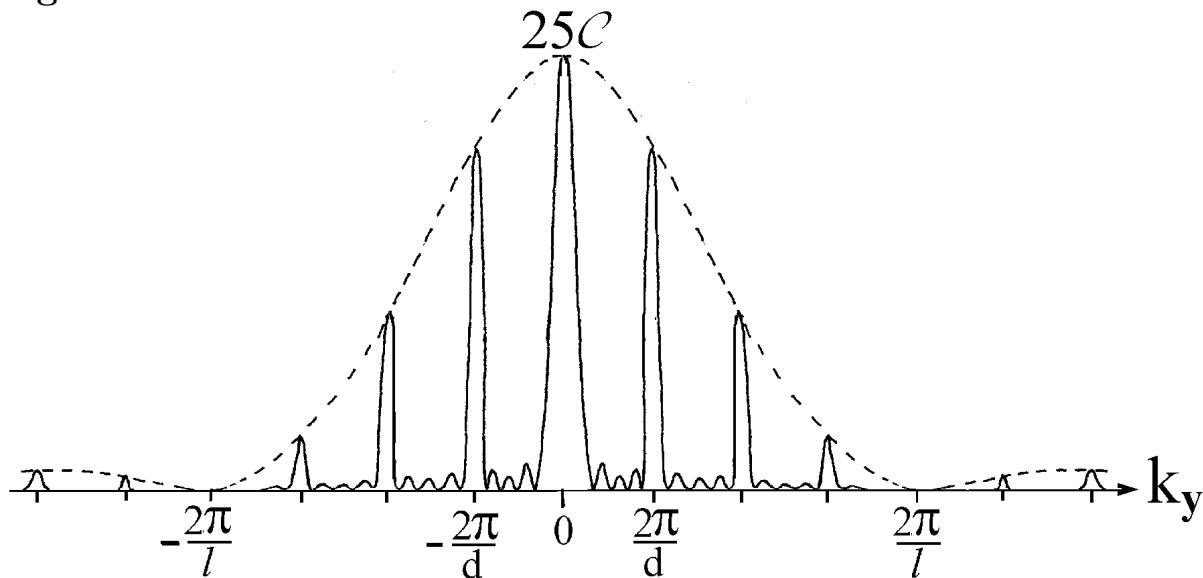


Fig. 12.24 Profilo di diffrazione-interferenza da 2 fenditure con  $d = 2l$

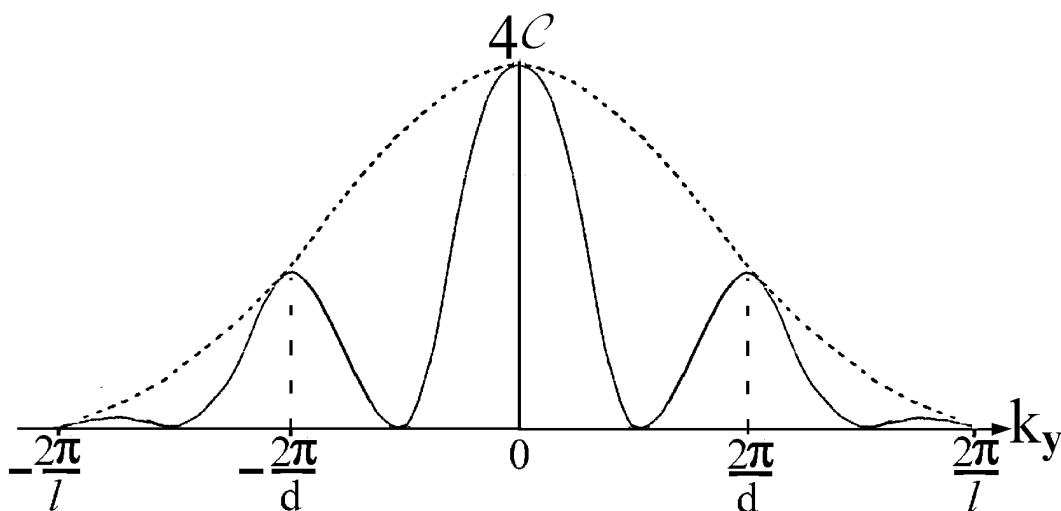
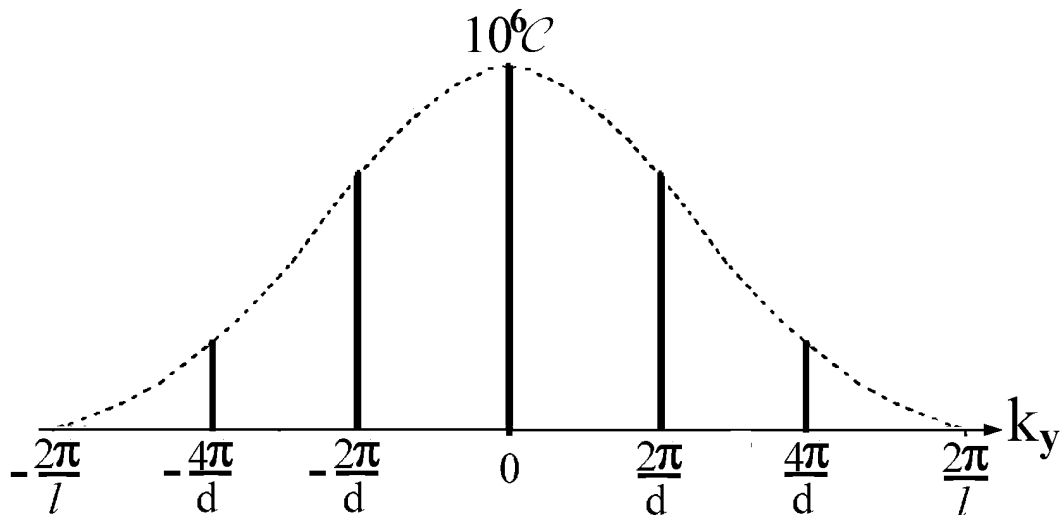


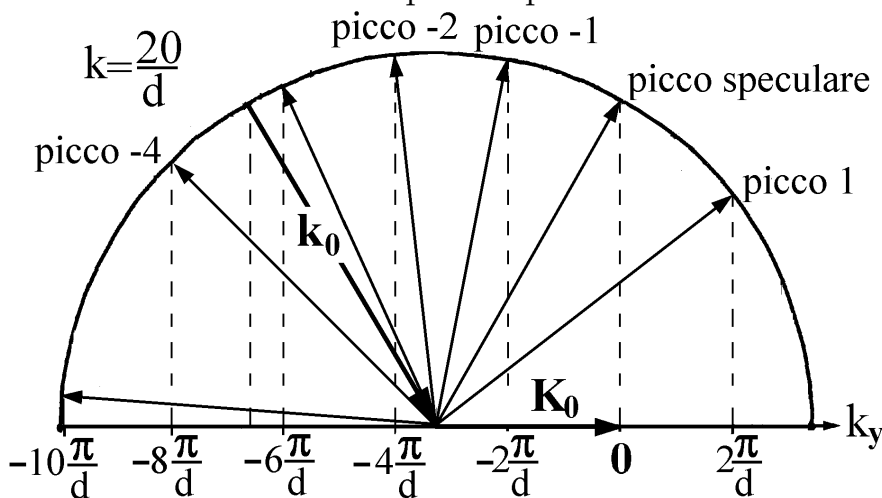
Fig. 12.25 Profilo di diffrazione-interferenza da 1000 fenditure con  $d = 3l$



fronti d'onda incidenti sono paralleli al pettine, quindi il campo elettrico incidente ha fase indipendente dal punto  $\mathbf{r}'$  del pettine e lo sfasamento del percorso dal punto  $\mathbf{r}'$  al rivelatore differisce solo di  $-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$  da quello del percorso che va dall'origine al rivelatore. Per angoli di incidenza diversi da zero

il campo elettrico incidente in  $\mathbf{r}'$  è sfasato di  $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'$  rispetto a quello incidente nell'origine e la differenza di fase del percorso con impatto in  $\mathbf{r}'$  rispetto a quello con impatto nell'origine diventa  $\Delta\varphi(\mathbf{r}') = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'$ . Ciò comporta che tutti i risultati ottenuti finora rimangono validi pur di sostituire nelle equazioni  $k_x$  e  $k_y$  con  $k_x - k_{0x}$  e  $k_y - k_{0y}$ . Poiché  $k_{0x}$  e  $k_{0y}$  non hanno indeterminazione, le larghezze reciproche dei vari picchi rimangono quelle calcolate per incidenza normale. Ma naturalmente cambia la distribuzione angolare della potenza emessa e cambiano le larghezze angolari dei picchi. In particolare, per un pettine di larghezza complessiva  $L = Nd$  la proiezione parallela del vettore d'onda si conserva a meno di **vettori del pettine reciproco** ed i picchi di interferenza sono tanto più stretti quanto più grande è  $L$ . Per vedere bene la situazione e determinare le posizioni e le larghezze angolari dei picchi conviene procedere come in figura 26 che differisce dalla 22 solo perchè il pettine reciproco è centrato all'estremo della proiezione parallela di  $\mathbf{k}_0$ , anziché nell'origine. Si noti che, poichè tutti i picchi hanno la stessa larghezza reciproca, i picchi che escono radenti hanno larghezze angolari maggiori di quelle dei picchi che escono intorno alla normale.

**Fig. 12.26** Picchi di interferenza per un pettine con incidenza generica



Concludiamo questo paragrafo importante con due note.

- L'ipotesi che la densità di corrente in uno specchio di dimensioni finite sia quella che sarebbe presente se lo specchio fosse illimitato può essere non corretta in prossimità dei bordi. Pertanto le intensità e le larghezze reciproche dei picchi di interferenza possono essere un po' diverse da quelle calcolate, ma, dato  $k$ , le posizioni angolari dei picchi sono individuate dall'angolo di incidenza e dal passo del pettine e non risentono degli effetti di bordo.
- In letteratura i termini diffrazione ed interferenza non hanno significato univoco. In realtà tutti i fenomeni ottici sono conseguenza dell'interferenza delle onde che si sovrappongono sul rivelatore. Potremmo riservare il termine diffrazione per fenomeni di interferenza con differenze di fase piccole rispetto a  $\pi$  e parlare di diffrazione-interferenza quando le differenze di fase sono distribuite in vari intervalli disgiunti, ciascuno piccolo rispetto a  $\pi$ , ma

differenti per multipli interi di  $2\pi$ . Ma in letteratura si usa catalogare come fenomeni di diffrazione quelli considerati finora; ad esempio si parla di diffrazione da doppia fenditura, di diffrazione da un pettine, di diffrazione di raggi X da cristalli, tutti fenomeni originati dall'interferenza di onde con fasi differenti per multipli interi di  $2\pi$ . E si usa catalogare come fenomeni di interferenza quelli originati dalle riflessioni multiple che studieremo nel prossimo capitolo.

## ESERCIZI

1) Due fenditure parallele di lunghezza  $2\text{ mm}$  e larghezza  $1\ \mu\text{m}$  hanno bordi adiacenti separati dalla distanza di  $1\ \mu\text{m}$  e sono investiti ad incidenza normale da un'OPPM di lunghezza d'onda  $0.5\ \mu\text{m}$ , intensità  $1000\ \text{W}/\text{m}^2$ , polarizzata con campo elettrico lungo le fenditure. a) Calcolare le intensità e le posizioni angolari dei picchi di interferenza compresi entro il lobo di diffrazione principale. b) Dire cosa cambia quando il campo elettrico incidente è trasverso alle fenditure?

2) Come mostrato in figura 27, un reticolo di diffrazione **lamellare** è formato da due pettini identici di nastri riflettenti disposti su piani distanti  $a$  e sfalsati di  $d/2$  dove  $d$  è il passo di ciascun pettine. Pensare che il reticolo sia investito ad incidenza normale da un'OPPMPL di lunghezza d'onda  $\lambda = 4a$  e confrontare il profilo di potenza emesso dal reticolo con quello che sarebbe emesso dal singolo pettine. In particolare mostrare che: a) il picco di interferenza speculare è soppresso, b) l'intensità dei due picchi di interferenza laterali è incrementata di un fattore 4, c) gli angoli di massima interferenza (valutati dalla normale) sono inalterati e hanno seno  $\lambda/d$ .

Fig. 12.27



3) Una fenditura di lati  $1\text{ mm} \times 2\text{ mm}$  è aperta in uno schermo sul quale incide un'OPPMPL con  $k = 10^7\ \text{m}^{-1}$ . Descrivere i lobi di diffrazione per: a) incidenza normale, b) angolo di incidenza di  $60^\circ$ .

4) Due lunghe fenditure di larghezza  $1\text{ mm}$ , distanti  $1\text{ cm}$ , sono investite da un'OPPMPL con  $k = 10^7\ \text{m}^{-1}$  e con: a) angolo di incidenza nullo, b) angolo di incidenza  $60^\circ$ . Nei due casi calcolare le posizioni angolari dei picchi.

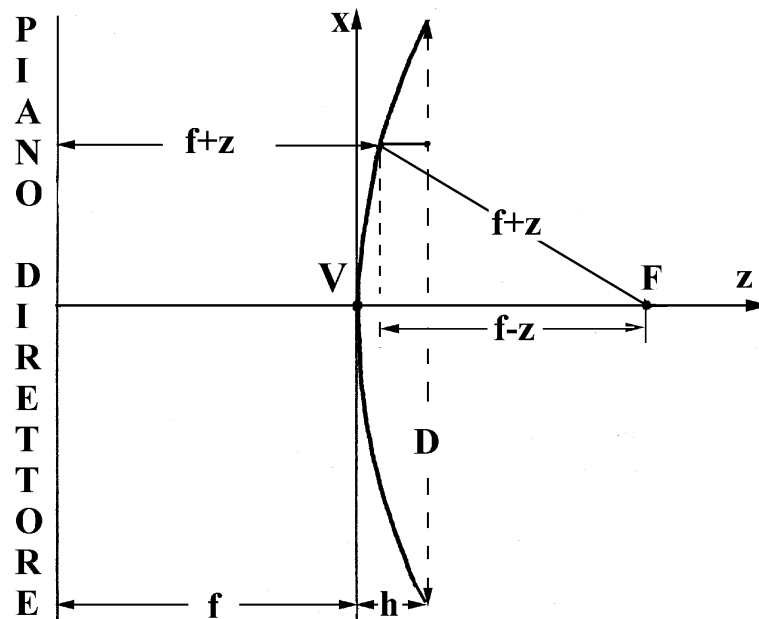
5) Su uno schermo piano viene costruito un pettine di fenditure parallele molto lunghe, larghe  $10\ \mu\text{m}$  e con passo di  $20\ \mu\text{m}$ . Un'OPPMPL con  $k = 10^7\ \text{m}^{-1}$  incide normalmente sul pettine. Valutare le intensità relative dei picchi di interferenza.

6) Un fascio parallelo di radiazione di diametro  $2\text{ mm}$  e  $k = 10^7\ \text{m}^{-1}$  incide quasi normalmente su uno specchio piano. Quale divergenza angolare ha il fascio riflesso a grande distanza?

## 12.7 Specchi parabolici

Cominciamo a ricordare che un paraboloide di rotazione è il luogo dei punti equidistanti da un piano, detto **piano direttore**, e da un punto  $F$ , detto **fuoco**. La retta normale al piano direttore passante per il fuoco è l'**asse ottico** del paraboloide, il punto  $V$  dell'asse ottico equidistante dal fuoco e dal piano direttore è il **vertice** del paraboloide e la distanza  $f$  del vertice dal fuoco o dal piano direttore è la **distanza focale** del paraboloide.

Fig. 12.28



Uno specchio parabolico è un paraboloide troncato da un piano parallelo al piano direttore e ricoperto da uno strato riflettente. La sua **altezza**  $h$  è la distanza del piano di troncamento dal vertice, la sua **apertura**  $D$  è il diametro del **cerchio di apertura**. In figura 28 abbiamo scelto l'asse ottico come asse  $z$  e lo abbiamo orientato dal vertice al fuoco con origine nel vertice. Il profilo del paraboloide nella sezione di figura ha equazione

$$(f + z)^2 = (f - z)^2 + x^2 \implies z = \frac{x^2}{4f}$$

Ciò comporta che l'altezza e l'apertura sono legate dalla relazione

$$h = (D/2)^2/4f \quad \text{ovvero} \quad D = 4\sqrt{hf}$$

Ora pensiamo che un dipolo armonico sia posto nel fuoco dello specchio parabolico ed emette radiazione con  $\lambda \ll f$ , e domandiamo: quali caratteristiche ha il fascio di radiazione prodotto dal sistema? Per rispondere cominciamo a notare che tutti i percorsi dal fuoco al cerchio di apertura con impatto sullo specchio hanno lunghezza uguale a  $f + h$ , quindi i campi oscillano in fase sul cerchio di apertura. Di conseguenza possiamo pensare che il cerchio di apertura sia spalmato di dipoli oscillanti in fase e possiamo concludere che, in approssimazione di Fraunhofer, il fascio emesso ha divergenza

angolare

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Insomma il sistema è un'**antenna parabolica** con lobo di emissione che può essere strettissimo. Ad esempio, quando il dipolo emette con lunghezza d'onda  $\lambda = 0.8\mu m$  e lo specchio ha apertura  $D = 10\text{ cm}$  il fascio di radiazione ha divergenza angolare  $\Delta\theta \approx 10^{-4}\text{ rad}$  e diventa largo un metro a dieci chilometri di distanza. Possiamo anche calcolare l'apertura che deve avere un'**antenna parabolica** per illuminare con luce verde ( $\lambda = 0.55\mu m$ ) una superficie lunare di diametro  $1\text{ km}$ . Deve produrre un fascio di divergenza angolare  $\Delta\theta = 1/384000$ , quindi deve avere diametro  $D \approx 26\text{ cm}$ .

Ora pensiamo che un'OPPMPL incida sul paraboloide con  $\mathbf{k}$  parallelo all'asse ottico e domandiamo: come è distribuita l'intensità del fascio di radiazione in prossimità del fuoco? Se ragionassimo con approccio geometrico dovremmo concludere che tutti i raggi passano dal fuoco e che in tale punto l'intensità è infinita. Naturalmente non è così. Per rispondere correttamente pensiamo che il cerchio di apertura sia un foro e lo rappresentiamo come una distribuzione continua di dipoli messi in oscillazione in fase dal fascio incidente. Il percorso più breve da uno qualunque di tali dipoli al paraboloide e da questo al fuoco ha lunghezza  $(h + f)$ . Pertanto tutti i dipoli contribuiscono in fase al campo elettrico nel fuoco. Per valutare le dimensioni della regione focale notiamo che il lobo di diffrazione principale emesso dai dipoli oscillanti sul cerchio d'apertura ha larghezza angolare  $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$ , e raggiunge il fuoco dopo il percorso  $(h + f)$ , quindi con dimensione trasversa

$$\Delta = (f + h)1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22\lambda \left( \frac{f}{D} + \frac{h}{D} \right) = 1.22\lambda \left( \frac{f}{D} + \frac{D}{16f} \right)$$

Dunque la minima dimensione della regione focale vale  $0.61\lambda$  e viene raggiunta quando  $D = 4f$ , ovvero quando in cerchio d'apertura passa dal fuoco.

Infine domandiamo: quale forma deve avere uno specchio parabolico per focalizzare raggi X di frequenza  $10^{18}\text{ s}^{-1}$  emessi da una stella? Per quanto visto nel paragrafo 9.9 possiamo dire che lo specchio deve lavorare in condizioni di riflessione totale esterna, quindi gli angoli di radenza sul paraboloide devono essere minori dell'angolo di radenza limite  $\omega_p/\omega \approx 1/50$ . L'angolo di radenza dei raggi incidenti sul paraboloide vale  $dx/dz = \sqrt{f/z}$ , quindi  $z$  deve essere maggiore di  $2500f$ . Ciò significa che dobbiamo usare un tronco di paraboloide compreso, ad esempio, tra piani di troncamento di altezza  $h_1 = 3000f$  ed  $h_2 = 4000f$ . In tal caso lo specchio ha un anello di apertura di diametro esterno  $D_2 = 4\sqrt{h_2f} \approx 253f$ . Si noti che le dimensioni dello specchio sono notevoli anche quando la distanza focale scelta è di  $1\text{ cm}$ ; in tal caso  $D_2$  risulta  $\approx 2.5\text{ m}$ , la lunghezza del tronco risulta di  $10\text{ m}$  e la dimensione trasversa della regione focale risulta  $\Delta \approx 19.3\lambda$ .

## ESERCIZI

1) Un dipolo oscillante con frequenza  $\omega = 3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$  è posto nel fuoco di un paraboloide di apertura  $8 \text{ m}$  e distanza focale  $4 \text{ m}$ . Il verso di oscillazione del dipolo è perpendicolare all'asse ottico. Valutare approssimativamente: a) la sezione del fascio a  $10 \text{ km}$  di distanza, b) la frazione della potenza irradiata dal dipolo raccolta e riemessa dallo specchio.

2) La radiazione di frequenza  $2.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  emessa da una stella viene raccolta da uno specchio parabolico di apertura  $1 \text{ m}$  e distanza focale  $5 \text{ m}$ . Quali dimensioni ha l'immagine della stella nel piano focale?

3) Una sorgente di frequenza  $\omega = 2.5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  ha diametro di  $1 \text{ mm}$  ed è nel fuoco di un paraboloide di apertura  $1 \text{ m}$ . Descrivere il fascio di radiazione a grande distanza per alcuni valori della distanza focale.

4) Una sorgente di radiazione isotropa è nel fuoco di uno specchio parabolico di distanza focale  $1 \text{ m}$  ed apertura  $10 \text{ m}$ . Calcolare la frazione della potenza emessa dalla sorgente che viene concentrata nel lobo d'emissione.

## 12.8 Specchi sferici

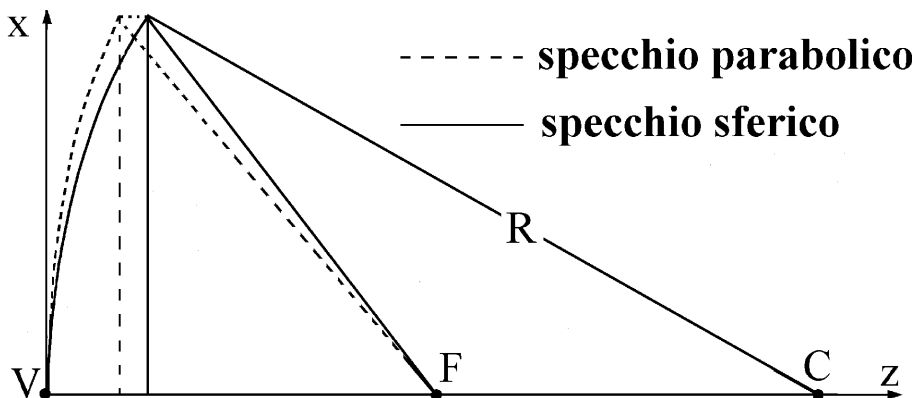
Nelle applicazioni che non richiedono l'uso di fasci di radiazione di grande divergenza angolare gli specchi ellittici o parabolici possono essere sostituiti da specchi sferici. Questi sono meno costosi, perché più facilmente costruibili, ma possono originare **aberrazioni di sfericità**. Per precisare questo punto e per imparare ad usare bene gli specchi sferici, consideriamo una calotta sferica di raggio  $R$  e scegliamo gli assi come in figura 29. Nel piano  $(x, z)$  il profilo della calotta è descritto dall'equazione

$$z = R - \sqrt{R^2 - x^2}$$

che può essere approssimata come segue

$$\text{per } x \ll R, \quad z \approx R - R\left(1 - \frac{x^2}{2R^2} - \frac{x^4}{8R^4}\right) = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3}$$

Fig. 12.29



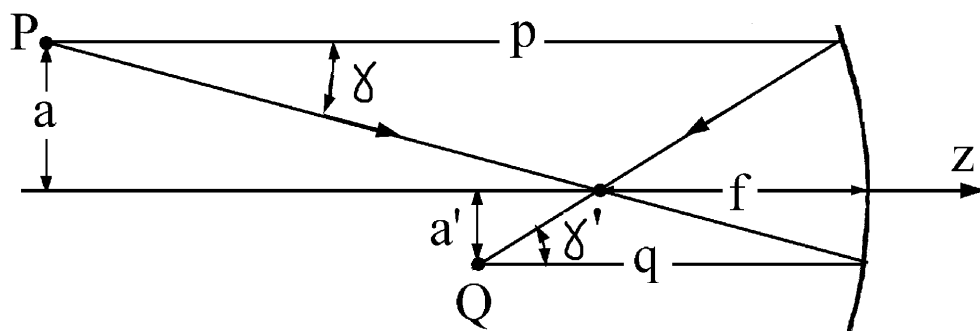
Ciò mostra che **una calotta sferica di raggio  $R$  è osculata da un paraboloide di distanza focale  $f = R/2$** . Ma i cammini che vanno dal piano di apertura al fuoco con impatto sullo specchio sferico sono più brevi rispetto a quelli con impatto sul paraboloide osculatore di  $\approx 2x^4/8R^3 = 2(D/2)^4/8(2f)^3 \approx D^4/500f^3$ . Pertanto **lo specchio sferico non introduce aberrazioni di sfericità solo quando ha apertura tale che**

$$\frac{D^4}{500f^3} < \frac{\lambda}{2} \quad \text{ovvero quando} \quad \frac{f}{D} > \left(\frac{D}{250\lambda}\right)^{1/3} \quad (12.17)$$

Il rapporto  $F = f/D$  tra la distanza focale e l'apertura prende il nome di **F-number** dello specchio. Ad esempio per costruire un telescopio riflettore di apertura  $D = 50 \text{ cm}$  che lavori per radiazione di lunghezza d'onda non minore di  $0.2 \mu\text{m}$  possiamo usare uno specchio sferico con F-number maggiore di 22, quindi con  $f > 11 \text{ m}$ ; per ricevere microonde di lunghezza d'onda non minore di  $5 \text{ mm}$  con apertura di  $10 \text{ m}$  possiamo usare uno specchio sferico con F-number maggiore di 2, quindi con  $f > 20 \text{ m}$ ; per focalizzare un fascio parallelo di diametro  $D = 5 \text{ mm}$  e lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  possiamo usare uno specchio sferico con F-number maggiore di 3.4, quindi con  $f > 1.7 \text{ cm}$ .

Quando l' $F$ -number è grande, diciamo maggiore di 10, e quando la sorgente di radiazione è a distanza dallo specchio non molto minore della distanza focale, i raggi incidenti e riflessi sullo specchio sono **parassiali**, ovvero sono inclinati sull'asse ottico tanto poco da poter confondere gli angoli di inclinazione con i loro seni o la loro tangenti senza introdurre errori significativi. Dalla figura 30 vediamo che un fascio di radiazione parassiale uscente da un

**Fig. 12.30**



punto  $P$ , posto a distanza  $a$  dall'asse ottico ed a distanza  $p$  dallo specchio, viene riflesso in modo da convergere in un punto  $Q$  posto a distanza  $a'$  dall'asse ottico ed a distanza  $q$  dallo specchio. I parametri  $a$ ,  $p$ ,  $a'$  e  $q$  sono legati tra loro ed alle divergenze angolari  $\gamma$  e  $\gamma'$  dei fasci di partenza e d'arrivo dalle relazioni

$$p\gamma = q\gamma' \quad , \quad a = f\gamma' \quad , \quad a' = f\gamma \quad , \quad p\gamma = f(\gamma + \gamma')$$

dalle quali si ottengono le relazioni

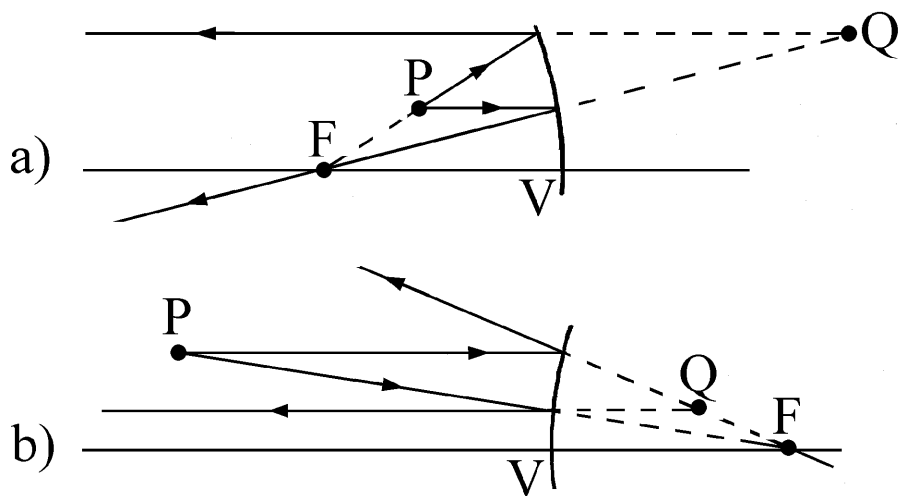
$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{p}{q} \quad , \quad \frac{a'}{a} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{q}{p} \quad , \quad p = f\left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

La prima dice che l'**ingrandimento angolare**  $\gamma'/\gamma$  è uguale al rapporto tra le distanze della sorgente e dell'immagine dallo specchio, la seconda mostra che l'**ingrandimento lineare trasverso** è l'inverso dell'**ingrandimento angolare**, la terza conduce alla

$$\text{equazione dei punti coniugati} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (12.18)$$

Ora, con riferimento alla figura 31, si noti quanto segue.

**Fig. 12.31**



- Quando la sorgente dista dallo specchio meno di  $f$ , come nel caso a), l'equazione 18) porta a valori di  $q$  negativi. In tal caso si dice che l'immagine è virtuale, intendendo che il fascio uscente dallo specchio ha fronti d'onda centrati in un punto posto oltre lo specchio.
- Quando la radiazione incide su uno specchio convesso, come nel caso b), l'equazione dei punti coniugati continua a valere, pur di intendere che lo specchio convesso ha distanza focale negativa.

Infine calcoliamo l'**ingrandimento longitudinale**. Dall'equazione 18) otteniamo

$$\frac{dp}{p^2} + \frac{dq}{q^2} = 0 \quad \implies \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{q^2}{p^2}$$

Quindi un segmento sorgente di lunghezza  $dp$  parallelo all'asse ottico ed orientato in un certo verso ha per immagine un segmento parallelo all'asse ottico di lunghezza  $dq = dp(q/p)^2$ , orientato in verso opposto. Trascurando il segno possiamo concludere che l'**ingrandimento longitudinale** è il **quadrato di quello trasverso**. Ad esempio, una sferetta sorgente ha per immagine un disco oppure un sigaro a seconda che l'ingrandimento trasverso sia minore o maggiore dell'unità.



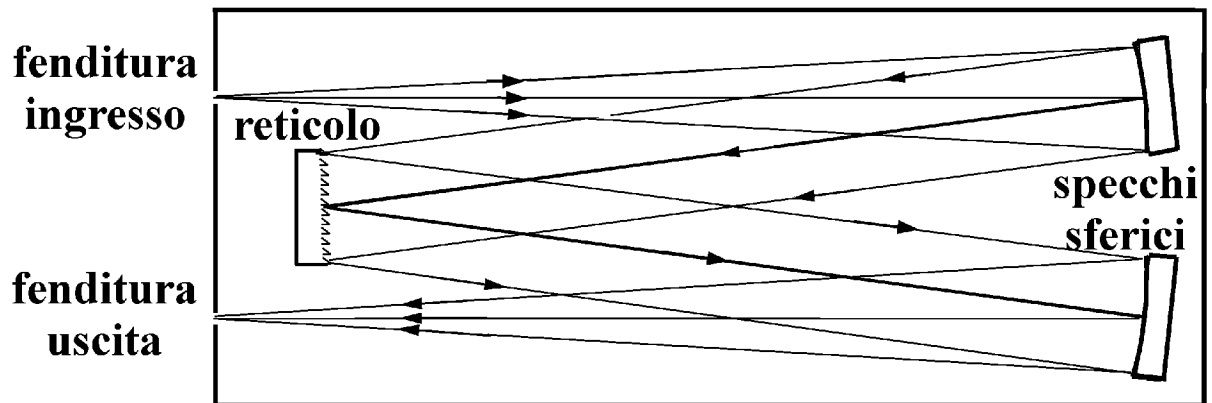
## ESERCIZI

1) Un fascio parallelo di radiazione monocromatica incide su uno specchio sferico concavo di apertura  $10\text{ cm}$  e distanza focale  $10\text{ m}$ . I fotoni del fascio hanno larghezza trasversa  $l = 1\text{ mm}$ . Calcolare le dimensioni della regione focale per  $k = 10^4\text{ m}^{-1}$  e per  $k = 10^6\text{ m}^{-1}$ .

## 12.9 Spettrometro Czerny-Turner

Pensiamo di voler studiare la radiazione emessa dal filamento di una lampada ad incandescenza, oppure da un tubo a gas, o dalla fiamma di una candela. Precisamente, pensiamo di voler misurare lo **spettro di potenza**  $f(k)$ , ovvero il rapporto tra la potenza emessa dalla sorgente nell'intervallo spettrale compreso tra  $k$  e  $k + \Delta k$  e l'ampiezza  $\Delta k$  di tale intervallo. Uno strumento molto adatto allo scopo è lo spettrometro Czerny-Turner schematizzato in figura 32. Per dare concretezza al discorso descriviamo uno strumento con dimensioni adatte all'uso nella banda compresa tra  $k = 10^6\text{ m}^{-1}$  e  $k = 10^8\text{ m}^{-1}$ , ovvero per  $\lambda$  compresa tra  $6\text{ }\mu\text{m}$  e  $0.06\text{ }\mu\text{m}$ . Sul lato di una cassa con pareti

Fig. 12.32

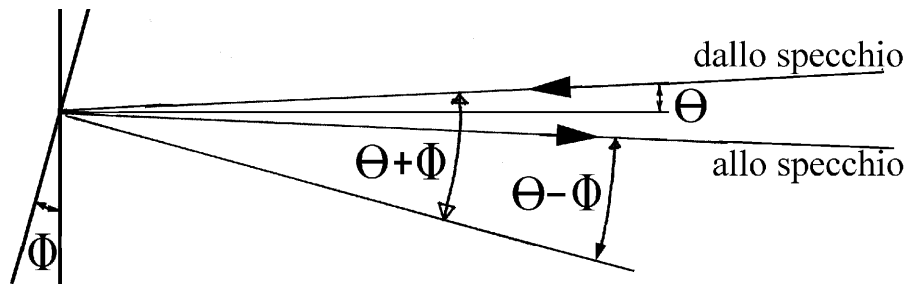


interne ben annerite sono aperte due fenditure ortogonali al foglio di altezza  $1\text{ cm}$  e larghezza regolabile da zero ad  $1\text{ mm}$ , distanti  $20\text{ cm}$  l'una dall'altra. Entro la cassa, a metà strada tra le due fenditure, viene inizialmente inserito uno specchio piano che verrà poi sostituito da un reticolo lamellare. Di fronte alle due fenditure sono montati due specchi sferici di apertura  $D = 8\text{ cm}$ , orientati in modo che il percorso medio fenditura-specchio sferico-specchio piano-specchio sferico-fenditura abbia la forma della lettera W. Le distanze di ciascuna fenditura dallo specchio contrapposto è proprio uguale alla distanza focale degli specchi. La radiazione da studiare viene focalizzata sulla fenditura d'ingresso con divergenza angolare tale da illuminare pienamente solo lo specchio sferico contrapposto. Questo specchio trasforma il fascio incidente in un fascio parallelo che incide sullo specchio piano e viene riflesso in modo da illuminare pienamente il secondo specchio sferico che, a sua volta, trasforma il fascio parallelo in un fascio convergente sulla fenditura d'uscita.

L'angolo  $\theta$  di incidenza (e di riflessione) sullo specchio piano è il rapporto tra la semidistanza dei due specchi (circa 10 cm) e la distanza focale, quindi è un po' minore di  $3^\circ$ . A questo punto sostituiamo lo specchio piano con un reticolo di diffrazione lamellare di altezza 8 cm e larghezza 12 cm, montato in modo che possa ruotare intorno al nastro centrale. Indichiamo con  $d$  il passo del reticolo e, come d'uso, diciamo che  $1/d$  è il "numero di righe per unità di lunghezza". Ad esempio un reticolo lamellare adatto allo studio dello spettro infrarosso ha con  $d = 10 \mu m$ , quindi ha 100 righe per millimetro e 12000 righe in totale, mentre un reticolo lamellare adatto allo studio dello spettro visibile e ultravioletto vicino ha  $d = 1 \mu m$ , quindi ha 1000 righe per millimetro e 120000 righe in totale.

Ora pensiamo che il reticolo sia ruotato dell'angolo  $\phi$  rispetto alla posizione speculare, come in figura 33. In tal caso il fascio di radiazione che incide

**Fig. 12.33**



sul reticolo ha angolo di incidenza  $\theta + \phi$ , mentre il fascio che esce dal reticolo ed illumina pienamente il secondo specchio sferico venendo poi focalizzato sulla fenditura d'uscita ha angolo di riflessione sul reticolo  $\theta - \phi$ . Ricordando che la proiezione parallela del vettore d'onda sul piano del reticolo si conserva a meno di multipli di  $2\pi/d$ , si vede che la radiazione incidente sulla fenditura d'uscita ha vettori d'onda centrati intorno alle soluzioni dell'equazione

$$\frac{2\pi N}{d} = k \sin(\theta + \phi) - k \sin(\theta - \phi) = 2k \cos \theta \sin \phi \quad \text{con } N \text{ intero}$$

Ciò comporta che, per un dato  $\phi$ , vengono selezionati valori di  $k$  multipli interi del valore di "prima armonica" ( $N = 1$ )

$$k = \frac{\pi}{d \sin \phi \cos \theta} \quad (12.19)$$

Scegliendo il passo del reticolo dell'ordine della massima lunghezza d'onda che vogliamo studiare i picchi di interferenza di ordine superiore sono depressi dalla diffrazione, comunque è opportuno inserire filtri d'ingresso che non lascino passare la radiazione di frequenze coincidenti con le armoniche superiori di quella che vogliamo studiare. Ammesso di aver scelto bene il passo del reticolo ed il filtro d'ingresso, possiamo essere certi che la potenza che attraversa la fenditura d'uscita quando il reticolo è ruotato dell'angolo  $\phi$  deve essere attribuita a radiazione con vettore d'onda centrata intorno al

valore dato dall'equazione 19). Naturalmente, a causa delle dimensioni finite delle fenditure, il rivelatore posto a valle della fenditura d'uscita raccoglie la potenza  $\Delta W(k)$  compresa entro un intervallo spettrale di larghezza  $\Delta k$  centrato intorno a  $k$ . Il rapporto

$$f(k) = \frac{\Delta W(k)}{\Delta k}$$

fornisce la misura della potenza-spettrale emessa dalla sorgente oggetto di studio. Per valutare  $\Delta k$  partiamo dall'equazione 19) ed osserviamo che

$$\Delta k = -\frac{\pi \cos \phi \Delta \phi}{d \sin^2 \phi \cos \theta} = -k \frac{\Delta \phi}{\tan \phi}$$

Poi notiamo che la larghezza  $w$  delle fenditure d'uscita e d'ingresso comporta un'indeterminazione  $\Delta \phi$  dell'angolo di incidenza sul reticolo pari a  $w/2f$ . Pertanto, la radiazione uscente dalla fenditura d'uscita ha vettore d'onda determinato a meno di

$$\Delta k = k \frac{\Delta \phi}{\tan \phi} \approx \frac{k w}{2 f \tan \phi} \quad (12.20)$$

Questa equazione, insieme alla misura di  $\Delta W(k)$ , consente di ottenere la potenza-spettrale emessa dalla sorgente a meno di un fattore di scala indipendente da  $k$ .

Una valutazione approssimata della massima risoluzione spettrale raggiungibile con lo strumento descritto può essere ottenuta dividendo membro a membro le equazioni 19) e 20) e tenendo conto che  $\phi$  e  $\theta$  sono angoli piccoli. Il risultato

$$\frac{k}{\Delta k} = \frac{2 \pi f \tan \phi}{k w d \sin \phi \cos \theta} \approx \frac{2 \pi f}{k w d}$$

sembra dire che la risoluzione spettrale può essere aumentata a piacere stringendo le fenditure, ma non è così. Infatti quando il lobo principale di diffrazione emesso dalla fenditura d'ingresso diventa più largo del primo specchio la trasmissione dello strumento crolla e le misure diventano inaccurate. Ricordando che  $2\pi/kw$  è la larghezza angolare del lobo di diffrazione emesso dalla fenditura d'ingresso, possiamo concludere che la massima risoluzione spettrale dello strumento viene raggiunta quando  $2\pi f/kw = D$ , quindi vale

$$\frac{k}{\Delta k} = \frac{D}{d} \quad (12.21)$$

Con le dimensioni specificate ed usando un reticolo da 600 *righe/mm*, la risoluzione spettrale massima non è molto diversa da cinquantamila.

Infine diciamo che lo spettrometro di Czerny-Turner può essere usato anche come monocromatore: rimosso il rivelatore ed inviato in ingresso il fascio che vogliamo rendere monocromatico, otteniamo in uscita un fascio con risoluzione spettrale  $k/\Delta k$  e divergenza angolare non maggiore di  $D/f$ .

## 12.10 Reticoli bibimensionali

Concludiamo il capitolo considerando un reticolo spaziale bidimensionale ed il suo reticolo reciproco. Pensiamo che sul tavolo di figura 15 siano disposti specchietti circolari a formare un reticolo con cella elementare rettangolare di lati  $a$  e  $d$ , come in figura 34. E pensiamo che la lunghezza d'onda della radiazione incidente sia molto maggiore del diametro di uno specchietto, in modo da poter ritenere che il fattore di diffrazione sia uniforme su tutta la cupola. In tal caso la potenza riflessa è modulata dal fattore di interferenza

Fig. 12.34

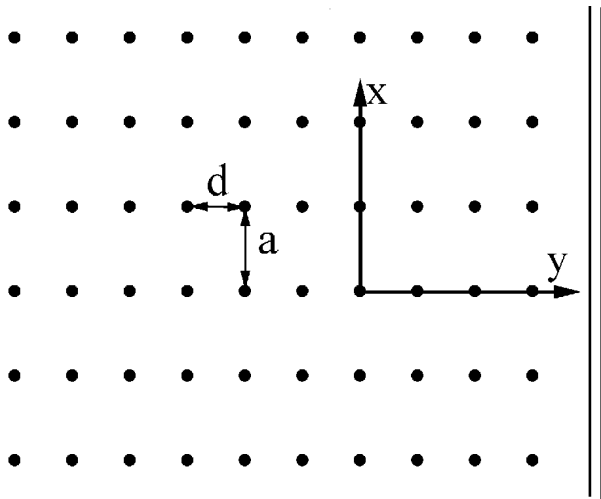
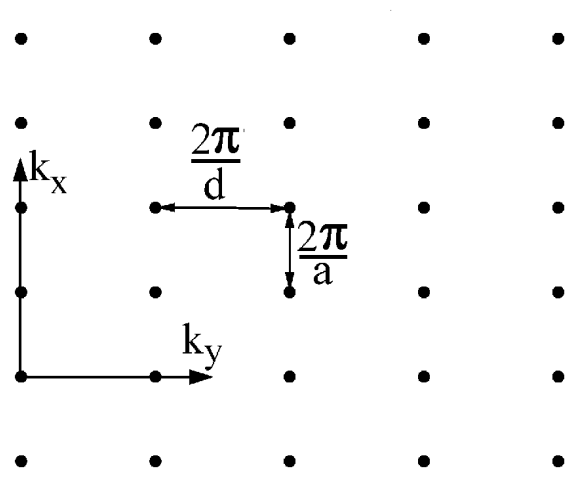


Fig. 12.35



$$\frac{\sin^2(Lk_x a/2)}{\sin^2(k_x a/2)} \frac{\sin^2(Nk_y d/2)}{\sin^2(k_y d/2)} \quad (12.22)$$

e ha valori di picco proporzionali a  $(LN)^2$  in tutti i punti del **reticolo reciproco** del piano  $(k_x, k_y)$  mostrato in figura 35. Sottolineiamo che **la cella elementare del reticolo reciproco ha lati  $2\pi/a$  e  $2\pi/d$  con lato corto parallelo al lato lungo della cella elementare del reticolo di specchietti.**

Ad evitare malintesi aggiungiamo due note.

- Le larghezze reciproche dei picchi d'interferenza sono uguali, ma le larghezze angolari dei picchi radenti sono maggiori di quella del picco normale.
- Le intensità dei picchi d'interferenza sono uguali nel piano equatoriale, ma fuori di tale piano sono attenuate dal fattore dipolare  $\sin^2 \theta$ .

### ESERCIZI

1) Un reticolo di dipoli paralleli oscillanti in fase con  $k = 10^6 \text{ m}^{-1}$  ha cella elementare rettangolare di lati  $10 \mu\text{m}$  e  $40 \mu\text{m}$ . Determinare gli angoli di massima emissione.

# Capitolo 13

## Elementi ottici a rifrazione, interferometri

Abbiamo visto che l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza e che dobbiamo tenerne conto per calcolare la velocità di propagazione dell'energia elettromagnetica nei materiali. Ma i fenomeni considerati in questo capitolo dipendono dalle modalità di propagazione dei fronti d'onda e possono essere interpretati ammettendo che l'indice di rifrazione  $n$  non dipenda dalla frequenza nella banda di interesse. Per alcuni materiali trasparenti i valori presi da  $n$  nella banda visibile sono riportati nella tabella seguente. Ricordiamo che la banda visibile si estende da  $\lambda \approx 0.42 \mu m$  a  $\lambda \approx 0.76 \mu m$ .

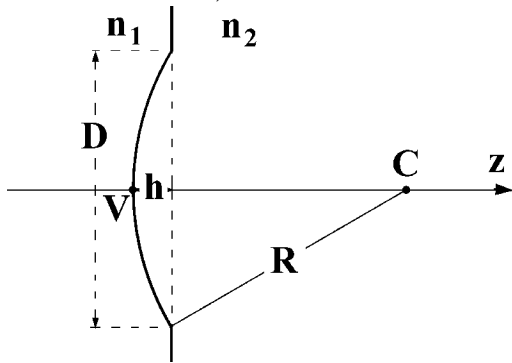
MATERIALE	$n$	MATERIALE	$n$
criolite	1.30	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (zaffiro)	1.76
acqua	1.33	vetro al piombo	2.0
fluoruro di magnesio	1.38	ZnS (deposito)	2.3
biossido di silicio	1.45	TiO <sub>2</sub> (deposito)	2.4
Columbia Resin 39	1.50	diamante	2.42
vetro crown	1.52	TiO <sub>2</sub> (cristallo)	2.7
vetro flint	1.62	silicio	3.5

Nei primi paragrafi di questo capitolo concentriamo l'attenzione sulle lenti e le descriviamo sia con approccio ondulatorio, sia con approccio geometrico. Poi studiamo la riflessione-rifrazione da strati dielettrici sottili e mettiamo in evidenza, ancora una volta, l'importanza dell'interferenza nei fenomeni naturali e nei dispositivi ottici moderni. Descriviamo i ricoprimenti antiriflesso delle lenti, gli specchi a multistrati dielettrici, i polarizzatori in riflessione e a multistrati, i filtri interferenziali e presentiamo quattro strumenti che hanno avuto e continuano ad avere un ruolo fondamentale nella spettroscopia ad alta risoluzione: lo spettrometro di Fabry-Perot e gli interferometri di Fabry-Perot, di Michelson e di Sagnac.

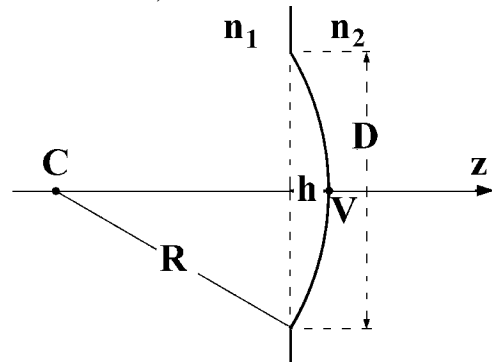
## 13.1 Diottro sferico

Con riferimento alla figura 1, pensiamo che l'interfaccia tra due mezzi di indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$  sia una calotta sferica di raggio  $R$  ed **apertura**  $D$ . Scegliamo l'asse  $z$  normale all'interfaccia ed al piano d'apertura, orientata

Fig. 13.1: a)



b)

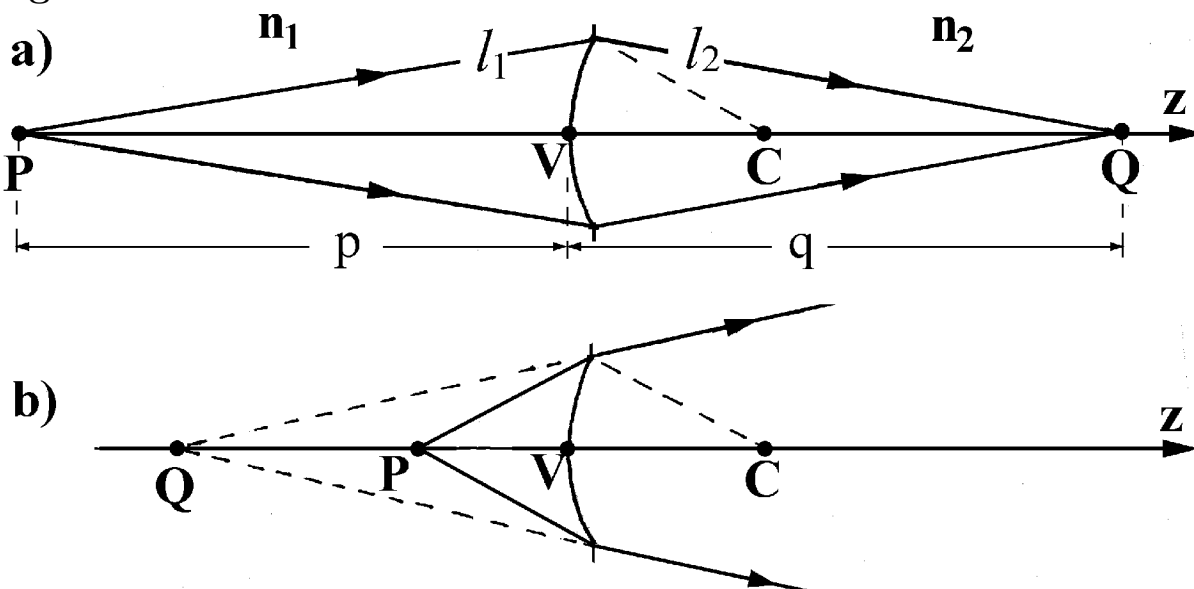


dal mezzo 1 al mezzo 2, con origine nel punto V dell'interfaccia, diciamo che V è il **vertice**, indichiamo con  $h$  la distanza tra il vertice ed il piano d'apertura e pensiamo che la radiazione incida sull'interfaccia nel mezzo 1. Nel caso a) l'interfaccia è **convessa** ed il suo centro C è a valle dell'interfaccia, nel caso b) l'interfaccia è **concava** ed il suo centro è a monte dell'interfaccia. Si noti che  $D$ ,  $R$  ed  $h$  sono legate dalla relazione

$$D = 2\sqrt{R^2 - (R - h)^2} = 2\sqrt{h(2R - h)} \quad (13.1)$$

e si tenga ben presente che in figura 1 e nelle seguenti le aperture sono molto esagerate rispetto a quelle tipiche: di solito  $h$  è minore di  $R/100$ , quindi  $D$  è ben approssimato da  $D = \sqrt{8hR}$  ed è quasi sempre minore di  $0.3R$ .

Fig. 13.2



Ora consideriamo le situazioni mostrate in figura 2a) e 2b): una sorgente monocromatica posta nel punto P individuato da  $z = -p$  invia radiazione

su un'interfaccia sferica convessa. In entrambi i casi la radiazione passa da un mezzo otticamente tenue di indice di rifrazione  $n_1$ , ad esempio aria, ad un mezzo otticamente denso, ad esempio un vetro di indice di rifrazione  $n_2$ . Ragionando come se la legge della rifrazione valesse localmente in ogni punto dell'interfaccia, possiamo aspettarci che l'onda sia meno divergente nel vetro che in aria. E quando la sorgente non è troppo vicina all'interfaccia, possiamo aspettarci che l'onda rifratta converga in un punto Q individuato da  $z = q$ , come mostrato in a). Ciò può avvenire quando i percorsi ottici da P a Q hanno valori indipendenti dal punto d'impatto sull'interfaccia. Il percorso ottico centrale vale  $n_1 p + n_2 q$ , mentre un percorso ottico con punto d'impatto sulla circonferenza d'apertura vale  $n_1 l_1 + n_2 l_2$ , dove

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(p+h)^2 + h(2R-h)} = \sqrt{p^2 + 2h(R+p)} \\ l_2 &= \sqrt{(q-h)^2 + h(2R-h)} = \sqrt{q^2 + 2h(R-q)} \end{aligned}$$

Pertanto la condizione di focalizzazione risulta

$$n_1 \sqrt{p^2 + 2h(R+p)} + n_2 \sqrt{q^2 + 2h(R-q)} = n_1 p + n_2 q$$

Sviluppando in serie di potenze di  $h$  otteniamo la condizione

$$h \left[ \frac{n_1 R}{p} + n_1 + \frac{n_2 R}{q} - n_2 \right] + h^2 [\dots\dots\dots] = 0$$

e richiedendo che il coefficiente del termine lineare in  $h$  si annulli otteniamo l'**equazione dei punti coniugati del diottro sferico**

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (13.2)$$

Procedendo con pazienza potremmo calcolare il termine quadratico in  $h$  ed imporre la condizione che rimanga molto minore  $\lambda/2$ , come abbiamo fatto nel caso dello specchio sferico. Ma ci limitiamo a dire che la condizione è soddisfatta quando i fasci incidente e rifratto hanno larghezze angolari minori di una decina di gradi, diciamo quando sono **fasci parassiali**.

L'equazione 2) vale anche per diottri concavi, pur di intendere che  $R$  è negativo in tal caso. E vale anche quando  $q$  risulta negativo, pur di intendere che in tal caso l'onda rifratta diverge nel mezzo 2 come se provenisse dal punto  $z = -|q|$ , come mostrato in figura 2b). Dall'equazione 2) si vede che

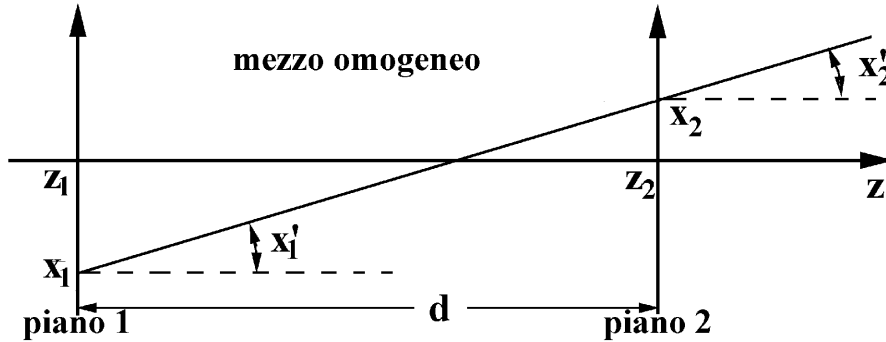
$$\text{per } q = \infty \quad p = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = f_1 \quad , \quad \text{per } p = \infty \quad q = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} = f_2$$

Le lunghezze  $f_1$  ed  $f_2$  prendono il nome di **distanze focali del diottro sferico** e sono sempre diverse, ma hanno sempre segno concorde. Quando risultano negative, il diottro trasforma un'onda piana incidente in un'onda che diverge nel mezzo 2 come se provenisse da  $z = -|f_2|$ , e trasforma in

un'onda piana un'onda incidente che convergerebbe nel punto  $z = |f_1|$  del mezzo 2, se non fosse rifratta.

Ora vogliamo mostrare che l'equazione 2) può essere ottenuta anche assumendo che i raggi incidenti sul diottro siano rifratti come previsto dalla legge di Snell. Allo scopo seguiamo un approccio che può sembrare prolisso, ma che si dimostrerà utilissimo nel seguito. Con riferimento alla figura 3, consideriamo un dielettrico omogeneo confinato tra i piani  $z = z_1$  e  $z = z_2 = z_1 + d$  e limitiamo l'attenzione a percorsi parassiali nel piano  $(x, z)$ . Indichiamo con

**Fig. 13.3**



$x_1$  ed  $x_2$  le **ordinate** (con segno) dei punti di attraversamento dei due piani ed indichiamo con  $x' = dx/dz$  la pendenza del percorso. Poiché il mezzo è omogeneo le pendenze  $x'_1$  e  $x'_2$  di attraversamento dei due piani sono uguali e possiamo scrivere la

$$\text{legge di trasferimento} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

Ora, con riferimento alla figura 4a), pensiamo che il piano 1 passi per il vertice ed il piano 2 passi per il piano d'apertura di un diottro convesso. In approssimazione parassiale,  $x'_1$  e  $x'_2$  possono essere confusi con gli angoli di pendenza o con i loro seni, quindi gli angoli di incidenza e di rifrazione sull'interfaccia valgono  $\theta_0 = x'_1 + x_2/R$  e  $\theta = x'_2 + x_2/R$  e sono legati dalla legge di Snell  $n_1\theta_0 = n_2\theta$ . Ciò comporta che

$$x'_2 = \theta - \frac{x_2}{R} = \frac{n_1}{n_2}\theta_0 - \frac{x_2}{R} = \frac{n_1}{n_2}(x'_1 + \frac{x_2}{R}) - \frac{x_2}{R} = \frac{n_1}{n_2}x'_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2R}x_2$$

Ma i due piani sono vicinissimi e i raggi sono parassiali, quindi possiamo approssimare  $x_2$  con  $x_1$  e possiamo descrivere l'azione dell'interfaccia con la

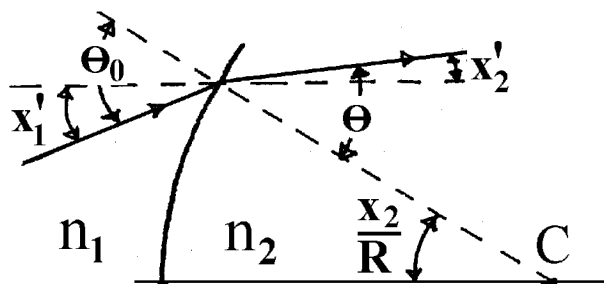
$$\text{legge di attraversamento} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

Lasciamo per esercizio di dimostrare che questa legge vale anche per il diottro concavo in figura 4b), pur di intendere che  $R$  è negativo in tal caso.

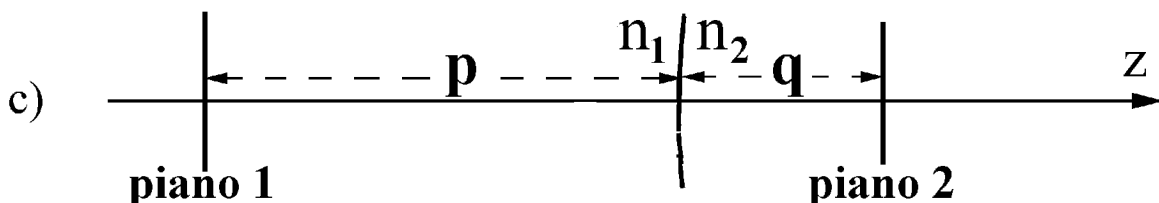
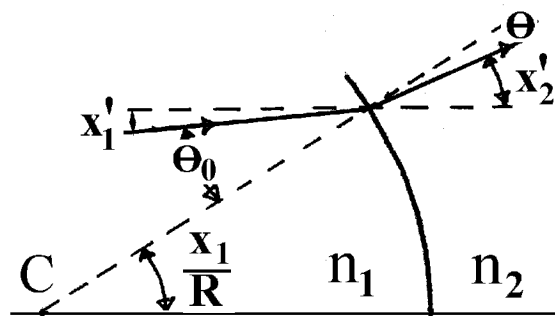
Ora, con riferimento alla figura 4c), spostiamo il piano 1 ad incontrare l'asse  $z$  in  $-p$  ed il piano 2 ad incontrare l'asse  $z$  in  $q$ , senza richiedere, per



Fig. 13.4: a)



b)



il momento, che  $p$  e  $q$  siano legati in qualche modo. In tal caso la legge di trasferimento tra i due piani risulta

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

La matrice di destra descrive il trasferimento dal piano 1 al piano d'interfaccia, quella centrale è la matrice di attraversamento dell'interfaccia, quella di sinistra descrive il trasferimento dal piano d'interfaccia al piano 2. Eseguendo il prodotto delle tre matrici otteniamo la legge di trasferimento

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad A = 1 + q \frac{n_1-n_2}{n_2 R}, \quad B = p + pq \frac{n_1-n_2}{n_2 R} + q \frac{n_1}{n_2}$$

$$C = \frac{n_1-n_2}{n_2 R}, \quad D = p \frac{n_1-n_2}{n_2 R} + \frac{n_1}{n_2}$$

A questo punto basta richiedere che l'elemento  $B$  si annulli per assicurare che i due piani siano coniugati. Infatti per  $B = 0$  i raggi uscenti da un punto del piano 1 con valori diversi di  $x'_1$  convergono in uno stesso punto del piano 2. E poiché l'equazione  $B = 0$  conduce all'equazione dei punti coniugati, possiamo concludere che l'approccio geometrico è consistente con quello ondulatorio.

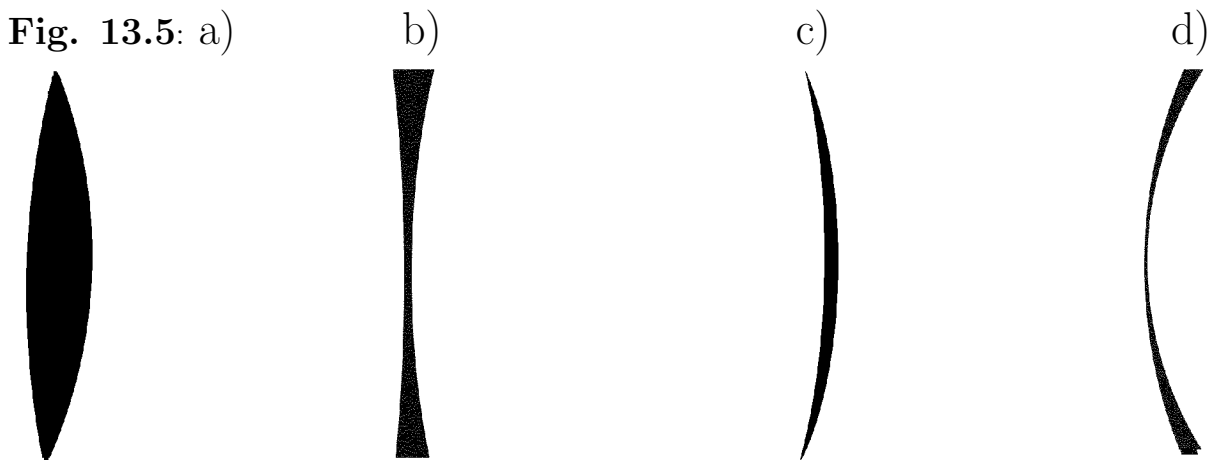
### ESERCIZI

1) Per un diottro sferico convesso con  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$  e raggio  $50 \text{ cm}$ , calcolare: a) le due distanze focali, b) la posizione dell'immagine quando il fascio incidente proviene da un punto  $10 \text{ m}$  a monte, c) la posizione dell'immagine quando il fascio incidente converge in un punto  $2 \text{ m}$  a valle, d) la matrice di trasferimento da un piano  $3 \text{ m}$  a monte ad uno  $3 \text{ m}$  a valle.

2) Ripetere l'esercizio 1 per i seguenti diottri: a) concavo con  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$  e raggio  $50 \text{ cm}$ , b) convesso con  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1$  e raggio  $50 \text{ cm}$ , c) concavo con  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1$  e raggio  $50 \text{ cm}$ .

## 13.2 Matrice ABCD e proprietà delle lenti.

Le **lenti sottili** sono costituite da un mezzo di indice di rifrazione  $n$  confinato tra due interfacce sferiche in uno dei modi schematizzati in figura 5. La lente è **biconvessa** nel caso a), **biconcava** nel caso b), **a menisco** nei casi c) e d). La radiazione che attraversa una lente biconvessa o biconcava incontra nell'ordine un'interfaccia convessa ed una concava oppure un'interfaccia concava ed una convessa, mentre la radiazione che attraversa una lente a menisco incontra due interfacce concave oppure due interfacce convesse. Diciamo che le lenti sono sottili intendiamo che hanno spessore quasi nullo alla periferia, come nei casi a) e c), oppure al centro, come nei casi b) e d), e che hanno apertura molto minore dei raggi di curvatura delle due interfacce.



Indichiamo con  $R_1$  ed  $R_2$  i **raggi di curvatura con segno** delle due interfacce e partiamo dall'equazione 4) tenendo conto che le ordinate d'ingresso e d'uscita di un raggio parassiale possono essere confuse perché la lente è sottile. Quindi la matrice di attraversamento della lente risulta

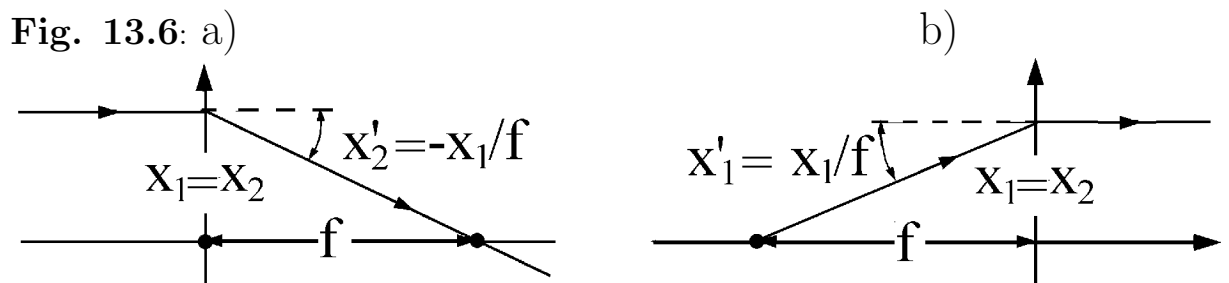
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Le matrici di destra e di sinistra descrivono rispettivamente l'azione dell'interfaccia d'ingresso ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n$ ) e l'azione dell'interfaccia d'uscita ( $n_1 = n$ ,  $n_2 = 1$ ). Eseguendo il prodotto matriciale otteniamo la **matrice ABCD della lente sottile**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad f = \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)(n - 1)} \quad (13.5)$$

Da questo risultato possiamo trarre le seguenti conclusioni importanti.

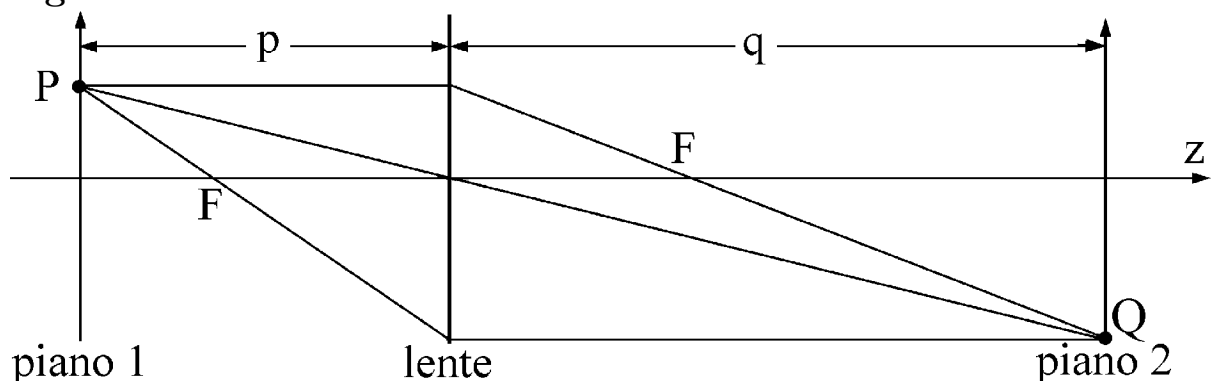
- L'azione di una lente sottile sui raggi che l'attraversano è semplicissima: **un raggio incidente in  $x_1$  viene fatto ruotare dell'angolo  $-x_1/f$** . Infatti  $x'_2$  è legato ad  $x'_1$  dalla relazione  $x'_2 = -x_1/f + x'_1$ .
- **I fuochi della lente sono alla stessa distanza da una parte e dall'altra anche quando la lente ha forma asimmetrica.** Infatti un raggio



parallelo all'asse ottico che incide sulla lente con ordinata  $x_1$ , esce con pendenza  $x'_2 = -x_1/f$ , quindi incontra l'asse ottico a distanza  $f$  dalla lente, come in figura 6a). Ed un raggio che esce parallelamente all'asse ottico con ordinata  $x_2 = x_1$  entra con pendenza  $x'_1$  tale che  $0 = -x_1/f + x'_1$ , quindi proviene da un punto dell'asse che dista  $f$  dalla lente, come in figura 6b).

- Quando  $R_1 = R_2$ , ovvero quando la lente ha spessore costante,  $f$  è infinito, la matrice d'attraversamento si riduce alla matrice identica e (quasi) tutto va come se la lente non ci fosse. Per tale ragione la visione di oggetti posti entro un vaso di vetro con pareti curve, ma di spessore uniforme, non è alterata dalle presenza delle pareti.
- Le lenti con spessore centrale maggiore di quello periferico hanno distanza focale positiva, diciamo che sono **convergenti**. Viceversa, le lenti con spessore centrale minore di quello periferico hanno distanza focale negativa, diciamo che sono **divergenti**.
- La matrice ABCD della lente è unimodulare, sebbene non lo siano quelle delle singole interfacce. In generale è unimodulare la matrice ABCD tra due qualunque piani normali all'asse di un sistema ottico a simmetria cilindrica, posti entro lo stesso materiale. Infatti, sono unimodulari le matrici di trasferimento dei mezzi omogenei e delle lenti, quindi è unimodulare anche la matrice prodotto.

**Fig. 13.7**



Ora, con riferimento alla figura 7, pensiamo che la lente sia nel piano  $z = 0$ , che la sorgente  $P$  sia nel piano 1 passante per  $z_1 = -p$  e che l'immagine  $Q$  si formi nel piano 2 passante per  $z_2 = q$ . Per determinare la relazione tra  $p$ ,  $q$  ed  $f$ , cominciamo a notare che, comunque siano scelti  $p$  e  $q$ , la matrice di

trasferimento dal piano 1 al piano 2 risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - q/f & p + q - pq/f \\ -1/f & 1 - p/f \end{pmatrix}$$

Imponendo la condizione che l'elemento  $B$  sia nullo otteniamo la

$$\text{legge dei piani coniugati della lente sottile} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (13.6)$$

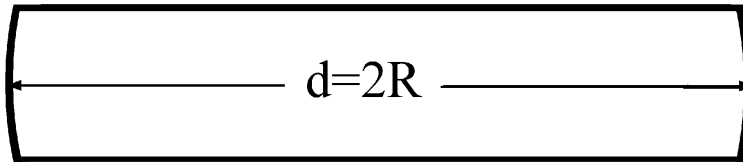
e vediamo che la **matrice di trasferimento tra piani coniugati** vale

$$\begin{pmatrix} -q/p & 0 \\ -1/f & -p/q \end{pmatrix} \quad (13.7)$$

L'elemento  $A = -q/p$  di questa matrice è l'**ingrandimento trasverso**, mentre l'elemento  $D = -p/q$  è l'**ingrandimento angolare**.

Naturalmente, quando la lente è spessa è necessario tener conto anche del trasferimento tra i diottri d'ingresso e d'uscita. Come esempio consideriamo

**Fig. 13.8**



la **lente sferica** di raggio  $R$  mostrata in figura 8. Come al solito intendiamo che l'apertura è molto minore di  $R$ , quindi la distanza di trasferimento tra il diottro convesso d'ingresso ed il diottro concavo d'uscita differisce poco da  $2R$ , quindi la **matrice ABCD della lente sferica** risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} - 1 & 2\frac{R}{n} \\ -2\frac{n-1}{nR} & \frac{2}{n} - 1 \end{pmatrix}$$

## ESERCIZI

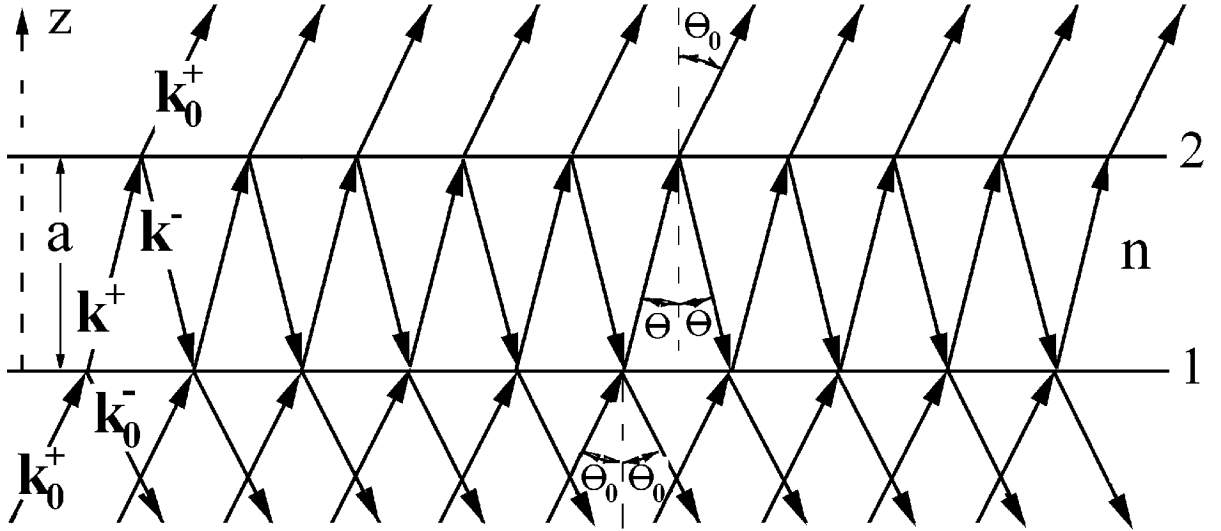
1) Calcolare la matrice ABCD per una sfera di raggio  $10 \text{ cm}$  ed indice di rifrazione  $1.5$  e mostrare che: a) un fascio parallelo di diametro  $6 \text{ mm}$ , con asse diretto verso il centro della sfera, esce con diametro  $2 \text{ mm}$  ed è focalizzato a distanza di  $5 \text{ cm}$  dall'uscita; b) un fascio proveniente da un punto a distanza di  $5 \text{ cm}$  dalla superficie della sfera esce parallelo con diametro tre volte maggiore di quello d'ingresso.

2) Per una sfera di raggio  $10 \text{ cm}$  ed  $n = 2$  calcolare: a) la matrice ABCD, b) la posizione dell'immagine di una sorgente posta all'infinito.

## 13.3 Lamina dielettrica

In questo paragrafo studiamo la riflessione-trasmissione di OPPMPL incidenti su una lamina dielettrica perfettamente trasparente di indice di rifrazione

Fig. 13.9



$n$  con facce perfettamente piane e parallele separate da distanza  $a$ . Ad esempio pensiamo ad una sottilissima lamina d'acqua tesa da un telaio. Come mostrato in figura 9, le onde riflesse e trasmesse dalla lamina sono la sovrapposizione di onde originate da riflessioni-rifrazioni sulle interfacce 1 e 2. Su entrambe le interfacce si conserva la proiezione parallela  $\mathbf{K}_0$  del vettore d'onda, quindi possiamo indicare con  $\mathbf{k}_0^+ \equiv (\mathbf{K}_0, k_0 \cos \theta_0)$  i vettori d'onda incidente e trasmesso, con  $\mathbf{k}_0^- \equiv (\mathbf{K}_0, -k_0 \cos \theta_0)$  il vettore d'onda riflesso e con  $\mathbf{k}^+ \equiv (\mathbf{K}_0, k \cos \theta)$  e  $\mathbf{k}^- \equiv (\mathbf{K}_0, -k \cos \theta)$  i vettori d'onda delle due onde che viaggiano avanti-indietro entro la lamina. Naturalmente  $\theta$  è legato a  $\theta_0$  dalla legge di Snell  $n \sin \theta = \sin \theta_0$  e  $k$  è uguale ad  $nk_0$ . Per calcolare le ampiezze delle onde trasmesse e riflesse, data l'ampiezza dell'onda incidente, scegliamo l'asse  $z$  normale alla lamina, con origine sull'interfaccia d'ingresso, e descriviamo i campi elettrici come segue:

<b>campo elettrico incidente</b>	$\mathbf{E}_0^+ e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_0 z \cos \theta_0 - \omega t)}$
<b>campo elettrico riflesso</b>	$\mathbf{E}_0^- e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} - k_0 z \cos \theta_0 - \omega t)}$
<b>campo elettrico interno progressivo</b>	$\mathbf{E}^+ e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k z \cos \theta - \omega t)}$
<b>campo elettrico interno regressivo</b>	$\mathbf{E}^- e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} - k z \cos \theta - \omega t)}$
<b>campo elettrico trasmesso</b>	$\mathbf{E}_t e^{i(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R} + k_0 z \cos \theta_0 - \omega t)}$

Si intende che i vettori fissi  $\mathbf{E}_0^+$ ,  $\mathbf{E}_0^-$ ,  $\mathbf{E}^+$ ,  $\mathbf{E}^-$ , ed  $\mathbf{E}_t$  sono ortogonali al piano di figura nel caso TE e giacciono nel piano di figura nel caso TM. Poi definiamo il coefficiente di riflessione d'onda  $\rho$  ed il coefficiente di trasmissione d'onda  $\tau$  della lamina con le equazioni

$$\rho = \frac{E_0^-}{E_0^+} \quad \tau = \frac{E_t}{E_0^+} \quad (13.8)$$

Precisiamo che  $\rho$  è il rapporto tra il campo riflesso ed il campo incidente valutati sull'interfaccia d'ingresso, mentre  $\tau$  è il rapporto tra il campo trasmesso valutato in un qualunque punto a valle della lamina ed il campo che

sarebbe presente nello stesso punto se non vi fosse la lamina. Per calcolare  $\rho$  e  $\tau$  procediamo con i seguenti passi.

- Indichiamo con  $r$  e  $t$  i coefficienti di riflessione e trasmissione d'onda dell'interfaccia d'ingresso, con  $r'$  e  $t'$  quelli dell'interfaccia d'uscita, e notiamo che le equazioni di Fresnel (11.38) comportano che  $r' = -r$  e che  $tt' = 1 - r^2$ , sia nel caso TE, sia nel caso TM.

- Notiamo che sull'interfaccia 2 (piano  $z = a$ ) i campi interni regressivo e progressivo sono legati dalla condizione di riflessione

$$E^- e^{-ika \cos \theta} = r' E^+ e^{ika \cos \theta}$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$E^- = r' E^+ e^{i2\varphi} \quad \text{dove} \quad \varphi = ka \cos \theta \quad (13.9)$$

- Notiamo che i quattro campi presenti sull'interfaccia 1 (piano  $z = 0$ ) sono legati dalle condizioni di riflessione-trasmissione

$$E^+ = tE_0^+ + r'E^- \quad , \quad E_0^- = rE_0^+ + t'E^-$$

Da queste equazioni e dalle equazioni 9) otteniamo

$$E^+ = \frac{tE_0^+}{1 - r'^2 e^{i2\varphi}} \quad , \quad E^- = \frac{r' e^{i2\varphi} t E_0^+}{1 - r'^2 e^{i2\varphi}} \quad , \quad E_0^- = \left[ r + \frac{t'tr' e^{i2\varphi}}{1 - r'^2 e^{i2\varphi}} \right] E_0^+$$

- Teniamo conto che  $r' = -r$ , che  $t't = 1 - r^2$  e concludiamo che il **coefficiente di riflessione d'onda della lamina** vale

$$\rho = \frac{E_0^-}{E_0^+} = \frac{r(1 - e^{i2\varphi})}{1 - r^2 e^{i2\varphi}} \quad (13.10)$$

- Infine notiamo che la condizione di trasmissione sull'interfaccia 2 lega  $E_t$  ad  $E^+$  con la relazione

$$E_t e^{ik_0 a \cos \theta_0} = t' E^+ e^{ika \cos \theta} = \frac{t't E_0^+ e^{i\varphi}}{1 - r'^2 e^{i2\varphi}} = \frac{(1 - r^2) E_0^+ e^{i\varphi}}{1 - r^2 e^{i2\varphi}}$$

che conduce al **coefficiente di trasmissione d'onda della lamina**

$$\tau = \frac{E_t}{E_0^+} = \frac{(1 - r^2) e^{i\varphi}}{1 - r^2 e^{i2\varphi}} e^{-ik_0 a \cos \theta_0} \quad (13.11)$$

Prendendo il modulo quadro otteniamo

$$\mathcal{T} = \tau \tau^* = \frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\varphi)} = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1 + (F \sin \varphi)^2}$$

dove

$$F = \frac{2 |r|}{1 - r^2} \quad (13.12)$$

Insomma: il **coefficiente di trasmissione di potenza della lamina** dipende dallo **sfasamento**  $\varphi = ka \cos \theta$  come precisato dall'equazione

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + (F \sin \varphi)^2} \quad (13.13)$$

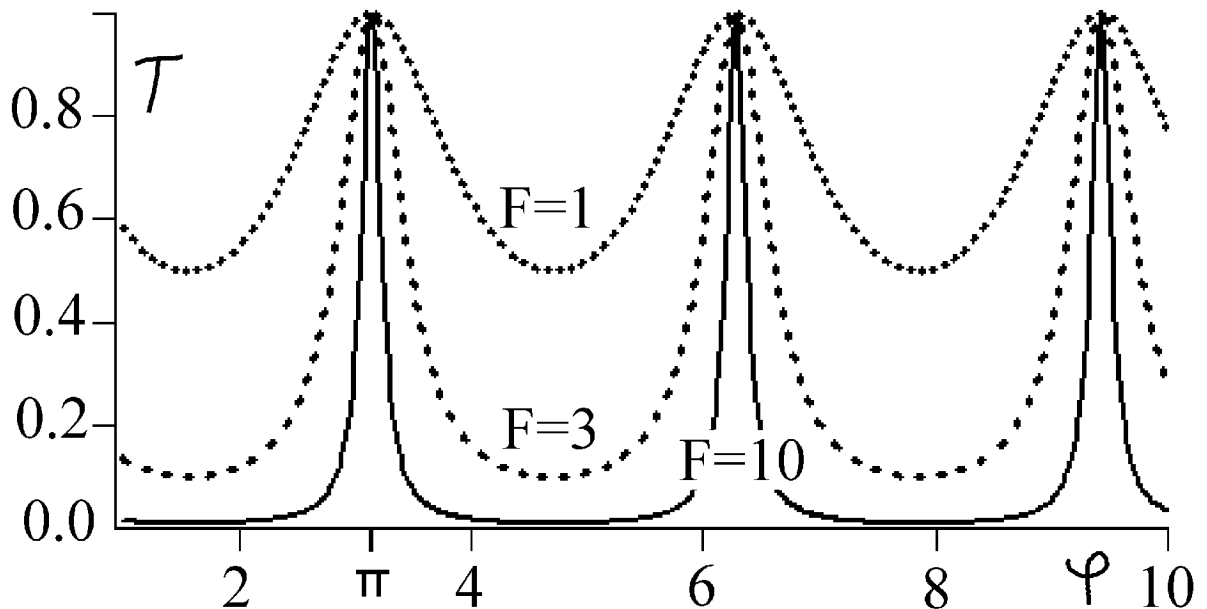
ed il **coefficiente di riflessione di potenza della lamina** vale

$$\mathcal{R} = 1 - \mathcal{T} = \frac{(F \sin \varphi)^2}{1 + (F \sin \varphi)^2} \quad (13.14)$$

Lo si vede anche prendendo il modulo quadro di  $\rho$ .

La **funzione di Airy**  $\mathcal{T}(\varphi)$ , definita dall'equazione 13), è un pettine di periodo  $\pi$ , con denti che si stringono e si approfondiscono all'aumentare di  $F$  come mostrato in figura 10. Per questa ragione il parametro  $F$  prende il

**Fig. 13.10** Funzione di Airy  $\mathcal{T}(\varphi)$  per alcuni valori della finezza  $F$



nome di **finezza**. Nel seguito indichiamo con  $\lambda = 2\pi/k_0$  la lunghezza d'onda nel vuoto ed indichiamo con

$$\Lambda = 4na \quad \text{la lunghezza d'onda caratteristica della lamina} \quad (13.15)$$

Con queste notazioni lo sfasamento diventa

$$\varphi = ka \cos \theta = n \frac{2\pi}{\lambda} a \cos \theta = \frac{\pi \Lambda}{2 \lambda} \cos \theta \quad (13.16)$$

Come primo esempio consideriamo una lamina d'acqua ( $n = 1.33$ ) e pensiamo che sia illuminata ad incidenza quasi normale. In tal caso l'interfaccia d'ingresso ha  $r = (n_0 - n)/(n_0 + n) = -0.14$ , quindi la finezza vale  $F = 0.29$ . Pertanto  $\mathcal{T}$  varia tra l'unità e  $\approx 0.92$ , mentre la riflettività varia tra 0 ed  $\mathcal{R}_{max} = F^2/(1 + F^2) = 0.08$  al variare dello spessore. Si noti che il contrasto tra intensità massima e minima è piccolo in trasmissione, ma è infinito

in riflessione. Ciò consente di comprendere l'origine dei bellissimi giochi di colore che si manifestano quando la luce bianca è riflessa da una lamina d'acqua: una lamina di lunghezza d'onda caratteristica  $\Lambda = 0.8 \mu m$  ha riflettività grande per luce rossa ( $\varphi \approx \pi/2$ ) e piccola per luce violetta ( $\varphi \approx \pi$ ), quindi appare rossa. Invece una lamina con  $\Lambda = 1.6 \mu m$  ha riflettività massima per  $\lambda = 0.55 \mu m$  ( $\varphi \approx 3\pi/2$ ) e nulla sia nel rosso ( $\varphi \approx \pi$ ), sia nel violetto ( $\varphi \approx 2\pi$ ), quindi appare giallo-verde.

Per lamine di indice di rifrazione grande e per angoli di incidenza grandi,  $F$  può diventare ben maggiore dell'unità, come mostrato nella tabella seguente, con la conseguenza che anche il contrasto in trasmissione può diventare molto grande. Ma attenzione: **per angoli di incidenza grandi le condizioni di polarizzazione giocano ruoli importantissimi**. Ad esempio la riflettività di una lamina di diamante illuminata con angolo di incidenza di Brewster  $\theta_B = 67.55^\circ$  varia tra 0 e 0.89 al variare dello spessore nel caso TE, ma è nulla in qualunque condizione nel caso TM.

### Riflettività massima di una lamina di diamante ( $n = 2.42$ )

$\theta_0$	$\theta$	$r$ TE	$F$ TE	$\mathcal{R}_{max}$ TE	$r$ TM	$F$ TM	$\mathcal{R}_{max}$ TM
$0^\circ$	$0^\circ$	-0.415	1.003	0.50	-0.415	1.003	0.50
$10^\circ$	$4.115^\circ$	-0.420	1.020	0.51	-0.410	0.986	0.49
$30^\circ$	$11.92^\circ$	-0.464	1.183	0.58	-0.364	0.839	0.41
$50^\circ$	$18.45^\circ$	-0.562	1.643	0.73	-0.242	0.514	0.21
$65^\circ$	$21.99^\circ$	-0.683	2.560	0.87	-0.049	0.098	0.01
$67.55^\circ$	$22.45^\circ$	-0.708	2.839	0.89	0	0	0
$70^\circ$	$22.85^\circ$	-0.734	3.183	0.91	0.054	0.108	0.01
$80^\circ$	$24.01^\circ$	-0.854	6.310	0.98	0.370	0.857	0.42

### ESERCIZI

1) Pensare che una lamina di zaffiro di spessore  $a = 0.12 \mu m$  sia illuminata con luce bianca ad incidenza quasi normale. a) Riportare in grafico la riflettività in funzione della lunghezza d'onda nella banda visibile. b) Descrivere il colore della lamina in riflessione e in trasmissione.

2) Scegliere lo spessore di un velo d'acqua ( $n = 1.33$ ) in modo che rifletta sulla normale la radiazione rossa, ma non la violetta, e calcolare il coefficiente di trasmissione  $\mathcal{T}$  per radiazione rossa e violetta.

3) Un fascio di luce con lunghezza d'onda  $0.7 \mu m$  e intensità  $1 W/m^2$  incide all'angolo di Brewster su una lamina di diamante. Il fascio è la sovrapposizione di due fasci di ugual intensità, uno polarizzato TE, l'altro TM. a) Scegliere lo spessore dello strato per rendere massima la riflettività TE. b) Per tale spessore calcolare le intensità dei fasci riflesso e trasmesso.

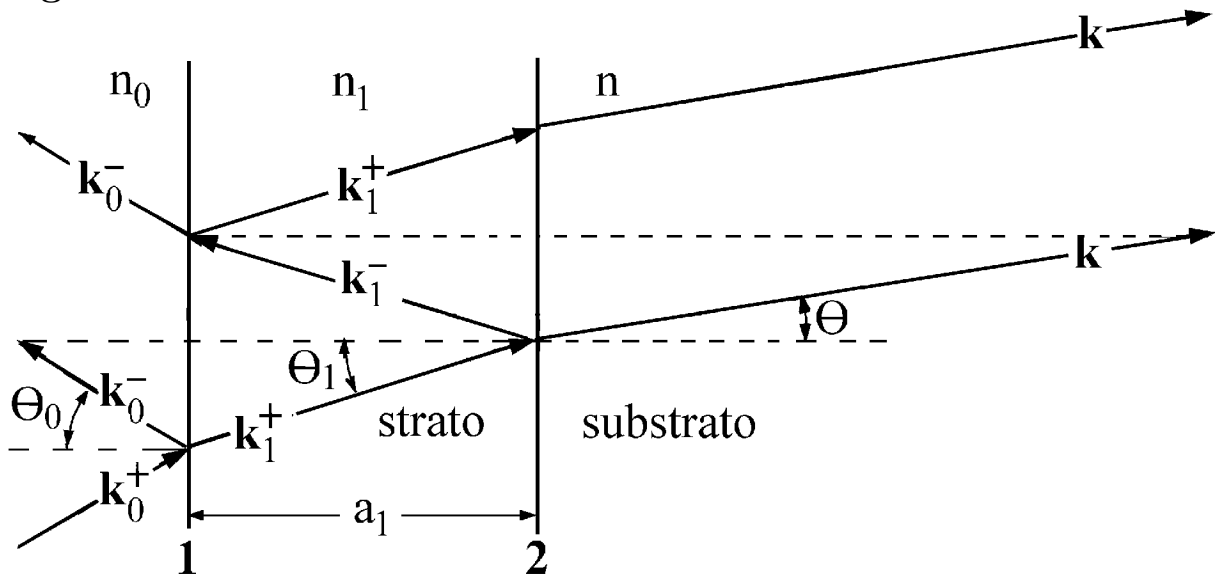


4) Per una lamina di diamante di spessore  $0.1 \text{ mm}$  mostrare che la riflettività ad incidenza normale è nulla per  $\lambda = 0.4 \text{ } \mu\text{m}$  ( $\varphi = 1210\pi$ ), per  $\lambda = 0.40033 \text{ } \mu\text{m}$  ( $\varphi = 1209\pi$ ),.....e per  $\lambda = 0.8 \text{ } \mu\text{m}$  ( $\varphi = 605\pi$ ). Poi pensare che la lamina sia illuminata con luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.4 \text{ } \mu\text{m}$  e mostrare che ha riflettività nulla per  $\theta = 0$  ( $\varphi = 1210\pi$ ), per  $\theta = 2.33^\circ$  ( $\varphi = 1209\pi$ ), per  $\theta = 3.29^\circ$  ( $\varphi = 1208\pi$ ),..... e per  $\theta = 24.39^\circ$  ( $\varphi = 1102\pi$ ).

### 13.4 Strato dielettrico confinato tra dielettrici diversi

Ora, per prepararci allo studio dei dispositivi a multistrati, pensiamo che uno strato dielettrico di indice di rifrazione  $n_1$  e spessore  $a_1$ , a facce piane e parallele, sia interposto tra un materiale seminfinito di indice di rifrazione  $n_0$  ed un **substrato** seminfinito di indice di rifrazione  $n$ , come in figura 11. Rispetto al caso della lamina dielettrica la situazione è diversa perché il

Fig. 13.11



sistema non è simmetrico, ma continua ad essere vero che i vettori d'onda delle onde che si propagano nei tre materiali hanno proiezione sulle interfacce uguali a  $\mathbf{K}_0$ : l'onda riflessa ha vettore d'onda  $(\mathbf{K}_0, -k_0 \cos \theta_0)$ , le due onde che si propagano avanti e indietro nello strato hanno vettori d'onda  $(\mathbf{K}_0, k_1 \cos \theta_1)$  e  $(\mathbf{K}_0, -k_1 \cos \theta_1)$ , mentre l'onda trasmessa al substrato ha vettore d'onda  $(\mathbf{K}_0, k \cos \theta)$ , con  $k_1 = n_1 k_0$ ,  $k = n k_0$  e con angoli  $\theta_1$  e  $\theta$  tali che  $n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 = n \sin \theta$ . Ora indichiamo con  $r_2$  e  $t_2$  i coefficienti di Fresnel dell'interfaccia 2 (piano  $z = a_1$ ), indichiamo con  $E_1^+$  ed  $E_1^-$  le ampiezze dei campi associati alle due onde che viaggiano nello strato e notiamo che sono legate dalla condizione di riflessione

$$E_1^- e^{-i\varphi_1} = r_2 E_1^+ e^{i\varphi_1} \quad \text{dove} \quad \varphi_1 = k_1 a_1 \cos \theta_1 \quad (13.17)$$

Poi indichiamo con  $r_1$  e  $t_1$  i coefficienti di Fresnel dell'interfaccia 1 esterna, con  $-r_1$  e  $t_1'$  quelli dell'interfaccia 1 interna, ricordiamo che  $t_1 t_1' = 1 - r_1^2$ ,

sia nel caso TE, sia nel caso TM, e notiamo che le ampiezze dei campi sull'interfaccia 1 sono legate dalle equazioni

$$E_1^+ = t_1 E_0^+ - r_1 E_1^- \quad , \quad E_0^- = r_1 E_0^+ + t_1' E_1^-$$

Da queste equazioni e dall'equazione 17), si vede che

$$E_1^+ = \frac{t_1 E_0^+}{1 + r_1 r_2 e^{i2\varphi_1}} \quad , \quad E_1^- = \frac{t_1 r_2 e^{i2\varphi_1} E_0^+}{1 + r_1 r_2 e^{i2\varphi_1}} \quad , \quad E_0^- = \left[ r_1 + \frac{t_1' t_1 r_2 e^{i2\varphi_1}}{1 + r_1 r_2 e^{i2\varphi_1}} \right] E_0^+$$

Sostituendo  $t_1 t_1'$  con  $1 - r_1^2$ , possiamo concludere che il **coefficiente di riflessione d'onda del sistema** vale

$$\rho = \frac{E_0^-}{E_0^+} = \frac{r_1 + r_2 e^{i2\varphi_1}}{1 + r_1 r_2 e^{i2\varphi_1}} \quad (13.18)$$

Anche in questo caso conviene introdurre la lunghezza d'onda caratteristica dello strato  $\Lambda_1 = 4n_1 a_1$  e scrivere lo sfasamento nella forma

$$\varphi_1 = \frac{\pi \Lambda_1}{2 \lambda} \cos \theta_1 \quad \text{dove} \quad \Lambda_1 = 4n_1 a_1 \quad (13.19)$$

Infine diciamo che il calcolo del coefficiente di trasmissione d'onda  $\tau$  dello strato non ha molto interesse perché l'onda trasmessa e l'onda incidente si propagano in materiali diversi, quindi il coefficiente di trasmissione di potenza  $\mathcal{T}$  non vale  $\tau\tau^*$ . D'altra parte, calcolato  $\mathcal{R} = \rho\rho^*$ , ed ammesso che non vi sia dissipazione di potenza nello strato, la legge di conservazione dell'energia assicura che  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$ . Più in generale dobbiamo scrivere

$$\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R} - \mathcal{A} \quad (13.20)$$

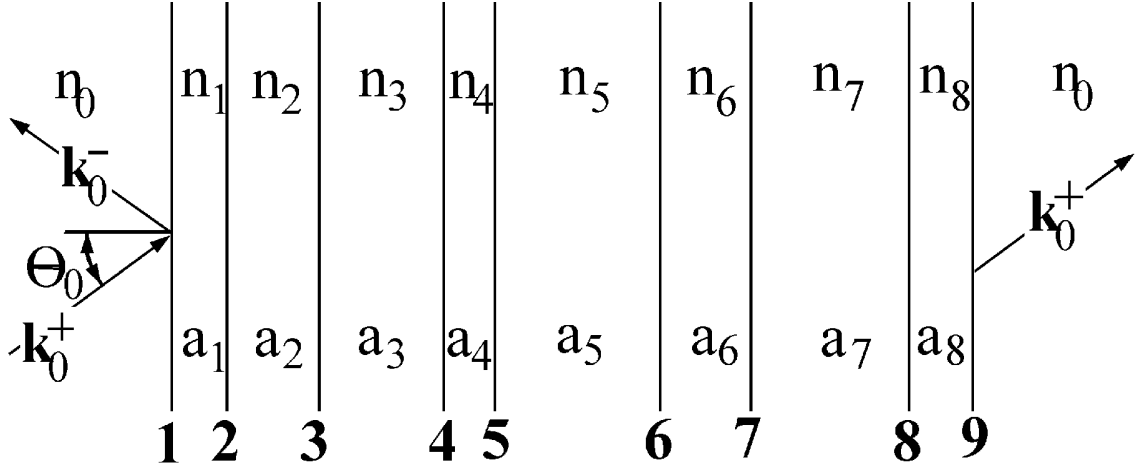
dove  $\mathcal{A}$  è il **coefficiente di assorbimento** dello strato, ovvero la frazione di potenza persa entro lo strato. Aggiungiamo che le moderne tecniche di deposizione degli strati raggiungono gradi di perfezione tali da ridurre  $\mathcal{A}$  a valori dell'ordine di  $10^{-5}$ , quindi l'assorbimento diventa importante solo quando lo strato è attraversato dalla radiazione un gran numero di volte.

## 13.5 Riflettività dei multistrati dielettrici

Molti dispositivi ottici hanno strutture del tipo mostrato in figura 12:  $N$  strati dielettrici a stretto contatto delimitati da  $N + 1$  interfacce piane e parallele. Le interfacce 1 ed  $N + 1$  sono a contatto con uno stesso materiale di indice di rifrazione  $n_0$ , ad esempio aria; lo strato  $j$ -esimo ha indice di rifrazione  $n_j$ , spessore  $a_j$  e lunghezza d'onda caratteristica  $\Lambda_j = 4n_j a_j$ .

Ora pensiamo che un'OPPMPL di lunghezza d'onda  $\lambda$  incida sull'interfaccia 1 con angolo di incidenza  $\theta_0$  e calcoliamo la frazione di potenza riflessa con i seguenti passi.

Fig. 13.12



- Calcoliamo gli angoli  $\theta_j$  negli strati ricordando che  $n_0 \sin \theta_0 = n_j \sin \theta_j$ .
- Scegliamo la condizione di polarizzazione TE oppure TM e calcoliamo i coefficienti di Fresnel sulle  $N + 1$  interfacce per onde che si propagano verso destra. Ad esempio i coefficienti di Fresnel TE sono

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_0)}{\sin(\theta_1 + \theta_0)}, \dots, r_j = \frac{\sin(\theta_j - \theta_{j-1})}{\sin(\theta_j + \theta_{j-1})}, \dots, r_{N+1} = \frac{\sin(\theta_N - \theta_0)}{\sin(\theta_N + \theta_0)}$$

- Calcoliamo lo sfasamento  $\varphi_j$  nell'attraversamento del  $j$ -esimo strato:

$$\varphi_j = \frac{\pi \Lambda_j}{2 \lambda} \cos \theta_j$$

- Indichiamo con  $\rho_j$  il coefficiente di riflessione d'onda del sottosistema a valle della  $j$ -esima interfaccia e notiamo che tale sistema è composto dal  $j$ -esimo strato e dal sottosistema a valle della  $(j + 1)$ -esima interfaccia. Procedendo come abbiamo fatto per ottenere l'equazione 18) è facile convincersi che  $\rho_j$  e  $\rho_{j+1}$  sono legati dalla relazione di ricorrenza

$$\rho_j = \frac{r_j + \rho_{j+1} e^{i2\varphi_j}}{1 + r_j \rho_{j+1} e^{i2\varphi_j}} \quad (13.21)$$

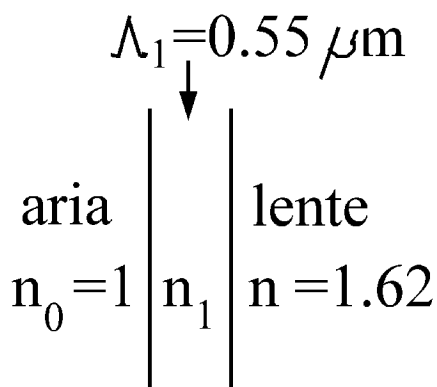
- Teniamo presente che  $\rho_{N+1} = r_{N+1}$ , usiamo l'equazione 21) per calcolare  $\rho_N$ , poi  $\rho_{N-1}, \dots$ , sino a giungere a  $\rho_1$ , infine calcoliamo la riflettività  $\mathcal{R}$  del multistrato prendendo il modulo quadro di  $\rho_1$ . Poi cambiamo lunghezza d'onda o angolo di incidenza e ripetiamo il calcolo.

## 13.6 Ricoprimenti antiriflesso

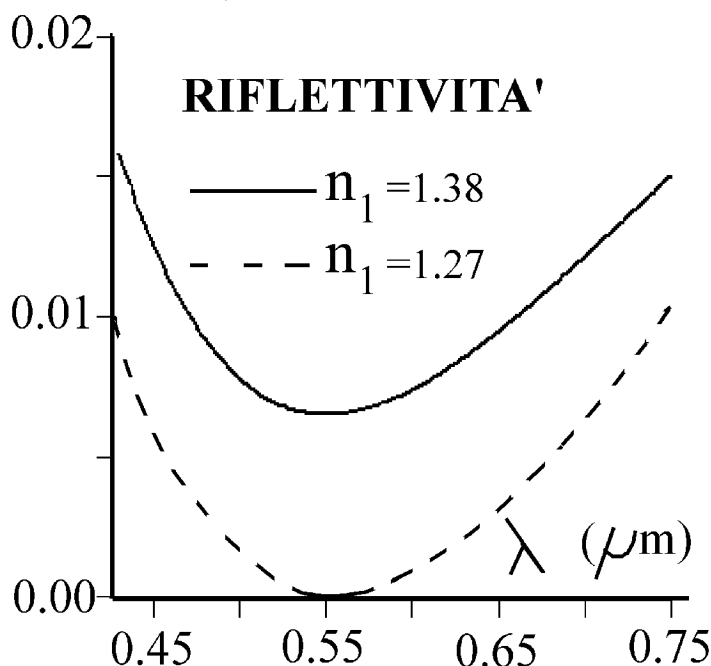
Nel descrivere le lenti abbiamo tacitamente ammesso che le interfacce d'ingresso e d'uscita non riflettano, ma non è così: nelle condizioni parassiali tipiche per le lenti, l'interfaccia di una lente di vetro flint ( $n = 1.62$ ) ha riflettività  $r^2 = (1 - n)^2 / (1 + n)^2 = 0.056$ . Non è grande, ma rende la lente

inadatta per un binocolo militare, ed è inaccettabile per un sistema ottico costituito da molte lenti in serie, come l'obiettivo di una buona fotocamera. Ad esempio la potenza trasmessa da un sistema di dieci lenti (venti interfacce) è la frazione  $(1 - 0.056)^{20} \approx 0.32$  della potenza incidente. Un approccio

**Fig. 13.13 a)**



**b)**



semplice per ridurre la riflettività di una lente nella banda visibile è illustrato in figura 13a): l'interfaccia è ricoperta da uno strato dielettrico di indice di rifrazione  $n_1 = \sqrt{n}$  e lunghezza d'onda caratteristica  $\Lambda_1 \approx 0.55 \mu\text{m}$ . In condizioni parassiali la ricetta  $n_1 = \sqrt{n}$  assicura che  $r_1 = r_2$ , infatti

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n} = r_2$$

La ricetta  $\Lambda_1 = 0.55 \mu\text{m}$  rende nulla la riflettività al centro della banda ottica, infatti l'equazione 18) mostra che  $\rho$  si annulla per  $\varphi = \pi/2$ , ovvero per  $\lambda = \Lambda_1$ . Si noti che  $r_1 r_2$  è piccolo rispetto all'unità e può essere trascurato nel denominatore dell'equazione 18), quindi la riflettività è approssimata da

$$\mathcal{R} = \rho \rho^* = r_1^2 (1 + e^{i2\varphi}) ((1 + e^{-i2\varphi}) = 2r_1^2 [1 + \cos(2\varphi_1)] = 4r_1^2 \cos^2 \varphi_1$$

Come mostrato dalla curva tratteggiata in figura 13b),  $\mathcal{R}$  rimane minore di un centesimo per  $\lambda$  compresa tra  $0.43 \mu\text{m}$  (violetto estremo) e  $0.76 \mu\text{m}$  (rosso estremo). (In tale banda  $\varphi_1$  è compreso tra  $\approx 115^\circ$  e  $\approx 65^\circ$ ).

In realtà la disponibilità di dielettrici con buona resistenza all'abrasione è limitata e la condizione  $n_1 = \sqrt{n}$  non può essere soddisfatta esattamente. Ma basta che  $n_1$  sia ben minore di  $n$  per ottenere buoni risultati. Ad esempio un'interfaccia di vetro flint ricoperta con fluoruro di magnesio ( $n_1 = 1.38$ ) ha coefficienti di Fresnel parassiali

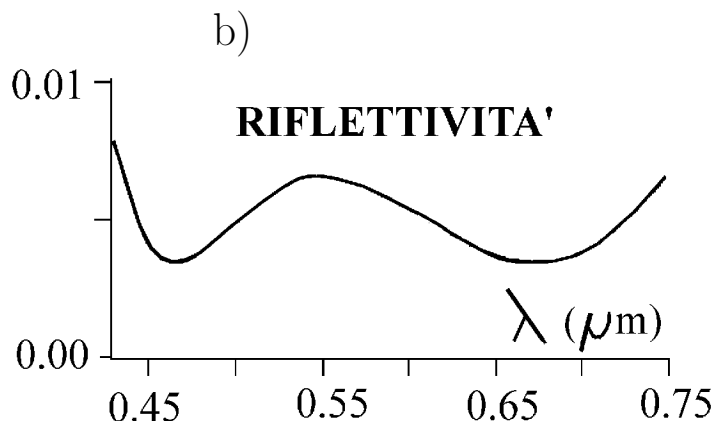
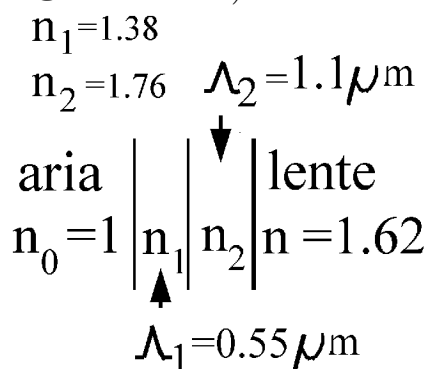
$$r_1 = \frac{1 - 1.38}{1 + 1.38} = -0.160 \quad , \quad r_2 = \frac{1.38 - 1.62}{1.38 + 1.62} = -0.080$$

Sostituendo nell'equazione 18) e prendendo il modulo quadro si vede che

$$\mathcal{R} \approx 0.0064 + 0.0512 \cos^2 \varphi_1$$

Sebbene il ricoprimento non sia ottimale la riflettività rimane minore di 0.016 in tutta la banda visibile, come mostrato dalla curva continua in figura 13b). Questo risultato è soddisfacente per una singola lente, ma origina significative aberrazioni cromatiche in un sistema di dieci lenti: il sistema trasmette le frazioni di potenza  $(1 - 0.0064)^{20} = 0.88$  nel giallo-verde e  $(1 - 0.015)^{20} = 0.74$  nel rosso e nel violetto. Un metodo molto usato per rendere **acromatiche** le

Fig. 13.14: a)



lenti e per ridurre ulteriormente la riflettività consiste nel ricoprirle con due strati dielettrici sovrapposti come in figura 14a). Tra il vetro flint e lo strato di fluoruro di magnesio di lunghezza d'onda caratteristica  $\Lambda_1 = 0.55 \mu\text{m}$  è interposto uno strato di  $\text{Al}_2\text{O}_3$  ( $n_2 = 1.76$ ) di lunghezza d'onda caratteristica  $\Lambda_2 = 2\Lambda_1$ . Procedendo con calcolo numerico come descritto nel paragrafo 5, si vede che la riflettività della lente ricoperta in tal modo differisce poco da 0.005 in tutta la banda visibile, come mostrato in figura 14b).

## ESERCIZI

- 1) Considerare una cella solare al silicio ( $n = 3.5$ ) ricoperta da uno strato di ossido di silicio ( $n = 1.45$ ) di spessore  $95 \text{ nm}$ . Calcolare approssimativamente la frazione dell'energia solare che penetra il silicio.
- 2) Scrivere un programma di calcolo delle riflettività dei multistrati e verificare che i risultati riportati in figura 14b) sono corretti.

## 13.7 Specchi a multistrati dielettrici

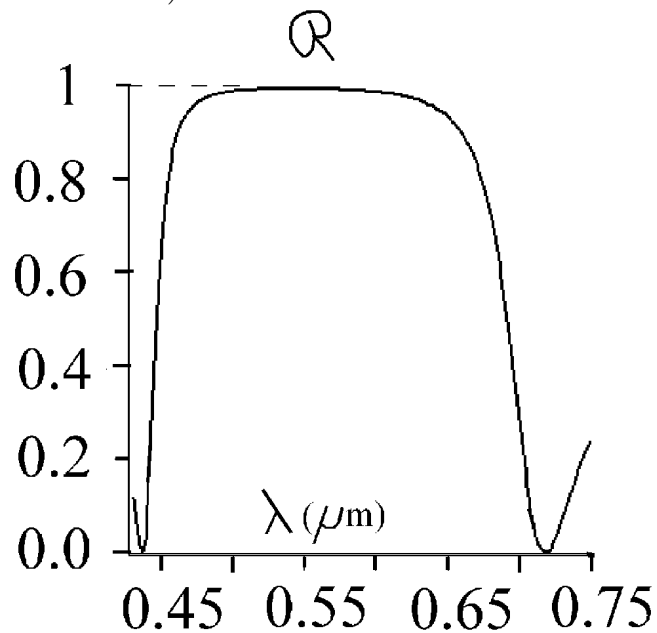
Uno specchio parzialmente riflettente può essere costruito depositando su una lastra di vetro a facce piane e parallele un ricoprimento antiriflesso da una parte ed uno straterello d'alluminio dall'altra. Ad esempio lo spessore del metallo può essere scelto in modo da riflettere il 30% o il 50% o il 98% della potenza incidente, ma in ogni caso alcune parti per cento della potenza incidente vengono assorbite nel metallo per effetto Joule, quindi la potenza

trasmessa risulta ben minore di  $1 - \mathcal{R}$ . Naturalmente uno specchio che assorbe il 2% della potenza incidente non origina problemi nella vita di tutti i giorni, ma quando lo specchio deve riflettere un fascio di radiazione un gran numero di volte, come avviene nelle cavità ottiche dei lasers, l'assorbimento del 2% in ogni riflessione è inaccettabile: dopo 100 riflessioni la potenza è ridotta alla frazione  $(1 - 0.02)^{100} = 0.13$  di quella iniziale. Per tale ragione negli specchi usati in molti strumenti ottici moderni lo strato metallico è sostituito da un pacchetto di strati dielettrici del tipo mostrato in figura 15a): strati di indice di rifrazione  $n_1$  alto sono alternati a strati di indice di rifrazione  $n_2$  basso. Ad esempio gli strati estremi possono essere di solfuro di

**Fig. 13.15:** a)

$n_1 = 2.3$	$a_1 = 0.06 \mu\text{m}$
$n_2 = 1.3$	$a_2 = 0.106 \mu\text{m}$
$n_1$	$a_1$
$n_2$	$a_2$
$n_1$	$a_1$
$n_2$	$a_2$
$n_1$	$a_1$
$n_2$	$a_2$
$n_1$	$a_1$
$n_2$	$a_2$
$n_1$	$a_1$

b)



zinco ( $n_1 = 2.3$ ) e gli strati intermedi di criolite ( $n_2 = 1.3$ ). Tutti gli strati hanno la stessa lunghezza d'onda caratteristica, ad esempio  $\Lambda = 0.55 \mu\text{m}$ . In tal caso lo spessore complessivo del pacchetto di undici strati considerato in figura vale  $6a_1 + 5a_2 = (\Lambda/4)(6/n_1 + 5/n_2) \approx 0.89 \mu\text{m}$ , dunque l'intero pacchetto è molto più sottile di un foglio di carta velina e deve essere supportato, ad esempio da una lastra di vetro. Ma qui, per semplicità, dimentichiamo il substrato, riservandoci di tenerne conto con calcolo numerico. Per capire il principio di funzionamento di un tale specchio osserviamo quanto segue.

- Le interfacce sono alternativamente in salita e in discesa.
- In condizioni di incidenza parassiali con  $\lambda = \Lambda$  i voli di andata e ritorno entro uno strato comportano sfasamenti di  $\pi$ , ma due interfacce contigue hanno coefficienti di riflessione d'onda opposti, quindi tutte le interfacce contribuiscono in fase al campo riflesso.
- Possiamo aspettarci che, per  $\lambda = \Lambda$ , la riflettività tenda all'unità all'aumentare del numero di strati.

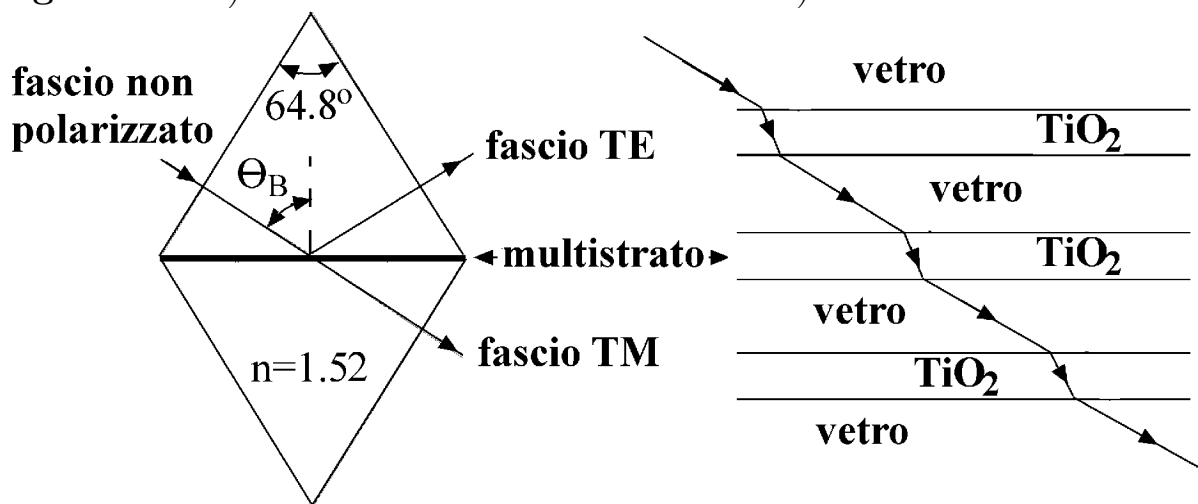
In realtà i risultati del calcolo numerico riportati in figura 15b) mostrano

che il multistrato considerato ha riflettività massima 0.996 e conserva alta riflettività in buona parte della banda visibile.

### 13.8 Polarizzatore a multistrati dielettrici

Cominciamo a pensare che una lamina di diamante di spessore  $0.06 \mu m$  sia investita all'angolo di Brewster  $\theta_B = 67.55^\circ$  da un'OPPM di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu m$ . In tal caso l'angolo  $\theta$  vale  $22.45^\circ$  e lo sfasamento nell'attraversamento dello strato risulta  $\varphi = (2\pi/\lambda)na \cos \theta \approx \pi/2$ , quindi la riflettività TE vale 0.89 (si veda la tabella a pag. 232). Ora pensiamo che l'OPPM incidente sia la sovrapposizione di due OPPMPL di ugual intensità  $\mathcal{I}$ , una polarizzata TE, l'altra TM. In tal caso **il fascio riflesso è perfettamente polarizzato TE** e ha intensità  $0.89\mathcal{I}$ , mentre il fascio trasmesso è la sovrapposizione di un'onda TE di intensità  $0.11\mathcal{I}$  e di un'onda TM di intensità  $\mathcal{I}$ . Ma la situazione si complica quando teniamo conto che una lamina tanto sottile deve essere depositata su un substrato. In tal caso l'angolo di propagazione nel substrato risulta minore dell'angolo di incidenza  $\theta_0$ , quindi la condizione di Brewster non può essere soddisfatta su entrambe le interfacce. Per superare questa difficoltà e per polarizzare (quasi) perfettamente anche il fascio riflesso, possiamo procedere come mostrato in figura 16a) e nel suo fortissimo ingrandimento 16b).

Fig. 13.16: a)



b)

sceli di vetro ( $n_0 = 1.52$ ) viene inserito un multistrato costituito da strati di ossido di titanio ( $n_1 = 2.4$ ) di spessore  $a_1 = 0.066 \mu m$ , alternati a strati di vetro ( $n_2 = 1.52$ ) di spessore  $a_2 = a_1(n_1/n_2)^2 \approx 0.165 \mu m$ . Per semplicità pensiamo che le facce esterne dei prismi siano rese perfettamente antiriflettenti. Gli angoli alle basi dei prismi sono scelti uguali all'angolo di Brewster nel passaggio dal vetro all'ossido di titanio,  $\theta_B = \arctan(n_1/n_2) \approx 57.6^\circ$ , quindi un fascio di radiazione parallela incidente normalmente sulla faccia esterna di un prisma attraversa tutti gli strati in condizioni di Brewster, con

$\theta_1 = 90^\circ - \theta_B$  negli strati di ossido di titanio e con  $\theta_2 = \theta_B$  negli strati di vetro. La scelta  $a_2 = a_1(n_1/n_2)^2$  assicura che gli sfasamenti nei vari strati sono uguali, infatti la condizione  $n_1 a_1 \cos(90 - \theta_B) = n_2 a_2 \cos \theta_B$  conduce a

$$a_2 = a_1 \frac{n_1}{n_2} \tan \theta_B = a_1 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2$$

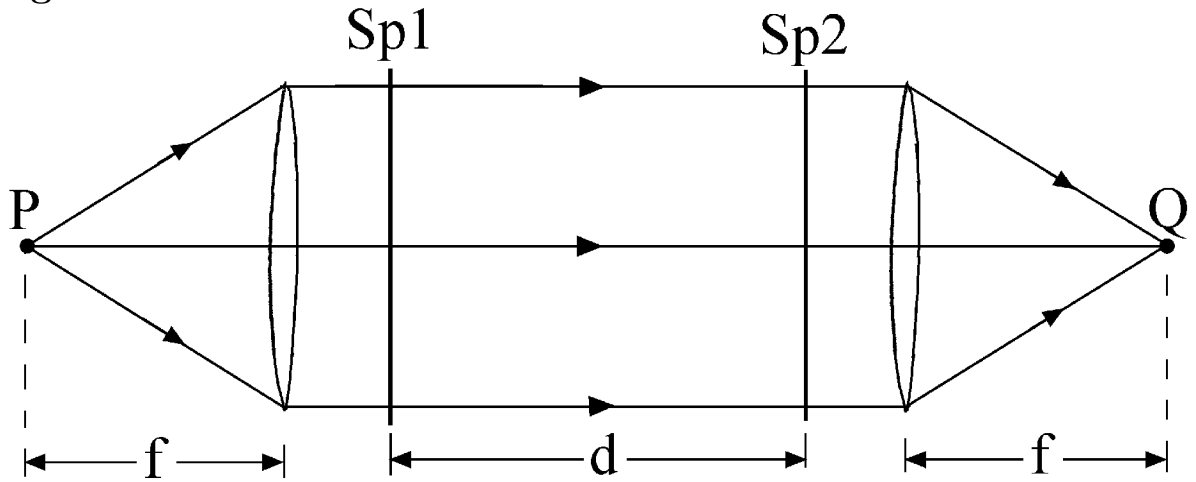
Il valore di  $a_1$  è scelto in modo che gli sfasamenti  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  valgano  $\pi/2$  proprio per  $\lambda = 0.55 \mu m$ , quindi possiamo aspettarci che la riflettività TE sia massima al centro della banda visibile. I calcoli eseguiti con il metodo esposto nel paragrafo 5 per un multistrato con sei strati di ossido di titanio alternati a cinque strati di vetro confermano pienamente le previsioni: la riflettività TE raggiunge 0.9999 al centro della banda visibile e rimane maggiore di 0.999 per  $\lambda$  compreso tra  $0.45 \mu m$  e  $0.7 \mu m$ . In tale banda il sistema è un polarizzatore quasi perfetto: scompone il fascio incidente in un fascio riflesso perfettamente polarizzato TE ed in un fascio trasmesso quasi perfettamente polarizzato TM.

### 13.9 Spettrometro di Fabry-Perot

Con riferimento alla figura 17, pensiamo di eseguire il seguente esperimento. Su un banco ottico molto stabile disponiamo due lenti acromatiche identiche di grande apertura a distanza di una cinquantina di centimetri. Nel fuoco della prima lente poniamo una sorgente (quasi) puntiforme che emetta radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$ , nel fuoco della seconda lente poniamo un rivelatore (quasi) puntiforme. In tali condizioni tra le due lenti si propaga un'onda elettromagnetica ben approssimata da un'OPPM. Allineiamo il sistema in modo che il rivelatore misuri potenza massima ed indichiamo con  $W$  tale potenza. Poi prendiamo un specchio piano di apertura maggiore di quella delle lenti, ad esempio con  $\mathcal{R} = 0.99$ ,  $\mathcal{T} = 0.0099$  ed  $\mathcal{A} = 0.0001$ , e lo inseriamo tra le lenti, avendo cura che risulti ben stabile, ma senza preoccuparci di disporlo perfettamente perpendicolare all'asse ottico, può essere inclinato di un piccolo angolo  $\theta$ , ad esempio  $1^\circ$ . Con l'inserimento dello specchio la potenza misurata dal rivelatore crolla a  $\mathcal{T}W$ , meno di un centesimo di quella iniziale. A questo punto prendiamo uno specchio identico al precedente, lo montiamo su un supporto che consenta di orientarlo perfettamente parallelo al primo specchio e di traslarlo, con accuratezza nanometrica, in modo da far variare la distanza  $d$  tra l'interfaccia d'uscita del primo specchio e l'interfaccia d'ingresso del secondo. Se ragionassimo senza tener conto dell'interferenza potremmo credere che, qualunque sia  $d$ , la potenza sul rivelatore sia ulteriormente ridotta di un fattore 100. Ma l'interferenza gioca un ruolo spettacolare: per particolari valori di  $d$  quasi tutto va come se il secondo specchio ordinasse al primo di non riflettere e non riflettesse esso stesso.



Fig. 13.17



Precisamente la potenza che raggiunge il rivelatore dipende dalla distanza  $d$  come segue

$$W(d) = W \left[ \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T} + \mathcal{A}} \right]^2 \frac{1}{1 + [F \sin \varphi]^2} \quad \text{dove } \varphi = kd \cos \theta \quad \text{e} \quad F = \frac{2\sqrt{\mathcal{R}}}{1 - \mathcal{R}} \quad (13.22)$$

Si noti che il coefficiente di trasmissione di potenza è simile a quello della lamina dielettrica studiata nel paragrafo 3. Ne differisce perché la funzione di Airy è moltiplicata per il fattore di attenuazione  $\mathcal{T}^2/(\mathcal{T} + \mathcal{A})^2$  e soprattutto perché la finezza  $F$  può essere molto grande. Ad esempio con specchi caratterizzati dai valori di  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{A}$  dati sopra, il fattore di attenuazione vale 0.98 e gioca un ruolo marginale, ma la finezza  $F \approx 199$  risulta quasi 200 volte maggiore di quella di una lamina di diamante. In tal caso la funzione di Airy presenta picchi strettissimi; in figura 10 sarebbero quasi indistinguibili da righe verticali.

Per giustificare le equazioni 22) potremmo usare il metodo di calcolo descritto nel paragrafo 5. Dovremmo precisare gli spessori e gli indici di rifrazione di tutti gli strati che compongono i due specchi, lo spessore dello strato vuoto e dovremmo procedere come se il sistema fosse un unico multistrato investito con angolo di incidenza  $\theta$  molto piccolo. Ma preferiamo procedere con approccio analitico considerando l'onda incidente, l'onda riflessa, le due onde che si propagano avanti e indietro tra i due specchi e l'onda trasmessa. Scegliamo l'asse  $z$  normale agli specchi, con origine sullo specchio 1, indichiamo con  $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{K}, k \cos \theta)$  il vettore d'onda incidente e notiamo che il vettore d'onda progressivo tra i due specchi ed il vettore d'onda trasmesso sono uguali a quello incidente. E poiché gli specchi sono paralleli, il vettore d'onda regressivo tra i due specchi ed il vettore d'onda riflesso sono  $(\mathbf{K}, -k \cos \theta)$ . Poi scriviamo i campi elettrici delle cinque onde che si propagano nel vuoto omettendo il fattore comune  $e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} - \omega t)}$ :

$$E^+ e^{ikz \cos \theta} \quad , \quad E^- e^{-ikz \cos \theta} \quad , \quad E_1^+ e^{ikz \cos \theta} \quad , \quad E_1^- e^{-ikz \cos \theta} \quad , \quad E_t e^{ikz \cos \theta}$$

A questo punto dobbiamo tener conto delle relazioni di riflessione e tra-

smissione sui due specchi. Allo scopo indichiamo con  $\rho$  e  $\tau$  i coefficienti di riflessione e trasmissione d'onda su uno specchio e teniamo presente che  $\rho = -\sqrt{\mathcal{R}}$ , perché sull'interfaccia di ingresso dello specchio il campo riflesso è in opposizione di fase con il campo incidente. Per quanto riguarda  $\tau$  non poniamo condizioni sulla fase, limitandoci a porre  $\tau\tau^* = \mathcal{T} = 1 - \mathcal{R} - \mathcal{A}$ . Di conseguenza i campi interni risultano legati tra loro, al campo incidente ed al campo trasmesso dalle relazioni

$$E_1^+ = \tau E^+ + \rho E_1^- \quad , \quad E_1^- e^{-ikd \cos \theta} = \rho E_1^+ e^{ikd \cos \theta} \quad , \quad E_t e^{ikz \cos \theta} = \tau E_1^+ e^{ikz \cos \theta}$$

Ricavando  $E_1^+$  dalle prime due, ricordando che  $\rho^2 = \mathcal{R}$  e sostituendo nella terza si ottiene

$$E_1^+ = \frac{\tau E^+}{1 - \mathcal{R} e^{i2kd \cos \theta}} \quad , \quad E_t = \frac{\tau^2 E^+}{1 - \mathcal{R} e^{i2kd \cos \theta}}$$

Infine, prendendo il modulo quadro di  $E_t$ , ponendo  $\varphi = kd \cos \theta$  e ricordando che  $1 - \mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{A}$ , otteniamo i risultati anticipati con le equazioni 22), infatti

$$E_t E_t^* = \frac{\tau^2 (\tau^*)^2 E^+ E^{+*}}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R} \cos(2\varphi)} = \frac{\mathcal{T}^2 E^+ E^{+*}}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2 \varphi} = \frac{\mathcal{T}^2}{(\mathcal{T} + \mathcal{A})^2} \frac{E^+ E^{+*}}{1 + F^2 \sin^2 \varphi}$$

Il sistema descritto è uno strumento molto importante: lo **spettrometro di Fabry-Perot (FP)**. Le sue caratteristiche sono le seguenti.

- Per  $\theta = 0$  e per un dato valore di  $d$  la funzione di trasmissione è periodica in  $k$  con periodo

$$FSR = \frac{\pi}{d} \quad (13.23)$$

Il simbolo FSR (**Free Spectral Range**) indica la larghezza delle bande di  $k$  "libere" da picchi di trasmissione.

- Per  $\theta = 0$  i picchi di trasmissione hanno larghezza di Rayleigh

$$\Delta k = \frac{2.42}{Fd} \quad (13.24)$$

Infatti l'equazione  $1/[1+(F \sin \varphi)^2] = 0.405$  è soddisfatta per  $\sin \varphi = \pm 1.21/F$ , ovvero per  $kd = N\pi \pm 1.21/F$ .  $\Delta k$  è il **potere risolutivo** del FP.

- Per radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$ , incidente normalmente sugli specchi, la funzione di trasmissione prende valori massimi quasi unitari per

$$d = d_N = N \frac{\lambda}{2} \quad \text{con } N \text{ intero} \quad (13.25)$$

e prende valori minimi  $1/(1 + F^2)$  per valori di  $d$  che differiscono da  $d_N$  di  $\pm \lambda/4$ . Insomma, per la radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$  lo spettrometro FP è un filtro passante quando  $d$  soddisfa l'equazione 25), e diventa un buon filtro di reiezione quando  $d = d_N \pm \lambda/4$ .

Lo spettrometro FP, a causa della sua funzione di trasmissione periodica, non è adatto a misurare distribuzioni spettrali su larga banda, ma manifesta pregi straordinari quando la radiazione ha larghezza di banda minore del FSR. In tal caso, facendo variare la distanza  $d$  tra gli specchi mediante distanziatori piezoelettrici, il rivelatore misura la potenza spettrale della radiazione con risoluzione elevatissima. Ad esempio, uno spettrometro FP con specchi di finezza  $10^4$  separati da una distanza  $d$  variabile intorno a  $24\text{ cm}$  ha potere risolutivo  $\Delta k \approx 10^{-3}\text{ m}^{-1}$ . In tal caso la risoluzione spettrale  $k/\Delta k$ , valutata per luce rossa ( $k \approx 10^7\text{ m}^{-1}$ ), è dell'ordine di  $10^{10}$ . In realtà, le risoluzioni spettrali sono un po' ridotte dalle rugosità degli specchi e dalle dimensioni finite dei diaframmi d'ingresso e d'uscita necessari per rendere la sorgente ed il rivelatore quasi puntiformi, comunque la risoluzione di un buon spettrometro FP supera quelle dei migliori spettrometri a reticoli di alcuni ordini di grandezza.

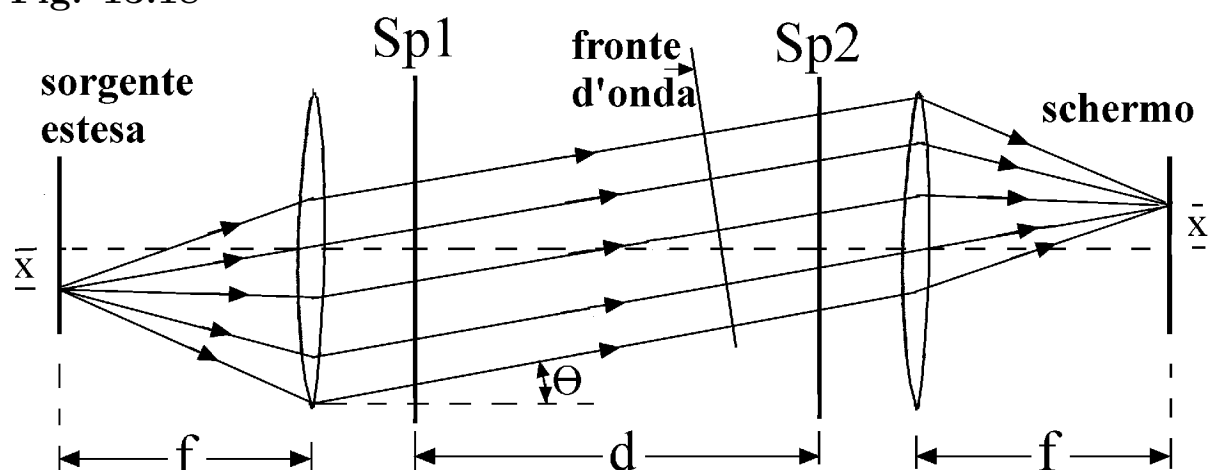
### ESERCIZI

1) Considerare l'onda progressiva tra gli specchi di un FP e mostrare che: a) ha intensità molto maggiore di quella trasmessa, b) può avere intensità molto maggiore o anche molto minore di quella incidente. c) Poi trascurare  $\mathcal{A}$  e calcolare il rapporto tra la densità di energia tra i due specchi e la densità di energia esterna in condizioni di massima trasmissione.

## 13.10 Interferometro FP, filtri interferenziali

L'interferometro FP, schematizzato in figura 18, differisce dallo spettrometro FP perché ha specchi fissi e non ha diaframmi d'ingresso e d'uscita. La

Fig. 13.18

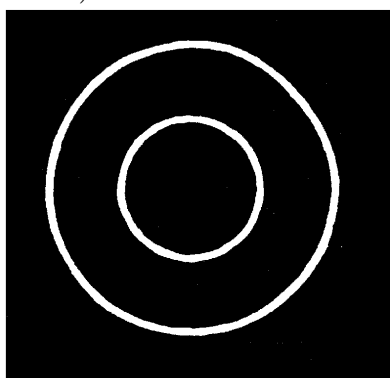


radiazione in ingresso proviene da una sorgente estesa posta nel piano focale della prima lente e la radiazione in uscita è analizzata mediante una lastra fotografica oppure una matrice planare di rivelatori posta nel piano focale della seconda lente. La radiazione proveniente dal punto della sorgente posto sull'asse dell'interferometro, ammesso che sia trasmessa, viene focalizzata

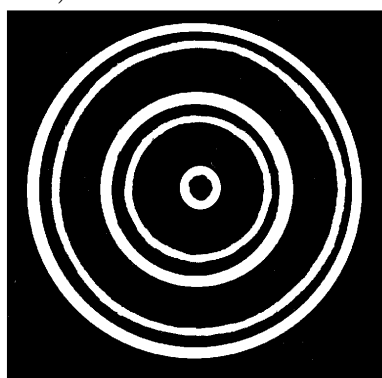
sull'asse ottico, mentre quella proveniente da un punto della sorgente posto a distanza  $x$  dall'asse ottico, ammesso che sia trasmessa, viene focalizzata alla stessa distanza dall'asse ottico dopo aver attraversato l'interferometro con angolo di incidenza sugli specchi  $\theta = x/f$ , dove  $f$  è la distanza focale comune alle due lenti. Ad esempio, con  $f = 50 \text{ cm}$ , i bordi di un disco sorgente di diametro  $1 \text{ cm}$  emettono radiazione che si propaga tra gli specchi con angolo  $\theta$  di circa mezzo grado. Si noti che il coseno di  $\theta$  è quasi unitario, ma il coefficiente di trasmissione di potenza può variare molto anche per piccoli disassamenti. Ad esempio per  $kd \approx 10^5$  la differenza tra  $kd \cos \theta$  e  $kd$  vale  $\pi$  già per un angolo  $\theta$  minore di  $0.5^\circ$ .

Nel caso ideale che la sorgente sia monocromatica con  $k = k_0$  lo schermo è illuminato come in figura 19a). Gli anelli luminosi, detti **frange d'in-**

**Fig. 13.19:** a)



b)



**terferenza**, corrispondono ad anelli di sorgente con raggi uguali a quelli delle frange, anelli che vengono visti in condizione di massima trasmissione. Indicati con  $x_0, x_1, \dots$  i raggi delle frange possiamo scrivere

$$k_0 d \cos(x_0/f) = N\pi \quad , \quad k_0 d \cos(x_1/f) = (N - 1)\pi$$

dove  $N$  è un numero intero molto grande e non ben conosciuto. Ad esempio per radiazione rossa e per  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $N$  può essere un qualunque numero intero non molto diverso da 100000. Per tale ragione le frange mostrate in figura 19a) dicono solo che la sorgente è ben monocromatica, perché sono sottili, ma non consentono di misurare  $k_0$  con buona accuratezza. I meriti dello strumento emergono quando immergiamo la sorgente in un campo magnetostatico o elettrostatico, oppure quando la sottoponiamo a pressione, o ad altre perturbazioni, e vogliamo studiare l'effetto della perturbazione su una particolare riga di emissione atomica. In tal caso basta accendere la perturbazione gradualmente ed osservare gli spostamenti delle frange. Ad esempio quando la prima frangia si sposta verso l'esterno ed una nuova frangia appare all'interno spostandosi sino a ripristinare la situazione iniziale possiamo dire che la frangia di ordine  $N + 1$  ha sostituito quella di ordine  $N$ . Ciò avviene per un valore di  $k$ , diciamo  $k_1$ , tale che

$$k_1 d \cos(x_0/f) = (N + 1)\pi$$

Sottraendo da questa relazione la relazione  $k_0 d \cos(x_0/f) = N\pi$  vediamo che

$$k_1 - k_0 = \frac{\pi}{d \cos(x_0/f)} \approx \frac{\pi}{d}$$

Ciò fornisce una calibrazione che consente di procedere a misure estremamente accurate con semplicità, persino guardando le frange sullo schermo ad occhio nudo come facevano i pionieri. Infatti **quando una frangia si sposta verso l'esterno di una frazione  $X$  della distanza dalla frangia contigua, il valore di  $k$  passa dal valore iniziale  $k_0$  al valore**

$$k = k_0 + X \frac{\pi}{d}$$

Infine pensiamo che tra le frange principali appaiano frange secondarie come mostrato in figura 19b). In tal caso si deve arguire che **la sorgente emette radiazione anche con  $k$  diverso da  $k_0$** . Indicato con  $Y$  il rapporto tra la distanza di una frangia secondaria dalla frangia principale interna e la distanza delle due frange principali a cavallo della secondaria, possiamo concludere che gli anelli secondari sono dovuti a radiazione con

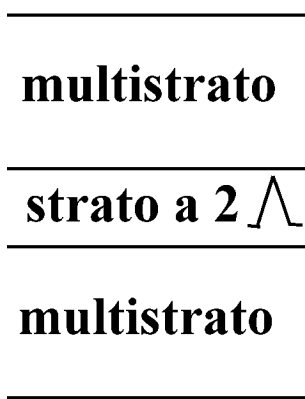
$$k = k_0 + Y \frac{\pi}{d}$$

Aggiungiamo che molti interferometri FP sono costituiti da due specchi a multistrato di lunghezza d'onda caratteristica  $\Lambda$  costruiti sulle due facce parallele di una lastra di indice di rifrazione  $n$  e spessore grandissimo rispetto a  $\Lambda$ , dell'ordine di alcuni centimetri. In tal caso le equazioni 22) continuano a valere con  $\varphi$  sostituito da  $nkd \cos \theta$ . Di conseguenza il FSR e la risoluzione di Rayleigh sono ridotte di un fattore  $n$  rispetto a quelle di uno interferometro FP con regione interna vuota, precisamente

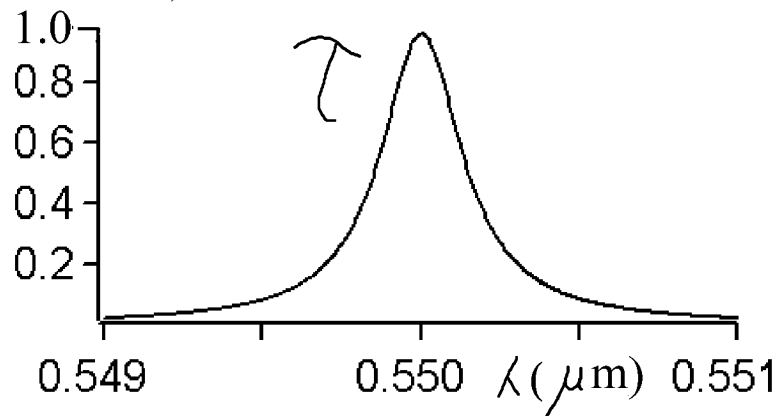
$$FSR = \frac{\pi}{nd} \quad , \quad \Delta k = \frac{2.42}{Fnd} \quad (13.26)$$

Passiamo a considerare i filtri interferenziali sottili. Il loro principio di funzionamento differisce da quello degli interferometri FP solo per un particolare: lo spessore ottico dello strato che separa i due specchi a multistrato è il doppio di quello degli strati che formano gli specchi. Se fosse proprio uguale i due specchi formerebbero un unico specchio e la riflettività sarebbe ancor maggiore di quella del singolo specchio. Ma quando lo spessore ottico centrale vale  $\Lambda/2$ , anziché  $\Lambda/4$  e la lunghezza d'onda incidente è proprio uguale a  $\Lambda$ , i due specchi riflettono in antifase e possiamo aspettarci che il sistema abbia funzione di trasmissione massima, proprio come un FP con  $d$  multiplo di  $\lambda/2$ . Ad esempio pensiamo che due specchi come quello descritto nel paragrafo 7 siano separati da uno strato di criolite di lunghezza d'onda caratteristica  $1.1 \mu m$ , doppia di quella degli specchi, come schematizzato in figura 20a). La funzione di trasmissione di tale sistema, ottenuta con

Fig. 13.20: a)



b)



calcolo numerico è mostrata in figura 20b). Il valore di picco è unitario, a conferma che i due multistrati riflettono in antifase con ugual ampiezza per  $\lambda = 0.55 \mu m$ , ma la larghezza di banda in  $\lambda$  del picco di trasmissione risulta molto piccola, intorno a  $\Delta\lambda = 0.5 nm$ .

### 13.11 Interferometri di Michelson e di Sagnac

L'interferometro di Michelson è schematizzato in figura 21: un fascio parallelo di radiazione monocromatica incide su uno specchio semitrasparente con angolo di incidenza di  $45^\circ$  e viene diviso in due fasci di ugual intensità. I due fasci si propagano lungo due bracci ortogonali di lunghezza  $l$  sino a due specchi che li riflettono su se stessi. Al ritorno sullo specchio semitrasparente i due fasci originano quattro fasci; due interferiscono propagandosi verso la sorgente, gli altri due interferiscono propagandosi verso l'oculare. Se tutto fosse perfetto l'oculare potrebbe essere reso pienamente illuminato o totalmente oscuro variando la lunghezza di un braccio non più di  $\lambda/4$ . Ma in realtà gli specchi non sono mai perfettamente allineati e piani, quindi nell'oculare oscuro appaiono frange illuminate e nell'oculare illuminato appaiono frange oscure, come mostrato nell'inserito.

Fig. 13.21

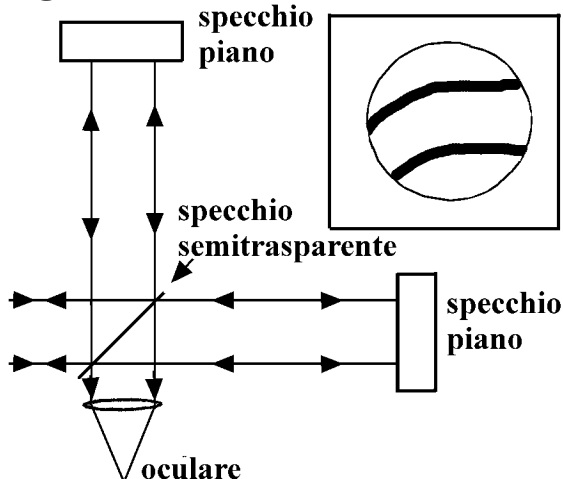
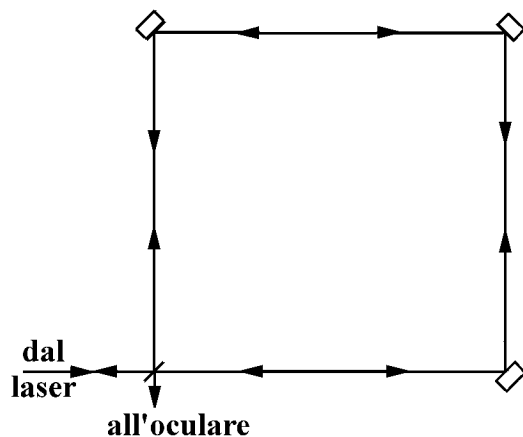


Fig. 13.22



Ora, chiamoci nei panni di uno scienziato ottocentesco: pensiamo che la velocità della luce sia isotropa in un sistema di riferimento fisso rispetto al Sole, e pensiamo che nel nostro laboratorio valga  $c$  nella direzione perpendicolare all'orbita terrestre, ma valga  $c - v$  nel verso della velocità di rivoluzione terrestre e  $c + v$  nel verso opposto. Per verificare che sia davvero così orientiamo un interferometro di Michelson con un braccio perpendicolare all'orbita terrestre e l'altro parallelo alla velocità di rivoluzione. In tal caso, se la nostra ipotesi fosse fondata, il tempo di percorso avanti-indietro dei fronti d'onda nel primo braccio varrebbe  $2l/c$ , mentre quello nel secondo risulterebbe  $l/(c - v) + l/(c + v) = 2lc/(c^2 - v^2)$ , quindi i due tempi differirebbero di  $\Delta t = (2l/c)v^2/(c^2 - v^2) \approx 2lv^2/c^3$ , con la conseguenza che i fasci che percorrono i due bracci raggiungerebbero l'oculare sfasati l'uno rispetto all'altro di  $\Delta\varphi = \omega\Delta t \approx 2lkv^2/c^2$ . Prendendo una fotografia delle frange e confrontandola con una fotografia presa con spettrometro ruotato di  $45^\circ$  nel piano dei bracci dovremmo trovare che le frange delle due fotografie sono spostate le une dalle altre. Indicato con  $X$  il rapporto tra lo spostamento delle frange e la distanza tra due frange contigue, il corrispondente sfasamento vale  $\Delta\varphi = 2\pi X$ , e la velocità che origina tale sfasamento risulta

$$v = \sqrt{\frac{c^2\Delta\varphi}{2lk}} = c\sqrt{\frac{2\pi X}{2lk}} = c\sqrt{\frac{\lambda X}{2l}} \quad (13.28)$$

Ad esempio se usassimo un'interferometro di Michelson con bracci di lunghezza  $l = 1 \text{ m}$  e con radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.54 \text{ }\mu\text{m}$ , e misurassimo  $X = 0.1 \pm 0.1$ , potremmo concludere solo che  $v$  è compresa tra 0 e  $70 \text{ km/s}$  e non saremmo affatto in grado di smentire l'ipotesi che la velocità della luce dipenda dal verso di rivoluzione. Anzi, poiché la velocità di rivoluzione terrestre vale  $30 \text{ Km/s}$ , la nostra misura potrebbe essere interpretata come un indizio che la velocità della luce è anisotropa nel sistema di riferimento terrestre.

In realtà, con l'uso di luce laser, di specchi a multistrati, di rivelatori a matrici con alta risoluzione spaziale e di bracci lunghi decine di metri, gli spettrometri di Michelson hanno raggiunto sensibilità di poche decine di metri al secondo, ma non hanno mai mostrato significativi spostamenti delle frange dovuti al moto di rivoluzione terrestre.

Passiamo a descrivere una versione semplice dell'interferometro di Sagnac. Come mostrato in figura 22, uno specchio piano semitrasparente e tre specchi piani sono disposti in modo che un sottile fascio parallelo di radiazione monocromatica di frequenza  $\omega$  descriva un quadrato di area  $A = l^2$  nei due versi di circolazione. A causa delle imperfezioni degli specchi le due onde che raggiungono l'oculare originano frange di interferenza la cui posizione dipende dalle velocità di propagazione della radiazione nei due versi di circolazione. Naturalmente in un sistema di riferimento inerziale le due velocità

sono uguali a  $c$ , ma quando l'interferometro è montato su una piattaforma rotante con velocità angolare  $\Omega$ , le velocità di propagazione dei fronti d'onda nei due versi di circolazione hanno componenti parallele ai lati  $c - \Omega l/2$  e  $c + \Omega l/2$ , quindi uno dei fasci raggiunge l'oculare in ritardo rispetto all'altro di

$$\Delta t = \frac{4l}{c - \Omega l/2} - \frac{4l}{c + \Omega l/2} = \frac{4l^2\Omega}{c^2 - \Omega^2 l^2/4} \approx \frac{4A\Omega}{c^2}$$

Pertanto i due fasci raggiungono l'oculare sfasati di  $\Delta\varphi = \omega\Delta t = 4A\omega\Omega/c^2$ . Anche in questo caso, indichiamo con  $X$  il rapporto tra lo spostamento delle frange e la distanza tra due frange contigue, quindi scriviamo  $\Delta\varphi = 2\pi X$ . Pertanto la misura di  $X$  determina la velocità angolare di rotazione della piattaforma

$$\Omega = \frac{2\pi X c^2}{4A\omega} = \frac{X c \lambda}{4A}$$

Ad esempio, con un'interferometro di Sagnac di area  $A = 1 \text{ m}^2$  alimentato da radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.54 \text{ }\mu\text{m}$ , la misura  $X = 0.5 \pm 0.01$  conduce a  $\Omega = (20.25 \pm 0.4) \text{ s}^{-1}$ .

Per prevenire un possibile equivoco aggiungiamo che i due fasci interagiscono con specchi in moto, quindi la legge di conservazione della frequenza in riflessione non è adeguata. Ma il calcolo che abbiamo fatto rimane valido, infatti i tempi di percorso dei fronti d'onda nei due versi non dipendono dalle frequenze ed è sempre vero che  $\Delta t = 4A\Omega/c^2$ , ed è anche vero che  $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ , dove  $\omega$  è la frequenza comune ai due fasci che viaggiano verso l'oculare.

## ESERCIZI

1) Pensare che la Terra (sferica) sia avvolta da un involucro distante  $1 \text{ km}$  dal suolo e che le superfici della Terra e dell'involucro siano perfettamente riflettenti. Quali tempi impiega un lampo di luce emesso isotropicamente da un faro equatoriale a tornare al faro provenendo da est, da ovest e da nord?



# Capitolo 14

## Elettromagnetismo e spazio-tempo

Finora abbiamo descritto i fenomeni pensando che lo spazio sia euclideo e che il tempo sia misurato con orologi a riposo: abbiamo scelto una terna di assi cartesiani ortogonali fissi nel nostro sistema inerziale e, implicitamente, abbiamo dotato ciascun punto dello spazio di un ideale orologio, ammettendo che l'orologio centrato in  $\mathbf{r}$  segni il tempo  $t + r/c$  quando viene raggiunto da un lampo di luce emesso nell'origine al tempo  $t$ . **Ora non dobbiamo cambiare visione**, la teoria della relatività ristretta non lo richiede, né richiede modifiche alle leggi dell'elettromagnetismo. Per metterlo ben in evidenza dedichiamo i primi paragrafi di questo capitolo allo studio dei fenomeni elettromagnetici con l'approccio dei radaristi e degli astronomi: rimanendo ben fermi nel nostro sistema di riferimento inerziale, ma pensando di essere distribuiti ovunque nello spazio e nel tempo. Fissiamo l'attenzione su due orologi a luce identici, uno a riposo per noi ed uno a riposo entro un'astronave in moto, pensando che il comandante dell'astronave descriva il funzionamento del suo orologio esattamente come noi descriviamo il funzionamento del nostro. Da ciò traiamo conseguenze sorprendenti: mostriamo che l'orologio in moto ha periodo dilatato e lunghezza longitudinale contratta rispetto ai nostri orologi, e mostriamo che la radiazione emessa da dipoli armonici in moto ad alta velocità, pur propagandosi con velocità  $c$  indipendente dal verso, ha frequenza fortemente dipendente dall'angolo di emissione. In realtà questi fatti sono conseguenze dirette delle equazioni di Maxwell, infatti possono essere previsti calcolando il campo elettromagnetico prodotto da cariche in moto anche a velocità prossime a  $c$ , senza introdurre il principio di relatività, come avevano fatto Liénard e Wiechert già nel 1897. Quel che non si sapeva bene a quei tempi era se le equazioni di Maxwell valessero davvero anche entro la nave di Galileo; si sapeva che pendoli identici funzionano esattamente nello stesso modo in porto e nella nave in moto uniforme, ma si dubitava che ciò fosse vero anche per gli orologi a luce. Infatti, l'indipendenza della velocità della luce dalla velocità della sorgente induceva a pensare che un etere, in quiete rispetto alla Terra, giocasse per le onde elettromagnetiche il ruolo che l'aria in quiete gioca per le onde sonore. Ma ciò riproponeva in forma nuova il geocentrismo tolemaico e molti scienziati preferivano

pensare che le equazioni di Maxwell richiedessero correzioni: i sostenitori delle teorie emmissive proponevano equazioni che salvassero la legge classica di composizione delle velocità per osservatori inerziali senza far intervenire l'etere, altri pensavano che le equazioni di Maxwell valessero solo nel sistema di riferimento etereo e proponevano equazioni valide per osservatori in moto nell'etere. I tentativi sperimentali di convalidare le teorie emmissive non mancavano, né mancavano tentativi di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere, ma la sensibilità degli esperimenti del tempo era modesta, tanto che nel 1905, quando Einstein pubblica il suo lavoro sull'elettrodinamica dei corpi in moto, l'idea che le equazioni di Maxwell richiedessero correzioni, per una ragione o per l'altra, era ancora prevalente. Einstein non ha dubbi: rinuncia all'etere ed assume che le leggi dell'elettromagnetismo siano invarianti per osservatori inerziali. Ciò comporta che le leggi classiche di trasformazioni delle coordinate spazio-temporali, che rendono invariante l'accelerazione, devono essere sostituite dalle leggi di trasformazione di Lorentz che rendono invarianti le equazioni dell'elettromagnetismo, ma non l'accelerazione. Deduciamo tali leggi nel paragrafo 5, poi introduciamo gli elementi essenziali della geometria pseudo-euclidea in una+tre dimensioni ed impariamo ad usare il linguaggio quadrivettoriale pseudo-euclideo per calcolare le grandezze che osserviamo noi partendo da quelle osservate da Primo, osservatore in moto uniforme rispetto a noi. Ciò condurrà a leggi cinematiche e dinamiche valide per qualunque velocità consentita.

Concludiamo questa introduzione precisando che un laboratorio terrestre non è un sistema perfettamente inerziale per due ragioni. La prima è che la Terra ruota intorno all'asse polare con velocità angolare  $\Omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , quindi un laboratorio triestino ruota con velocità di circa  $300 \text{ m/s}$ , inseguendo la radiazione che viaggia verso est ed andando incontro alla radiazione che viaggia verso ovest. La seconda ragione è che il campo gravitazionale rende diverse le frequenze di orologi identici posti a quote diverse: un orologio a quota  $h$  ha frequenza maggiore di un orologio a livello del mare, precisamente  $\omega(h) = \omega(0)(1 + gh/c^2)$ . L'effetto, previsto nel 1907 da Einstein, è stato verificato nel 1960 da un bellissimo esperimento di Pound e Rebka. Insomma in un laboratorio terrestre le equazioni di Maxwell richiedono davvero correzioni ed i moderni sistemi di navigazione GPS ne tengono conto sistematicamente. Ma nel seguito trascuriamo questi effetti e pensiamo che il nostro laboratorio terrestre materializzi un sistema di riferimento perfettamente inerziale.

## 14.1 Il nostro ruolo di osservatori

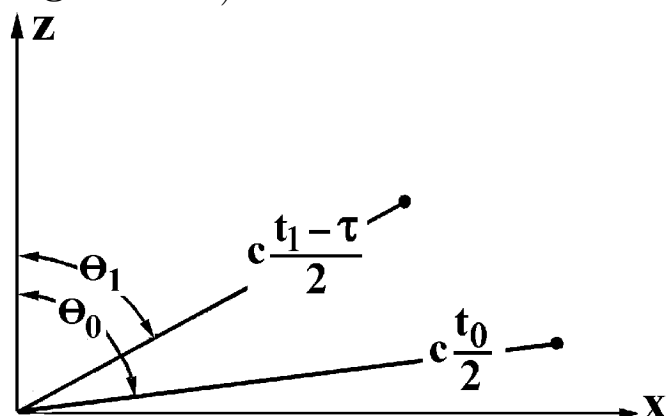
Immaginiamo di essere controllori del traffico aereo impegnati a seguire le evoluzioni di un'astronave. Con uno strumento fermo nella nostra origine emettiamo brevissimi lampi di radiazione ai tempi  $0, \tau, 2\tau, \dots$  poi attiviamo

mo i circuiti di ricezione dello strumento e misuriamo gli echi di ritorno ai tempi  $t_0, t_1, t_2, \dots$  provenienti da direzioni individuate rispettivamente dagli angoli  $(\theta_0, \phi_0), (\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2), \dots$ . A questo punto indossiamo il cappello da osservatori e facciamo quattro conti tenendo presente che la radiazione viaggia in linea retta con velocità  $c$ , sia nel percorso di andata, sia in quello di ritorno. Evidentemente **osserviamo** che il primo evento di collisione lampo-astronave è avvenuto al tempo  $t_0/2$ , quando l'astronave era a distanza  $ct_0/2$  in direzione  $(\theta_0, \phi_0)$ , e che il secondo evento di collisione è avvenuto al tempo  $\tau + (t_1 - \tau)/2 = (\tau + t_1)/2$ , quando l'astronave era a distanza  $c(t_1 - \tau)/2$  in direzione  $(\theta_1, \phi_1)$ . In questo modo abbiamo **osservato** gli istanti e le coordinate polari dei primi due eventi di collisione lampo-astronave

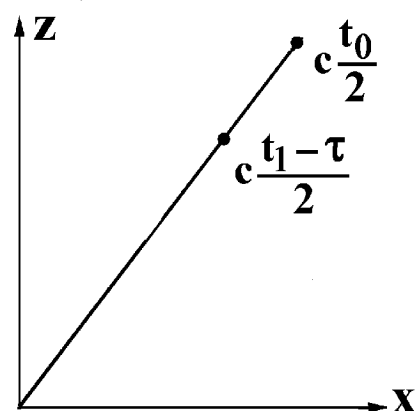
$$\left(\frac{t_0}{2}, c\frac{t_0}{2}, \theta_0, \phi_0\right) \quad , \quad \left(\frac{\tau + t_1}{2}, c\frac{t_1 - \tau}{2}, \theta_1, \phi_1\right)$$

Nel seguito, per non appesantire prematuramente il discorso, pensiamo che gli echi provengano dalla stessa direzione, come in figura 1b), e conveniamo di considerare positiva la velocità di un astronave che punta su di noi.

Fig. 14.1 a)



b)



Partendo dall'osservazione degli eventi di collisione lampo-astronave osserviamo che la velocità media dell'astronave nell'intervallo di tempo compreso tra  $t_0/2$  e  $(\tau + t_1)/2$  risulta

$$v = \frac{ct_0/2 - c(t_1 - \tau)/2}{(\tau + t_1)/2 - t_0/2} = c \frac{\tau - (t_1 - t_0)}{\tau + (t_1 - t_0)}$$

Per  $t_1 - t_0 < \tau$  l'astronave è in avvicinamento, per  $t_1 - t_0 > \tau$  l'astronave è in allontanamento. Insomma, per descrivere la cinematica dell'astronave dobbiamo prima misurare, poi osservare, ovvero calcolare. Ma in altre circostanze è molto utile seguire il percorso inverso: osservare (idealmente) e calcolare i risultati attesi per questa o quella misura. Ad esempio possiamo osservare che l'astronave è in moto nella nostra direzione con velocità  $v$  positiva o negativa e prevedere che l'intervallo di tempo tra gli echi vale

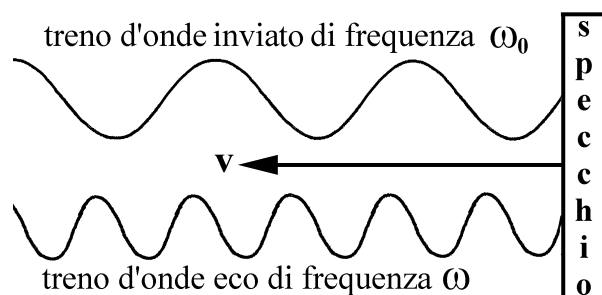
$$t_1 - t_0 = \tau \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \tag{14.1}$$

Vedremo altri esempi nei prossimi paragrafi, qui sottolineiamo che **nel ruolo di osservatori siamo ben fermi nel nostro sistema di riferimento, ma distribuiti ovunque nello spazio e nel tempo, e capaci di osservare in ogni punto e ad ogni istante, proprio come pensavano di fare Galileo e Newton.** Ad esempio non è difficile **osservare** quanto segue.

- Un lampo di radiazione parte da una stella e raggiunge un telescopio terrestre dopo aver attraversato vari traguardi fissi. Noi osservatori siamo su ogni traguardo ad osservare l'istante di passaggio.
- Due lampi di luce si inseguono con velocità relativa nulla.
- Due lampi di luce viaggiano l'un verso l'altro con velocità relativa  $2c$ .
- Un lampo di luce emesso da un'astronave che punta su di noi con velocità  $v$  viaggia con velocità  $c$ , sia quando è emesso verso prora, sia quando è emesso verso poppa. Nel primo caso osserviamo che il lampo si allontana dalla prora con velocità relativa  $c - v$ , nel secondo caso osserviamo che si allontana dalla poppa con velocità relativa  $c + v$ .
- Per noi, un'astronave che viaggia in linea retta con velocità  $c$  emettendo lampi di prora viaggia insieme a tutti i lampi che ha emesso lungo il percorso, quindi piomba sul povero controllore del volo senza alcun preavviso.

Infine pensiamo di inviare un fascio di radiazione di frequenza  $\omega_0$  verso uno specchio in moto verso di noi con velocità  $v$ , come in figura 2. Pensando che

**Fig. 14.2**



le creste d'onda positive siano lampi di periodo  $\tau = 2\pi/\omega_0$  e tenendo conto dell'equazione 1) è facile convincersi che la radiazione eco ha frequenza

$$\omega = \frac{2\pi}{t_1 - t_0} = \omega_0 \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \quad (14.1')$$

## ESERCIZI

Nei primi due esercizi pensiamo di inviare lampi di radiazione isotropi ai tempi  $0$  s,  $10$  s,  $20$  s e di ricevere echi provenienti da una stessa direzione.

1) Gli echi giungono ai tempi  $1000$  s,  $1002$  s e  $1004$  s. Calcolare: a) la velocità e l'accelerazione dell'astronave, b) l'istante d'arrivo previsto.

2) Da un'astronave che viaggia con velocità  $0.99 c$  riceviamo il primo eco al tempo  $1000$  s. a) Nel caso che l'astronave punti su di noi calcolare gli istanti d'arrivo degli altri echi e l'istante d'arrivo dell'astronave. b) Nel caso che l'astronave fugga da noi calcolare gli istanti d'arrivo degli altri echi.

3) Pensare di inviare un fascio di radiazione di frequenza  $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  verso lo specchio di prora di un'astronave in avvicinamento con velocità  $0.99c$ .  
 a) Calcolare la frequenza della radiazione eco. b) Ammettere che la legge di conservazione della frequenza in riflessione valga anche sull'astronave e calcolare la frequenza misurata dallo spettrometro di bordo.

4) Un dipolo oscillante viaggia lungo l'asse  $x$  con velocità  $0.8 c$  e passa dall'origine al tempo zero. Un rivelatore è posto sull'asse  $y$  ad  $1 \text{ km}$  di distanza dall'origine. Osservare la posizione del dipolo quando emette la radiazione che giunge al rivelatore al tempo zero.

## 14.2 Dilatazione dei periodi e contrazione dei volumi

Consideriamo un orologio ideale costituito da una camera sferica di **diámetro proprio**  $D_p$ , con parete interna perfettamente riflettente. Un lampo di luce isotropo viene emesso nel centro al tempo zero, si propaga sino alla parete, viene riflesso, torna nel centro al tempo  $\tau_p = D_p/c$ , si propaga nuovamente sino alla parete, torna nel centro al tempo  $2\tau_p$  e così via. Ad esempio un orologio con  $D_p = 0.299792458 \text{ m}$  ha **periodo proprio**  $\tau_p = 1 \text{ ns}$ . Qui e nel seguito **intendiamo che le grandezze proprie di un oggetto sono valutate nel sistema di riferimento in cui l'oggetto è a riposo**. Naturalmente gli orologi che misurano il nostro tempo  $t$  sono a riposo per noi e sono sincronizzati in modo che l'orologio centrato in  $\mathbf{r}$  segni il tempo  $t + r/c$  quando riceve un lampo di luce emesso nell'origine al tempo  $t$ .

Ora consideriamo un orologio in moto con velocità  $\mathbf{v}(t)$  e domandiamo: che cosa osserviamo? Diamo subito la risposta riservandoci di giustificarla: osserviamo che l'orologio in moto ha il periodo dilatato

$$\tau(t) = \frac{\tau_p}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} \quad (14.2)$$

quindi marcia più lentamente degli orologi a riposo. Inoltre osserviamo che la camera in moto conserva sezione "frontale" circolare di diametro  $D_p$ , ma risulta contratta nella direzione del moto con lunghezza

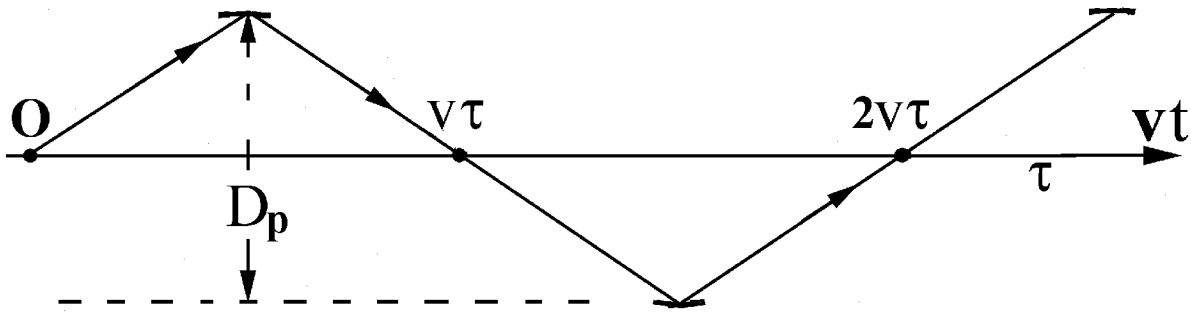
$$D(t) = D_p \sqrt{1 - v^2(t)/c^2} \quad (14.3)$$

Insomma: noi osservatori distribuiti ovunque dove passa l'orologio, ma ben fermi con i nostri orologi nel nostro sistema di riferimento, osserviamo che **l'orologio in moto ha periodo dilatato e volume contratto rispetto ai valori propri**. Ad esempio quando l'orologio ha velocità  $v = 0.6 c$  noi osserviamo il periodo  $\tau = 1.25 \tau_p$  ed il volume  $\mathcal{V} = 0.8 \mathcal{V}_p$ .

**Nel seguito** indicheremo il fattore di dilatazione del periodo e di contrazione della lunghezza longitudinale di un orologio in moto vario con

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} \quad (14.4)$$

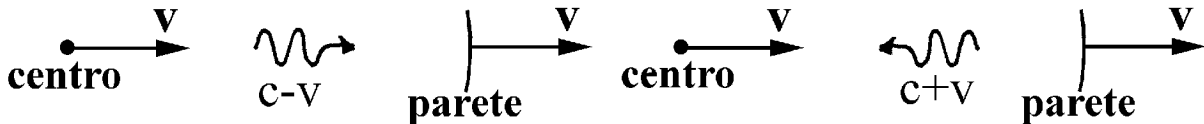
Fig. 14.3



Per convincerci che osserviamo davvero il periodo  $\gamma(t)\tau_p$  ed il volume  $\mathcal{V}_p/\gamma(t)$ , cominciamo a pensare che l'orologio sia su un'astronave in moto rettilineo uniforme e pensiamo che il comandante dell'astronave ne descriva il funzionamento esattamente come noi descriviamo il funzionamento dei nostri orologi. Poi osserviamo attentamente i percorsi della radiazione nell'orologio in moto, rimanendo ben fermi nel nostro sistema di riferimento, ma distribuiti ovunque dove passa l'orologio. La radiazione che segue il percorso considerato in figura 3 impiega il tempo  $\tau$ , per ora incognito, ad andare da centro a centro, quindi  $c\tau$  deve essere uguale a  $\sqrt{D_p^2 + (v\tau)^2}$ . Ciò comporta che  $\tau = D_p/\sqrt{c^2 - v^2}$  e giustifica l'equazione 2), almeno nel caso che la velocità dell'orologio non dipenda dal tempo.

Per giustificare l'equazione 3) osserviamo il percorso della radiazione che viaggia nella direzione di  $\mathbf{v}$ . Come mostrato in figura 4, la radiazione parte dal centro, insegue la parete di destra con velocità relativa  $c-v$ , viene riflessa,

Fig. 14.4



punta sul centro con velocità relativa  $c + v$  e lo raggiunge dopo il tempo  $\tau$ , insieme alla radiazione che segue altri percorsi. Dunque il periodo  $\tau$  e la lunghezza longitudinale  $D$  della camera devono essere legati dalla relazione

$$\tau = \frac{D/2}{c-v} + \frac{D/2}{c+v} = \frac{Dc}{c^2 - v^2} = \frac{D}{c(1 - v^2/c^2)}$$

che conduce all'equazione 3), infatti

$$D = c\tau(1 - v^2/c^2) = c\tau_p\sqrt{1 - v^2/c^2} = D_p\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Per convincerci che le equazioni 2) e 3) valgono anche quando l'orologio è in moto vario, basta pensare che il periodo  $\tau(t)$  rimanga sempre piccolissimo rispetto all'intervallo di tempo nel quale la velocità  $\mathbf{v}(t)$  varia apprezzabilmente, in modo da poter considerare rettilineo ed uniforme il moto durante ciascuna oscillazione dell'orologio.

La dilatazione dei periodi e la contrazione delle lunghezze longitudinali, predette teoricamente da Einstein e dai suoi precursori, è oggi confermata da miriadi di esperimenti. Ad esempio, un muone ha **tempo di vita proprio**  $\tau_p = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , ma vive in media  $2.2 \text{ s}$  quando circola in un anello di accumulazione con  $\gamma = 10^6$ .

Infine pensiamo che un orologio in moto con velocità  $v(t)$  passi dalla nostra origine al nostro tempo zero e segni il tempo zero a tale istante. Domandiamo: quanto vale il **tempo proprio**  $t_p$  dell'orologio al nostro tempo  $t$ ? L'orologio in moto ha periodo dilatato quindi segna un tempo contratto rispetto al nostro; nel nostro tempuscolo  $dt$  avanza di

$$dt_p = dt\sqrt{1 - (v(t)/c)^2} \quad \text{quindi} \quad t_p = \int_0^t dt\sqrt{1 - (v(t)/c)^2} \quad (14.5)$$

## ESERCIZI

1) Gli elettroni che circolano nell'anello del sincrotrone ELETTRA sul Carso triestino hanno  $\gamma = 4000$ . Mostrare che  $c - v$  è minore di  $10 \text{ m/s}$ . AIUTO: quando  $\gamma$  è molto grande conviene usare l'approssimazione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 + v/c)(1 - v/c)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - v/c)}} \quad \text{quindi} \quad c - v = \frac{c}{2\gamma^2}$$

2) Il muone ha tempo di vita proprio  $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . Quale velocità deve avere un muone creato nell'atmosfera a  $30 \text{ km}$  d'altezza per raggiungere il suolo con probabilità  $1/e$ ?

3) Un viaggiatore partì da Trieste il 3 Novembre 1980 e torna a Trieste oggi dopo un viaggio di andata e ritorno a velocità  $v = 0.8 c$ . Durante il viaggio: a) quante volte abbiamo ricevuto la radiazione emessa dal viaggiatore quando ha brindato al nuovo anno? b) quante volte il viaggiatore ha ricevuto la radiazione che abbiamo emesso quando abbiamo brindato al nuovo anno?

4) Quale  $\gamma$  attribuiamo ad un atomo in moto con  $v = 300 \text{ m/s}$ ? AIUTO:

$$\text{per } v \ll c \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

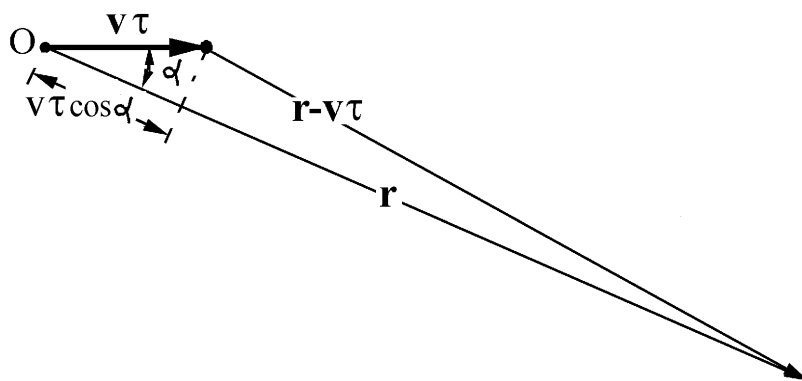
5) In una regione spaziale esente da campi gravitazionali, un'astronave parte da un astroporto e vi ritorna dopo aver viaggiato 10 giorni alla velocità di  $300 \text{ km/s}$ . Che cosa deve fare il pilota per riportare il suo orologio in sincronismo con quello della torre di controllo dell'astroporto?

## 14.3 Effetto Doppler longitudinale e trasverso

Nel ruolo di osservatori distribuiti ovunque nello spazio e nel tempo, abbiamo imparato a confrontare i tempi osservati su orologi in moto con quelli misurati con orologi a riposo. Ora pensiamo che la superficie riflettente dell'orologio

in moto con velocità  $\mathbf{v}$  lasci passare una frazione del lampo e concentriamo l'attenzione sulla propagazione dei lampi nel nostro laboratorio. Come mostrato in figura 5, scegliamo la nostra origine nel punto occupato dal centro dell'orologio all'istante di partenza di un lampo, scegliamo tale istante come tempo  $t = 0$ , indichiamo con  $\mathbf{r}$  la posizione di un punto fermo del nostro laboratorio ed indichiamo con  $\alpha$  l'angolo tra  $\mathbf{v}$  ed  $\mathbf{r}$ . Il lampo emesso nell'origine

Fig. 14.5



al tempo zero giunge in  $\mathbf{r}$  al tempo  $r/c$ , il lampo successivo viene emesso al nostro tempo  $\tau = \gamma\tau_p$ , quando il centro dell'orologio ha raggiunto il punto  $\mathbf{v}\tau$ , e raggiunge  $\mathbf{r}$  al tempo  $\tau + |\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau|/c \approx \tau + (r - v\tau \cos \alpha)/c$ . Pertanto il periodo dei lampi in  $\mathbf{r}$  vale  $\tau + (r - v\tau \cos \alpha)/c - r/c = \tau(1 - (v/c) \cos \alpha)$ . Dunque, il periodo d'arrivo dei lampi in un punto fisso dipende da  $\alpha$  e vale

$$\tau(\alpha) = \tau(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha) = \gamma\tau_p(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha) = \tau_p \frac{1 - (v/c) \cos \alpha}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

In particolare

$$\tau(0) = \tau_p \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad , \quad \tau(\pi) = \tau_p \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Si noti che il periodo  $\tau = \gamma\tau_p$  che noi osserviamo sull'orologio in moto non dipende dal verso della velocità, ma il periodo  $\tau(\alpha)$  d'arrivo dei lampi in punti fermi del nostro laboratorio ne dipende, e tanto!

Come prima applicazione consideriamo un viaggiatore che partì da Trieste vent'anni orsono e vi torna oggi dopo un viaggio di andata e ritorno con velocità  $v = 0.6 c$ . Noi osservatori fermi, distribuiti ovunque dove passa il viaggiatore, osserviamo che il suo orologio ha periodo  $\tau = 1.25\tau_p$ , sia durante il viaggio d'andata, sia durante quello di ritorno. Ed osserviamo che durante l'intero viaggio il nostro orologio avanza di 20 anni mentre quello del viaggiatore avanza di 16 anni. Ma nella nostra sala di controllo abbiamo ricevuto con periodo  $\tau(\pi) = 2\tau_p$  i segnali emessi dall'orologio del viaggiatore durante il viaggio d'andata e con periodo  $\tau(0) = \tau_p/2$  quelli emessi dal viaggiatore durante il viaggio di ritorno, quindi abbiamo **visto** il viaggiatore brindare al nuovo anno 8 volte nei primi 16 anni ed 8 volte nei rimanenti 4 anni del



nostro orologio. Sottolineiamo che **in partenza, durante l'inversione di rotta e all'arrivo, il viaggiatore ha accelerato**, quindi non è un osservatore inerziale e non può descrivere il nostro moto come noi abbiamo descritto il suo. Ma è certo che il viaggiatore ha ricevuto prima o poi la radiazione emessa quando noi abbiamo brindato al nuovo anno, quindi ci ha visto invecchiare di 20 anni. Ed è anche certo che noi abbiamo ricevuto prima o poi la radiazione emessa dal viaggiatore quando ha brindato al nuovo anno, quindi noi lo abbiamo visto invecchiare di 16 anni. Il motto “**il viaggiare mantiene giovani**” è dunque ben fondato!

Ora pensiamo che l'oggetto in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in figura 5, sia un dipolo oscillante con **frequenza propria**  $\omega_p = 2\pi/\tau_p$ . In tal caso noi osservatori fermi distribuiti ovunque dove passa il dipolo lo osserviamo oscillare con frequenza contratta  $\omega = 2\pi/\gamma\tau_p = \omega_p/\gamma$ , indipendente dal verso della velocità, ma quando spostiamo l'attenzione sulla radiazione emessa osserviamo che ha frequenza dipendente dall'angolo di emissione  $\alpha$ , precisamente

$$\omega(\alpha) = \frac{2\pi}{\tau(\alpha)} = \frac{2\pi}{\tau(1 - (v/c) \cos \alpha)} = \frac{\omega_p/\gamma}{1 - (v/c) \cos \alpha} = \frac{\omega_p \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \alpha} \quad (14.6)$$

Insomma è vero che **la radiazione emessa viaggia con velocità  $c$  indipendente dalla velocità della sorgente, ma la sua frequenza dipende fortemente del verso di emissione**. In particolare

$$\omega(0) = \omega_p \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \gamma \omega_p \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad , \quad \omega(\pi) = \omega_p \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} = \gamma \omega_p \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Nel primo caso il dipolo è in avvicinamento e la frequenza è maggiore della frequenza propria, nel secondo caso il dipolo è in allontanamento e la frequenza è minore della frequenza propria. In questi casi si parla di **effetto Doppler longitudinale** e, pensando che la frequenza propria sia al centro della banda ottica, si usa dire che la frequenza misurata nel nostro laboratorio è spostata verso il blu (**blue shift**) oppure verso il rosso (**red shift**) a seconda che il dipolo sia in avvicinamento o in allontanamento.

Quando il verso di emissione è ortogonale alla velocità di traslazione del dipolo la frequenza misurata vale

$$\omega(\pi/2) = \frac{\omega_p}{\gamma} = \omega_p \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

ed è uguale alla frequenza  $\omega$  delle oscillazioni che osserviamo nel dipolo in moto, ma minore della frequenza propria. In questo caso si parla di **effetto Doppler trasverso**.

Per velocità tali che  $\gamma$  differisca pochissimo dall'unità, ad esempio per le velocità di agitazione termica degli atomi di un gas, le equazioni per gli effetti Doppler longitudinale e trasverso possono essere approssimate con:

$$\omega(0) \approx \omega_p \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad , \quad \omega(\pi) \approx \omega_p \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad , \quad \omega(\pi/2) \approx \omega_p \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

Dunque per  $v/c \ll 1$  l'effetto Doppler trasverso origina shift in frequenza proporzionali a  $(v/c)^2/2$ , ed è trascurabile rispetto all'effetto Doppler longitudinale che origina shift in frequenza proporzionali a  $v/c$ .

Ora consideriamo un dipolo armonico in moto con  $\gamma$  molto grande, ad esempio maggiore di 1000. In tal caso conviene riscrivere l'equazione 6) con  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$  ed approssimare  $1 - v/c$  con  $1/2\gamma^2$ . Si ottiene così

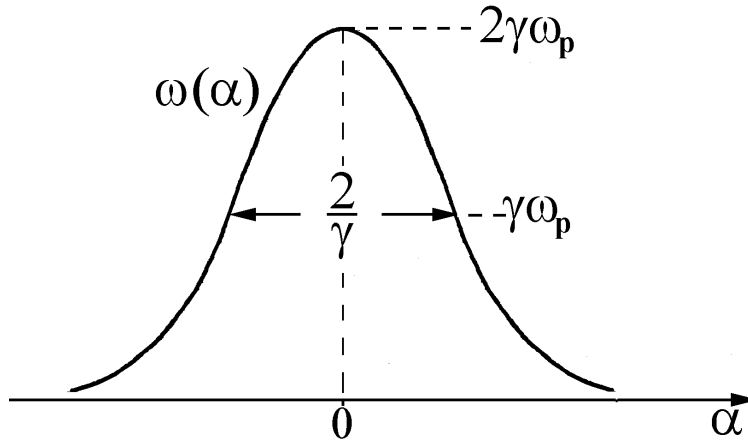
$$\omega(\alpha) = \frac{\omega_p/\gamma}{1 - v/c + 2(v/c) \sin^2(\alpha/2)} = \frac{\omega_p/\gamma}{1/(2\gamma^2) + 2(v/c) \sin^2(\alpha/2)}$$

Allo stesso ordine d'approssimazione possiamo porre  $v/c = 1$  nel denominatore di destra e possiamo concludere che

$$\text{per } \gamma \gg 1 \quad \omega(\alpha) = \frac{2\gamma\omega_p}{1 + [2\gamma \sin(\alpha/2)]^2} \quad (14.7)$$

dove  $\omega_p$  è la frequenza propria e  $\alpha$  è l'angolo formato dal verso di emissione con la velocità di traslazione del dipolo. Si noti che il rapporto  $\omega(\alpha)/\omega_p$  ha valore di picco  $2\gamma$  per  $\alpha = 0$  e si riduce alla metà del valore di picco per  $\alpha = \pm 1/\gamma$ . Come mostrato in figura 6 la radiazione di frequenza compresa tra  $\gamma\omega_p$

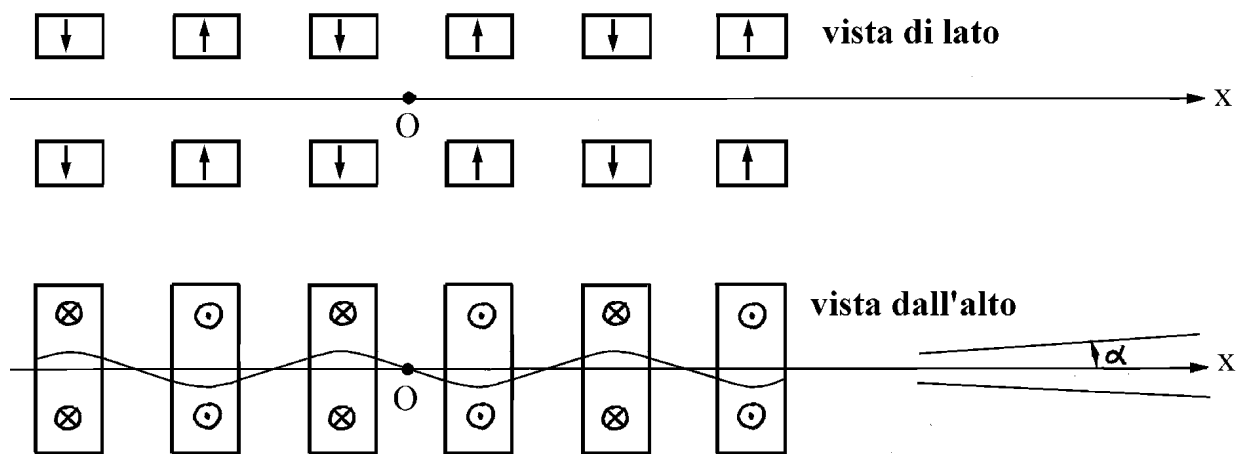
**Fig. 14.6**



e  $2\gamma\omega_p$  viene emessa entro un lobo di apertura angolare pari a  $2/\gamma$  centrato nel verso della velocità. Ad esempio per  $\gamma = 1000$  il lobo ha apertura angolare poco maggiore di  $0.1^\circ$ . Si noti anche che la frequenza della radiazione emessa all'indietro,  $\omega(\pi) = \omega_p/2\gamma$ , è  $4\gamma^2$  volte minore della frequenza di picco.

Per produrre un dipolo oscillante dotato di velocità quasi uguale a  $c$  possiamo usare l'**ondulatore** schematizzato in figura 7. Un fascio di elettroni in moto lungo l'asse  $x$  con  $\gamma$  molto grande, ad esempio maggiore di 1000, viene fatto passare nel campo magnetostatico generato dalla struttura mostrata in figura. Le "mattonelle" magnetizzate sono disposte in modo che il campo magnetico  $\mathbf{B}$  sia, ad esempio, verticale ed abbia sull'asse  $x$  un andamento del tipo  $B_0 \cos(2\pi x/\Lambda)$ , dove  $\Lambda$  è la distanza tra poli magnetici equivalenti. In tale situazione noi osserviamo che l'elettrone descrive una traiettoria a bisciolina nel piano orizzontale con periodo  $\Lambda/v \approx \Lambda/c$  e frequenza  $\omega = 2\pi c/\Lambda$ .

Fig. 14.7



Ma questa frequenza è contratta rispetto alla frequenza propria  $\omega_p$  osservata da chi accompagna l'elettrone senza ondulare, dunque  $\omega_p = \gamma\omega = 2\pi\gamma c/\Lambda$ . Sostituendo nell'equazione 7) si vede che la frequenza della radiazione emessa con inclinazione  $\alpha$  rispetto all'asse del fascio risulta

$$\omega(\alpha) = \frac{4\pi c}{\Lambda} \frac{\gamma^2}{1 + [2\gamma \sin(\alpha/2)]^2} \quad (14.8)$$

Ad esempio un ondulatore di Elettra con  $\Lambda = 10 \text{ cm}$ , percorso da elettroni con  $\gamma = 4000$ , emette un sottilissimo fascio di radiazione centrato sull'asse del fascio di elettroni, con frequenza massima  $6 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ , circa duecento volte maggiore di quella della luce rossa.

Infine riesaminiamo la situazione considerata in figura 2. Un osservatore che accompagna lo specchio osserva che la radiazione incidente e riflessa ha frequenza  $\omega' = \omega_0 \sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$  e noi osserviamo che la radiazione eco ha frequenza

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} = \omega_0 \frac{1 + v/c}{1 - v/c}$$

in pieno accordo con l'equazione 1'). Ma l'equazione 1') è stata ottenuta ragionando come radaristi, assumendo solo che la radiazione sia riflessa istantaneamente dallo specchio in moto, mentre ora abbiamo interpretato il risultato complessivo come un doppio effetto Doppler longitudinale.

## ESERCIZI

1) Negli spettri di emissione delle galassie A e B misurati con il telescopio Hubble una riga di emissione di un certo elemento ha frequenze  $\omega_A = 0.95\omega_p$  e  $\omega_B = 0.25\omega_p$  dove  $\omega_p$  è la frequenza propria. Ammettere che la distanza attuale  $D$  e la velocità di recessione  $v$  delle galassie siano legate dalla relazione  $D = vT_0$ , dove  $T_0 = 13.7 \cdot 10^9$  anni è l'età dell'Universo, e, per le due galassie, calcolare: a) le distanze attuali, b) le distanze agli istanti di emissione.

2) Un dipolo oscilla con frequenza propria  $\omega_p = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  e viaggia con

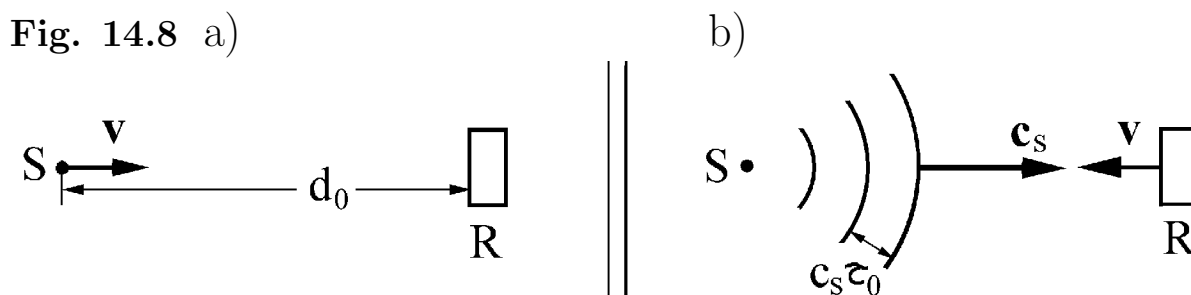
$\gamma = 1000$ . Calcolare: a) le frequenze emesse in avanti, all'indietro e con  $\alpha = 30^\circ$ , b) l'angolo di emissione al quale la frequenza vale  $10^{15} \text{ s}^{-1}$ .

3) Un onduttore con passo di  $10 \text{ cm}$  è percorso da elettroni con  $\gamma = 4000$ . Calcolare: a) la frequenza del moto a bisciolina che osserviamo, b) la frequenza di oscillazione osservata su un orologio che accompagna l'elettrone senza ondulare, c) le frequenze emesse in avanti, all'indietro e con  $\alpha = 1^\circ$ .

4) Il comandante di un'astronave in moto con  $v = 0.8 c$  osserva un faro spaziale sul rilevamento di  $30^\circ$  (angolo tra la prora ed il verso di osservazione) e misura che il faro emette lampi con periodo di  $2 \text{ s}$ . Quale periodo misura il comandante quando: a) il faro è al traverso, b) il faro è di poppa?

## 14.4 Confronto tra gli effetti Doppler sonoro ed EM

L'effetto Doppler sonoro in aria si manifesta in modo diverso nei casi a) e b) considerati in figura 8. Quando la sorgente S è in moto con velocità  $v$  verso



il rivelatore R fermo rispetto all'aria, come in a), l'impulso sonoro emesso dalla sorgente al tempo zero ed a distanza  $d_0$  dal rivelatore raggiunge il rivelatore al tempo  $d_0/c_s$ , dove  $c_s \approx 340 \text{ m/s}$  è la velocità del suono in aria. Il successivo impulso viene emesso al tempo  $\tau_0$ , quando la sorgente dista  $d_0 - v\tau_0$  dal rivelatore, e raggiunge il rivelatore al tempo  $\tau_0 + (d_0 - v\tau_0)/c_s$ . Quindi il rivelatore misura il periodo  $\tau = \tau_0(1 - v/c_s)$ . Invece, quando la sorgente è ferma rispetto all'aria ed il rivelatore le si avvicina con velocità  $v$ , come in b), i massimi di pressione sono distribuiti nell'aria a distanza  $c_s\tau_0$  e viaggiano con velocità  $c_s$ , quindi il rivelatore passa dall'uno all'altro con velocità relativa  $c_s + v$  e misura il periodo  $\tau_0 c_s / (c_s + v) = \tau_0 / (1 + v/c_s)$ . Dunque le due situazioni sono equivalenti solo quando  $v$  è piccola rispetto alla velocità  $c_s$ . Nel caso elettromagnetico, invece, le situazioni sorgente in moto-rivelatore fermo e sorgente ferma-rivelatore in moto sono sempre equivalenti, proprio perché non esiste un etere luminifero che giochi il ruolo dell'aria. In realtà, se intendessimo che l'etere è un mezzo di costante dielettrica unitaria, permeabilità magnetica unitaria e conducibilità elettrica nulla, e precisassimo che ogni osservatore inerziale porta con se il proprio etere, potremmo dire che l'etere esiste, ma dovremmo ammettere che l'etere di un osservatore scorra senza alcun attrito entro l'etere di un altro osservatore, qualunque sia

la velocità relativa. Naturalmente un etere con tali proprietà è il vuoto, o meglio, etere e vuoto sono nomi equivalenti della stessa entità fisica.

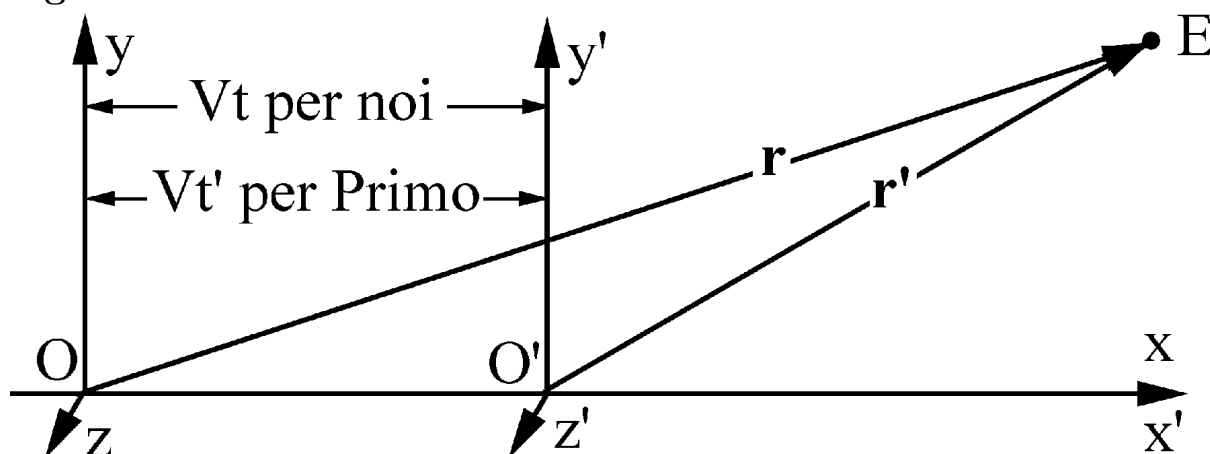
## ESERCIZI

1) La sirena di un treno e la sirena di una stazione sono identiche e vibrano con frequenza propria  $\omega_p = 1000 \text{ s}^{-1}$ . Pensare che il treno si avvicini alla stazione con velocità di  $360 \text{ km/h}$  e calcolare le frequenze delle onde sonore ricevute a) dal macchinista, b) dal capostazione.

## 14.5 Leggi di trasformazione di Lorentz

Con riferimento alla figura 9, pensiamo che l'osservatore Primo, in moto con velocità  $\mathbf{V}$  costante, abbia scelto l'origine  $O'$  dei propri assi e l'origine del proprio tempo nel luogo ed all'istante del nostro evento origine. Scegliamo il nostro asse  $x$  nel verso di  $\mathbf{V}$  e pensiamo che Primo abbia scelto gli assi  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  coincidenti al tempo zero con i nostri assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Con tali convenzioni l'evento origine è individuato dalla quaterna di coordinate  $(0, 0, 0, 0)$  sia per noi, sia per Primo. Ora consideriamo un secondo evento, l'evento E,

Fig. 14.9



individuato per Primo dalla quaterna di coordinate  $(t', x', y', z')$  e domandiamo: quale quaterna di coordinate attribuiamo noi all'evento? Certamente dobbiamo abbandonare l'idea classica che  $t$  sia uguale a  $t'$ : se fosse così, quando l'evento origine e l'evento E sono la partenza e l'arrivo di un lampo di luce, anche  $r' = ct'$  dovrebbe essere uguale ad  $r = ct$ . Per dedurre le nuove leggi di trasformazione, cominciamo a notare che Primo attribuisce a noi la velocità  $-\mathbf{V}$  e deve attribuire agli oggetti fermi per noi i fattori di dilatazione-contrazione che noi attribuiamo agli oggetti fermi per lui. Ciò comporta che  $y$  e  $z$  devono essere invarianti, come abbiamo tacitamente ammesso finora. Infatti se per noi  $y'$  fosse uguale ad  $\alpha y$ , per Primo  $y$  dovrebbe essere uguale ad  $\alpha y'$ , e ciò è possibile solo per  $\alpha = 1$ . Poinotiamo che l'evento E avviene quando le due origini distano  $Vt$  per noi e  $Vt'$  per Primo e modifichiamo le leggi di trasformazione classiche scrivendo  $x = \Gamma(x' + Vt')$

e  $x' = \Gamma(x - Vt)$ , dove  $\Gamma$  è il fattore di dilatazione che noi attribuiamo a Primo e che Primo attribuisce a noi. Lo abbiamo indicato con  $\Gamma$  per non confonderlo con i fattori di dilatazione  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t')$  di un generico oggetto in moto vario. Per determinare  $\Gamma$ , pensiamo che l'evento E sia l'arrivo in un punto dell'asse  $x$  di un lampo di luce emesso nell'origine al tempo zero; in tal caso le nuove leggi di trasformazione si riducono a  $ct = \Gamma(ct' + Vt')$  e  $ct' = \Gamma(ct - Vt)$  e comportano che  $tt' = tt' \Gamma^2(1 - V^2/c^2)$ , quindi

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (14.9)$$

Alle stesse conclusioni possiamo giungere direttamente notando che noi osserviamo contratta del fattore  $\Gamma$  la coordinata  $x'$ , e Primo osserva contratta dello stesso fattore la nostra coordinata  $x$ , quindi

$$x - Vt = x'/\Gamma \quad , \quad x' + Vt' = x/\Gamma$$

Ricavando  $x$  dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si vede che  $t = \Gamma(t' + Vx'/c^2)$ . Dunque l'evento individuato dalle coordinate  $(t', x', y', z')$  è individuato dalle nostre coordinate

$$t = \Gamma(t' + Vx'/c^2) \quad , \quad x = \Gamma(x' + Vt') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad (14.10)$$

ed un evento individuato dalle nostre coordinate  $(t, x, y, z)$  è individuato dalle coordinate di Primo

$$t' = \Gamma(t - Vx/c^2) \quad , \quad x' = \Gamma(x - Vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad (14.11)$$

Le equazioni 10) sono le **leggi di trasformazione di Lorentz**, le 11) sono le **leggi di trasformazione di Lorentz inverse**. Partendo da queste leggi possiamo dire quanto segue.

- Al nostro tempo  $t$  osserviamo che l'orologio di Primo centrato in O' segna il tempo  $t'$  tale che  $t = \Gamma t'$ , consistentemente con il fatto che gli orologi di Primo hanno per noi periodo dilatato. Insomma noi osserviamo che il tempo di Primo fluisce più lentamente del nostro. Ma anche Primo è un osservatore inerziale ed osserva che il nostro tempo fluisce più lentamente del suo. Infatti osserva che al tempo  $t'$  il nostro orologio centrato in O segna il tempo  $t$  tale che  $t' = \Gamma t$ . Chi ha ragione, noi o Primo? Entrambi: fino a quando uno dei due osservatori non accelera in qualche modo, non è possibile dire chi viaggia e chi sta fermo. Insomma Primo non è un viaggiatore, è un osservatore inerziale proprio come noi, anzi siamo noi con il suo cappello.

- Spesso si dice che il tempo fluisce in modo diverso per due osservatori inerziali in moto relativo, ma ciò può generare malintesi: il tempo fluisce esattamente nello stesso modo per i due osservatori, ma l'uno osserva che il tempo dell'altro fluisce più lentamente del proprio.

- Per noi gli orologi di Primo centrati in punti diversi dell'asse  $x'$  non sono sincroni (ma sono isocroni). Infatti la relazione  $t = \Gamma(t' + Vx'/c^2)$  comporta che, al tempo  $t$ ,  $t'$  dipende da  $x'$ . Naturalmente i nostri orologi centrati in punti diversi dell'asse  $x$  non sono sincroni per Primo.

- La lunghezza di una barra in moto deve essere intesa come distanza tra le posizioni dei due estremi ad uno stesso istante. Ad esempio, per calcolare la lunghezza  $dx$  di una barra che Primo osserva ferma con lunghezza  $dx'$ , dobbiamo differenziare la relazione  $x' = \Gamma(x - Vt)$  a  $t$  fisso. Dunque  $dx$  è davvero contratta rispetto a  $dx'$ . Ciò comporta che un'auto lunga 5 m può trovar posto in un garage lungo 2.5 metri quando vi entra con  $\gamma = 2$ . Basta ..... chiudere la porta esattamente quando urta il paraurti anteriore.

- La grandezza  $s^2 = (ct)^2 - r^2$  è invariante non solo quando l'evento  $(ct, \mathbf{r})$  è l'arrivo in  $\mathbf{r}$  di un lampo di luce emesso nell'origine al tempo zero, ma in ogni caso, infatti

$$(ct)^2 - r^2 = \Gamma^2[c^2(t' + Vx'/c^2)^2 - (x' + Vt')^2] - y'^2 - z'^2 = (ct')^2 - r'^2$$

Ad esempio quando Primo impiega 101 dei nostri anni ad arrivare su una stella distante per noi 100 anniluce, per Primo l'istante d'arrivo è tale che  $(ct')^2 - 0 = (101^2 - 100^2)$  anniluce, ovvero  $t' = 14.1$  anni.

- La legge classica di composizione delle velocità,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \mathbf{V}$  deve essere sostituita dalle leggi

$$v_x(t) = \frac{v'_x(t') + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x(t')} \quad , \quad v_y(t) = \frac{v'_y(t')}{\Gamma[1 + \frac{V}{c^2}v'_x(t')]} \quad , \quad v_z(t) = \frac{v'_z(t')}{\Gamma[1 + \frac{V}{c^2}v'_x(t')]} \quad (14.12)$$

Ad esempio la prima equazione si ottiene dividendo  $dx = \Gamma(dx' + Vdt')$  per  $dt = \Gamma(dt' + (V/c^2)dx')$ .

## ESERCIZI

1) Per noi fermi rispetto ai binari, la testa di un treno in moto con velocità  $0.8c$  esce da una galleria lunga  $1 \text{ km}$  proprio mentre vi sta entrando la coda. Per l'osservatore macchinista: a) quanto è lungo il treno, b) quanto è lunga la galleria, c) quanto tempo passa tra l'uscita dalla galleria della testa e l'ingresso della coda, d) dov'è la testa quando la coda entra in galleria.

2) Una particella passa dall'origine al tempo zero e si muove lungo l'asse  $x$  con velocità uniforme differente da  $c$  di una parte per mille. Al tempo  $t = 1 \text{ s}$  calcolare: a) il valore di  $s^2$ , b) il tempo  $t'$  osservato su un orologio in moto con la particella, c) la distanza percorsa dalla nostra origine spaziale per un osservatore in moto con la particella.

3) Primo passa dalla Terra a capodanno e raggiunge una stella in 5 dei suoi anni. Per noi la stella dista 100 anni luce. a) Quale velocità ha Primo? b) Quanto dura il viaggio per noi? c) Quale distanza osserva di percorrere Primo? d) Quanti dei lampi che noi emettiamo a capodanno raggiungono

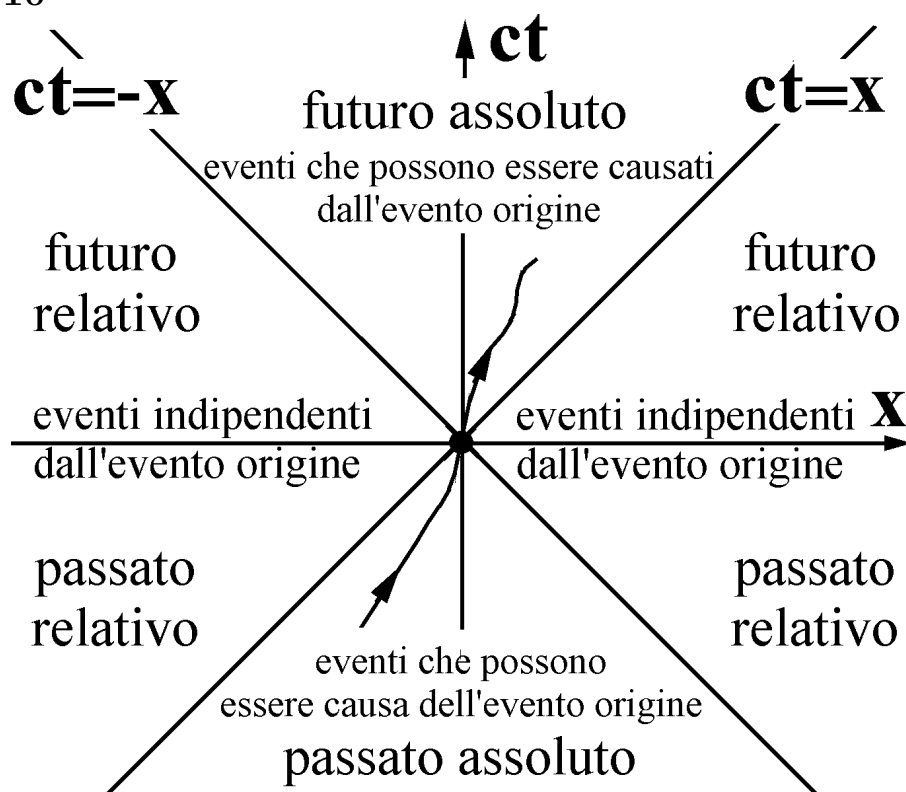
Primo durante il viaggio? e) Quanti dei lampi che Primo emette a capodanno giungono a noi prima che Primo passi dalla stella?

4) Una particella con tempo di vita proprio 1 s viene emessa da una stella distante 100 anni luce. Quale velocità deve avere per raggiungerci?

## 14.6 Cono luce dell'evento origine

In qualità di osservatori consideriamo un evento, ad esempio l'esplosione di un petardo puntiforme, scegliamo l'origine  $O$  dei nostri assi cartesiani nel luogo dell'evento e scegliamo l'origine del nostro tempo all'istante dell'evento. Poi consideriamo un secondo evento, ad esempio l'esplosione di un secondo petardo puntiforme al tempo  $t$  nel punto  $\mathbf{r}$ . Abbiamo visto che  $s^2 = (ct)^2 - r^2$  è invariante in ogni caso, ora notiamo che può essere positivo, nullo o negativo e consideriamo attentamente i tre casi. Per semplicità pensiamo che il secondo evento avvenga sull'asse  $x$  e lo rappresentiamo con un punto del piano  $(ct, x)$ , come mostrato in figura 10. Il punto  $(0, 0)$  rappresenta l'evento origine. I punti delle bisettrici dei due quadranti superiori, ovvero i punti con  $s^2 = 0$  e  $t > 0$ , individuano **eventi di genere luce del futuro**, eventi che avvengono nel punto  $x$  proprio quando vi arriva un lampo emesso nell'origine al tempo zero. Analogamente i punti sulle bisettrici dei due quadranti inferiori individuano **eventi di genere luce del passato**: avvengono nel punto  $x$  quando vi deve partire un lampo che raggiunga l'origine al tempo zero. L'insieme degli eventi di genere luce prende il nome di **cono luce**

Fig. 14.10





**dell'evento origine.** Poichè  $s^2$  è invariante gli eventi del nostro cono luce stanno sul cono luce anche per Primo.

Passiamo a considerare gli eventi con  $s^2 > 0$  e diciamo che sono **eventi di genere tempo**, ad intendere che la parte temporale di  $s^2$  prevale su quella spaziale. Gli eventi di genere tempo con  $t$  positivo appartengono al **futuro assoluto**: sia per noi, sia per Primo avvengono in un punto dopo il passaggio del lampo di luce emesso nell'origine al tempo zero, quindi possono essere causati dall'evento origine. Gli eventi di genere tempo con  $t$  negativo individuano eventi del **passato assoluto**: sia per noi, sia per Primo avvengono in un punto prima della partenza del lampo di luce che raggiunge l'origine al tempo zero, quindi possono essere causa dell'evento origine. La curva con frecce in figura 10 rappresenta gli eventi di localizzazione di una particella che **percorre l'asse  $x$**  passando dall'origine al tempo zero e prende il nome di **linea d'universo** della particella. Poiché  $dx/dct = v/c$  è minore dell'unità per qualunque particella, le linee d'universo sono di genere tempo e, in ogni punto, hanno tangenti che formano con l'asse  $ct$  angoli minori di  $45^\circ$ . Naturalmente, la linea d'universo di una particella creata nell'origine al tempo zero si estende solo nel futuro assoluto, quella di una particella distrutta nell'origine al tempo zero si estende solo nel passato assoluto.

Infine consideriamo gli eventi esterni al cono luce e diciamo che sono **eventi di genere spazio**, ad intendere che la parte spaziale di  $s^2$  prevale su quella temporale. Sia per noi, sia per Primo, gli eventi di genere spazio non possono essere legati all'evento origine da relazioni di causa-effetto, infatti l'intervallo di tempo che intercorre tra i due eventi è minore di quello necessario a percorrere la distanza che li separa, anche procedendo alla velocità della luce. Ma può avvenire che eventi di genere spazio del nostro futuro siano nel passato di Primo o viceversa. Ad esempio per  $ct > 0$ ,  $ct' = \Gamma(ct - Vx/c)$  diventa negativo quando  $Vx/c$  diventa maggiore di  $ct$ . Per tale ragione le due regioni esterne al cono luce con  $t > 0$  e  $t < 0$  rappresentano il **futuro relativo** ed il **passato relativo**. Il fatto che viaggiando sia possibile invertire l'ordine temporale degli eventi (di genere spazio) colpisce molto la fantasia, soprattutto se si "dimentica" di precisare che l'ordine temporale degli eventi legati da relazioni di causa-effetto non può essere invertito.

## 14.7 Quadrispostamento di due eventi

Cominciamo a notare che le leggi di trasformazione 10) e 11) sono lineari e possono essere scritte nelle forme

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ \Gamma \frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\Gamma \frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\Gamma \frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ \Gamma \frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Poi definiamo le **matrici di trasformazione di Lorentz**

$$(L_{\mu}^{\nu}) \equiv \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ \Gamma \frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{L}_{\mu}^{\nu}) \equiv \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\Gamma \frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e definiamo il **quadrivettore** di un evento dall'evento origine con l'una o l'altra delle quaterne

$$x^{\mu} \equiv (ct, \mathbf{r}) \equiv (ct, x, y, z) \quad , \quad x_{\mu} \equiv (ct, -\mathbf{r}) \equiv (ct, -x, -y, -z)$$

Infine ricordiamo la **convenzione di somma sugli indici ripetuti una volta in alto ed una in basso nello stesso monomio** e riscriviamo le leggi di trasformazione nelle forme compatte

$$x^{\mu} = L_{\nu}^{\mu} x'^{\nu} \quad , \quad x_{\mu} = \bar{L}_{\mu}^{\nu} x'_{\nu} \quad (14.10')$$

$$x'^{\mu} = \bar{L}_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad , \quad x'_{\mu} = L_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \quad (14.11')$$

tenendo ben presente che le matrici  $L_{\mu}^{\nu}$  ed  $\bar{L}_{\mu}^{\nu}$  sono l'una inversa dell'altra, infatti  $L_{\mu}^{\eta} \bar{L}_{\eta}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ , dove  $\delta_{\mu}^{\nu}$  è la matrice identica  $4 \times 4$ . Tali notazioni mostrano a prima vista che  $s^2 = x^{\mu} x_{\mu}$  è invariante, infatti **le componenti di  $x^{\mu}$  controvariano rispetto a quelle di  $x_{\mu}$** . Per tale ragione si usa dire che  $x^{\mu}$  è il **quadrivettore controvariante** e che  $x_{\mu}$  è il **quadrivettore covariante**.

## ESERCIZI

- 1) Verificare che  $L_{\mu}^{\eta} \bar{L}_{\eta}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$  con calcolo diretto.
- 2) Scrivere le leggi di trasformazione di Lorentz con quadrivettori descritti da vettori riga.

## 14.8 Geometria pseudo-euclidea dello spazio-tempo, quadrivettori associati ad una particella

L'elemento  $\{a\}$  di uno spazio vettoriale pseudo-euclideo in una+tre dimensioni è individuato dalla quaterna controvariante  $a^{\mu}$  oppure dalla quaterna covariante  $a_{\mu}$ , con le due quaterne legata l'una all'altra dalle relazioni

$$a^{\mu} = g^{\mu\nu} a_{\nu} \quad , \quad a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu} \quad \text{dove} \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  è la **matrice metrica dello spazio vettoriale pseudo-euclideo in una+tre dimensioni**. Il prodotto scalare degli elementi  $\{a\}$  e  $\{b\}$  di tale spazio è definito dall'una o l'altra delle operazioni

$$a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} \quad , \quad a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} \quad , \quad a_\mu b^\mu \quad , \quad a^\mu b_\mu$$

e differisce dal consueto prodotto scalare perchè non è la somma dei prodotti delle componenti omologhe, ma è la differenza tra il prodotto delle prime componenti e la somma dei prodotti delle altre tre. In relatività generale la matrice metrica tiene conto delle masse distribuite nell'Universo, cessa di essere diagonale e dipende dalla posizione, ma ora possiamo dimenticarcelo, limitandoci a ricordare che le rappresentazioni controvariante e covariante di un quadrivettore differiscono per il segno delle tre componenti spaziali.

A questo punto è facile convincersi che lo spazio vettoriale pseudo-euclideo gode delle consuete proprietà degli spazi vettoriali. Ad esempio sono quadrivettori la somma di due quadrivettori ed il prodotto di un quadrivettore per un invariante, infatti

$$(a^\mu - b^\mu)(a_\mu - b_\mu) = a^\mu a_\mu + b^\mu b_\mu - 2a^\mu b_\mu \quad , \quad \frac{a^\mu}{\alpha} \frac{a_\mu}{\alpha} = \frac{a^\mu a_\mu}{\alpha^2}$$

Ciò comporta che la derivata del quadrispostamento di una particella rispetto al tempo proprio è un quadrivettore; diciamo che è la

$$\text{quadrivelocità} \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_p} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \equiv (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (14.13)$$

Ed è un quadrivettore anche la derivata della quadrivelocità rispetto al tempo proprio; diciamo che è la

$$\text{quadriaccelerazione} \quad a^\mu = \frac{du^\mu}{dt_p} = \gamma \frac{du^\mu}{dt} \equiv \left( \gamma c \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} \right) \quad (14.14)$$

Naturalmente sono quadrivettori anche il

$$\text{quadrimento} \quad p^\mu = m u^\mu \equiv (\gamma m c, \gamma m \mathbf{v}) \quad (14.15)$$

e la

$$\text{quadriforza} \quad F^\mu = m a^\mu \equiv \left( \gamma m c \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} \right) \quad (14.16)$$

Daremo significato fisico al quadrimento ed alla quadriforza nel prossimo capitolo, qui concentriamo l'attenzione sugli aspetti cinematici, tenendo ben presente che

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{\gamma^3(t)}{c^2} v(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad (14.17)$$

## ESERCIZI

1) Primo ha  $\Gamma = 1000$  e, ad un certo istante, osserva un protone fermo in un certo punto dove agisce un campo elettrico da  $10 \text{ V/m}$  inclinato di

45° sull'asse  $x'$ . Con il cappello di Primo calcolare: a) la quadrivelocità, b) la quadriaccelerazione. Poi indossare il nostro cappello, pensare di aver già determinato il tempo e la posizione dell'evento osservato da Primo e, per tale evento, calcolare: c) la quadrivelocità, d) la quadriaccelerazione, e) le componenti della velocità, f) le componenti dell'accelerazione.

2) Dimostrare che il prodotto scalare della quadrivelocità per la quadriaccelerazione di una particella è sempre nullo. Procedere in due modi: a) con calcolo diretto, b) partendo dal fatto che  $u^\nu u_\mu = c^2$  non dipende dal tempo.

## 14.9 Leggi di trasformazioni del fattore di dilatazione

Pensiamo che Primo osservi una particella al tempo  $t'$  nel punto  $\mathbf{r}'$  con velocità  $\mathbf{v}'(t')$  e domandiamo: quale velocità  $\mathbf{v}(t)$  attribuiamo noi allo stesso evento? Ovvero: quale velocità osserviamo al tempo  $t$  corrispondente a  $t'$ ? Per rispondere basta partire dalla quadrivelocità e ricordare che le sue componenti si trasformano con le leggi 10'), ovvero

$$c\gamma(t) = \Gamma \left[ c\gamma'(t') + \frac{V}{c} v'_x(t') \gamma'(t') \right], \quad v_x(t) \gamma(t) = \Gamma [v'_x(t') \gamma'(t') + V \gamma'(t')]$$

$$v_y(t) \gamma(t) = v'_y(t') \gamma'(t'), \quad v_z(t) \gamma(t) = v'_z(t') \gamma'(t')$$

La prima equazione conduce alla legge di trasformazione del fattore di dilatazione

$$\gamma(t) = \gamma'(t') \Gamma \left[ 1 + \frac{V}{c^2} v'_x(t') \right] \quad (14.18)$$

Dalle altre equazioni otteniamo nuovamente le leggi di trasformazione 12) per le componenti della velocità.

### ESERCIZI

Nei primi tre esercizi Primo ha velocità  $V = 0.99 c$ .

1) Per Primo una particella si muove lungo l'asse  $y'$  con velocità  $100 m/s$ .  
a) Quale quadrivelocità osserva Primo? b) Quale quadrivelocità osserviamo noi? c) Quale velocità osserviamo noi?

2) Per Primo due particelle si muovono lungo l'asse  $x'$  con velocità di  $100 m/s$  in versi opposti. Considerare prima l'una poi l'altra particella e rispondere alle domande a), b), c) poste nell'esercizio precedente.

3) Per Primo una particella si muove con velocità di  $100 m/s$  in un verso che forma un angolo di  $30^\circ$  con l'asse  $x'$ . Calcolare le seguenti grandezze nel nostro sistema di riferimento: a) fattore di dilatazione, b) modulo della velocità, c) angolo che la velocità forma con l'asse  $x$ .

4) Primo osserva una particella in moto con velocità  $c$  in un verso che forma l'angolo  $\alpha'$  con l'asse  $x'$ . a) Mostrare che, qualunque sia  $\alpha'$ , anche noi

osserviamo che la particella ha velocità  $c$ . b) Indicare con  $\alpha$  l'angolo formato dalla velocità che osserviamo noi con l'asse  $x$  e mostrare che

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' + V/c}{1 + (V/c)\cos\alpha'} \quad , \quad \cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - V/c}{1 - (V/c)\cos\alpha}$$

5) Il baricentro di un gas è in moto con velocità  $V = 10^8$  m/s. Fissare l'attenzione su un atomo del gas, partire dalla quadrivelocità e dedurre: a) le leggi di trasformazione del fattore di dilatazione, b) le leggi di trasformazione delle componenti della velocità. c) Poi calcolare l'angolo formato con il nostro asse  $x$  dalla velocità di un atomo che nel sistema del baricentro ha velocità di 1000 m/s ortogonale all'asse  $x'$ .

## 14.10 Moto con accelerazione propria costante

Pensiamo che un'astronave sia partita da un astroporto al tempo zero e viaggi mantenendo l'accelerometro di bordo sul valore  $a_p$ , costante in modulo e verso. Secondo la cinematica classica anche noi fermi nell'astroporto osserviamo che l'astronave viaggia con accelerazione  $a_p$  costante, quindi con legge oraria  $x(t) = a_p t^2/2$ . Ma è davvero così solo fino a quando la velocità rimane molto minore di  $c$ , poi  $v(t)$  aumenta sempre più lentamente tendendo a  $c$ , mentre l'accelerazione  $a(t)$  diminuisce tendendo a zero. Per dimostrarlo e per determinare la legge oraria, cominciamo a pensare che Primo abbia velocità (sempre) uguale a quella che l'astronave raggiunge al nostro tempo  $t$ , ovvero abbia  $\Gamma = \gamma(t)$ . Per Primo, al tempo  $t' = \gamma(t)[t - v(t)x(t)/c^2]$  corrispondente al nostro tempo  $t$ , l'astronave ha  $v' = 0$ ,  $\gamma' = 1$  e  $a' = dv'/dt' = a_p$ . Inoltre l'equazione 17) mostra che  $d\gamma'/dt' = 0$ , quindi la quadriaccelerazione risulta  $a'^\mu \equiv (0, a_p, 0, 0)$ . Usando le leggi di trasformazione si ottiene

$$a^\mu \equiv \left( \frac{v}{c} a_p, \gamma a_p, 0, 0 \right)$$

e confrontando questo risultato con l'equazione 14) si vede che

$$c \frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{c} a_p \quad , \quad \frac{d}{dt}[\gamma v] = a_p \quad (14.19)$$

Sostituendo la 17) nella prima equazione otteniamo  $a(t) = a_p/\gamma^3(t)$ , ed integrando la seconda equazione dal tempo 0 al tempo  $t$  otteniamo  $\gamma(t)v(t) = a_p t$ . E poiché  $\gamma = \sqrt{1 + (\gamma v/c)^2}$ , possiamo concludere che

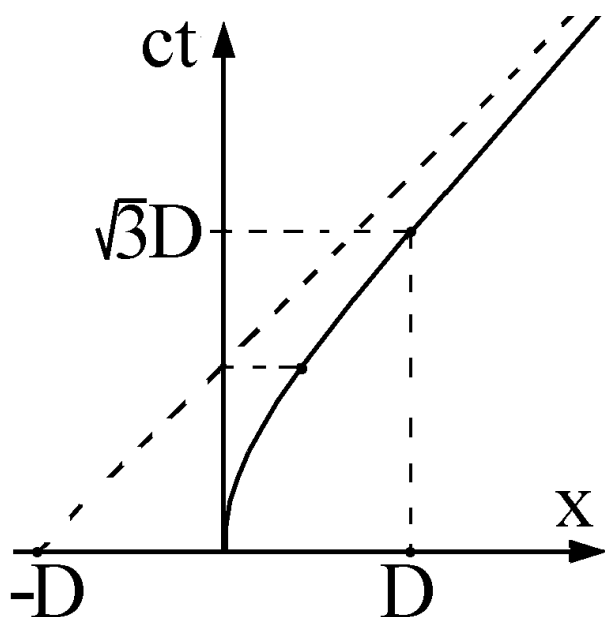
$$\gamma(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2} \quad , \quad v(t) = \frac{a_p t}{\sqrt{1 + (a_p t/c)^2}} \quad , \quad a(t) = \frac{a_p}{[1 + (a_p t/c)^2]^{3/2}} \quad (14.20)$$

Naturalmente la legge oraria si ottiene integrando  $v(t)$  sul tempo e risulta

$$x(t) = \frac{c^2}{a_p} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2} - 1 \right] = D \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{ct}{D}\right)^2} - 1 \right] \quad , \quad \text{dove} \quad D = \frac{c^2}{a_p} \quad (14.21)$$

Come mostrato in figura 11, la legge oraria, ovvero la linea d'universo dell'astronave, è un ramo d'iperbole con asintoto  $x = ct - D$ .

**Fig. 14.11**



Infine notiamo che al nostro tempo  $t$  il tempo a bordo dell'astronave risulta

$$t_p = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + (a_p t/c)^2}} = \frac{c}{a_p} \sinh^{-1} \left( \frac{a_p t}{c} \right) \quad (14.22)$$

Ad esempio, con  $a_p = 9.5 \text{ m/s}^2$ ,  $c/a_p$  e  $D$  sono quasi esattamente uguali ad un anno e ad un annoluce, quindi dopo 1001 dei nostri anni l'astronave ha raggiunto per noi la distanza di 1000 anniluce, mentre gli astronauti sono invecchiati solo di 7.6 anni. E dopo 10001 dei nostri anni l'astronave ha raggiunto la distanza di 10000 anniluce, mentre gli astronauti sono invecchiati solo di 9.9 anni. Anticipiamo però che tali viaggi sono impossibili per ragioni energetiche: l'astronave dovrebbe usare una quantità d'energia mille o diecimila volte maggiore della sua energia di riposo. Vedremo invece che è possibile accelerare un elettrone o un protone o un muone con accelerazione propria costante; lo si fa comunemente nei cannoni elettrostatici inseriti in molte apparecchiature moderne.

## 14.11 Potenziali e campi di Liènard-Wiechert

Nel capitolo 9 abbiamo imparato a calcolare i potenziali scalare e vettore nel punto  $\mathbf{r}$  al tempo  $t$  come sovrapposizione dei contributi delle cariche e delle correnti distribuite in volumetti fermi e abbiamo visto che l'unica differenza formale rispetto alle situazioni elettrostatica e magnetostatica è che il volumetto centrato in  $\mathbf{r}'$  contribuisce con la carica e la corrente che aveva al tempo pregresso  $t'$  tale che  $c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Ora, con riferimento alla figura 13), consideriamo una carica  $q$  in moto vario con legge oraria  $\mathbf{s}(t)$ ,

quindi con velocità  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{s}(t)/dt$ . Il calcolo del campo elettromagnetico prodotto dalla carica in moto non è semplice, ma Liénard ha mostrato come procedere già nel 1897, ben 8 anni prima che Einstein pubblicasse il suo lavoro sull'elettrodinamica dei corpi in moto. Assumiamo che la carica sia spalmata su un nastrino di lunghezza  $a$  in moto sulla traiettoria come un trenino sui binari, riservandoci di far tendere a zero  $a$ , ed indichiamo con  $t'$  l'istante al quale la coda del trenino contribuisce ai potenziali nel punto  $\mathbf{r}$  al tempo  $t$ , pensando di aver determinato il **tempo di emissione**  $t' = t'(t, \mathbf{r})$  risolvendo l'equazione

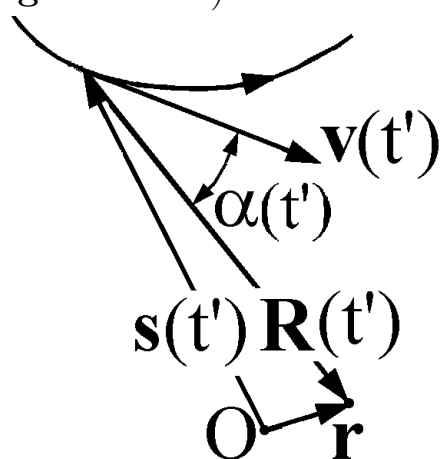
$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')| = R(t') \quad (14.23)$$

In figura 12a) abbiamo indicato con  $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{s}(t')$  lo spostamento dal punto di emissione al punto d'osservazione e con  $\alpha(t')$  l'angolo tra  $\mathbf{R}(t')$  e  $\mathbf{v}(t')$ . In figura 12b) abbiamo ingrandito enormemente un intorno del punto di emissione, abbiamo scelto l'asse  $x$  nel verso di  $\mathbf{v}(t')$ , con origine in coda al trenino, ed abbiamo indicato con  $\mathbf{n}(t') = \mathbf{R}(t')/R(t')$  il versore orientato dal punto di emissione al punto di osservazione. Ora scomponiamo l'asse  $x$  in tratti infinitesimi e procediamo al calcolo di  $\phi(t, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  sovrapponendo i potenziali prodotti dai vari tratti fermi. Dobbiamo tener presente che **il trattino compreso tra  $x$  ed  $x + dx$  contribuisce ai potenziali in  $\mathbf{r}$  al tempo  $t$  solo se il trenino di carica vi passa al tempo  $t'' = t' + x \cos \alpha/c$** . A tale istante il trenino ha coda in  $v(t'' - t')$  e testa in  $v(t'' - t') + a$ , quindi il trattino compreso tra  $x$  ed  $x + dx$  contribuisce ai potenziali solo se

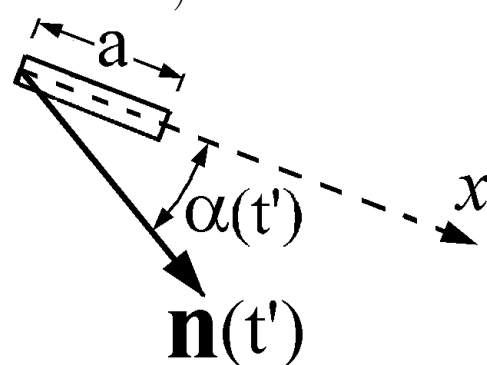
$$\frac{vx \cos \alpha}{c} \leq x \leq \frac{vx \cos \alpha}{c} + a \quad \text{ovvero se} \quad 0 \leq x \leq a' \quad \text{dove} \quad a' = \frac{a}{1 - v \cos \alpha/c}$$

Per  $\alpha = 0$  e per velocità prossime a  $c$  la lunghezza  $a'$  del segmento che contribuisce ai potenziali può diventare molto maggiore di  $a$ , ma le dimensioni delle particelle subatomiche non sono maggiori di qualche femtometro, quindi è lecito ammettere che  $a'$  rimanga sempre trascurabile rispetto alla distanza d'osservazione  $R(t') = c(t - t')$ . Poichè la carica non dipende dalla

Fig. 14.12 a)



b)



velocità, un trattino di lunghezza  $dx$  ha carica  $qdx/a$  e prodotto corrente per lunghezza  $q\mathbf{v}(t')dx/a$ , quindi contribuisce ai potenziali scalare e vettore con

$$d\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{qdx}{4\pi\epsilon_0 a R(t')} \quad , \quad d\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}(t') dx}{4\pi a R(t')} = \frac{\mathbf{v}(t')}{c^2} d\phi(t, \mathbf{r})$$

Sommando su tutti i trattini fermi che contribuiscono ai potenziali otteniamo

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a R(t')} \int_0^a dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R(t') |1 - v(t') \cos \alpha(t')/c|}$$

e vediamo che il risultato non dipende da  $a$ , quindi vale anche quando la carica è davvero puntiforme. A questo punto possiamo scrivere i **potenziali di Liènard-Wiechert**, ovvero i potenziali di Lorentz prodotti dalla carica in moto vario, nella forma

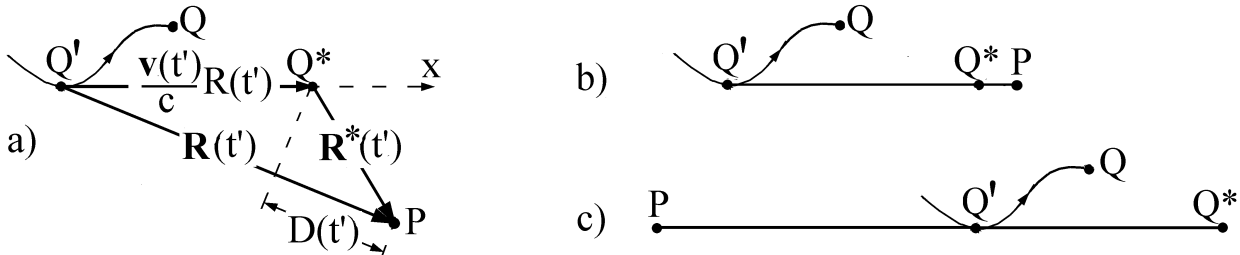
$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D(t')} \quad , \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}(t')}{c^2} \phi(t, \mathbf{r}) \quad (14.24)$$

dove la funzione  $t'(t, \mathbf{r})$  è definita implicitamente dall'equazione 23) e

$$D(t') = R(t') \left( 1 - \frac{v(t')}{c} \cos \alpha(t') \right) = R(t') - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \quad (14.25)$$

è il prodotto della distanza  $R(t')$  tra il punto di emissione ed il punto di osservazione per il fattore  $1 - v(t') \cos \alpha(t')/c$  che abbiamo già incontrato studiando l'effetto Doppler. Il significato fisico della distanza  $D(t')$  è illustrato in figura 13.  $Q$  è la posizione della carica all'istante d'osservazione

**Fig. 14.13**



$t$ ,  $Q'$  è la posizione della carica all'istante d'emissione  $t'$ ,  $Q^*$  è la posizione fittizia che la carica occuperebbe al tempo  $t$  se procedesse con la velocità che aveva al tempo  $t'$ ,  $\mathbf{R}^*(t')$  è lo spostamento dal punto  $Q^*$  al punto d'osservazione  $P$  e  $D(t')$  è la proiezione di  $\mathbf{R}^*(t')$  nella direzione di osservazione, ovvero sul versore  $\mathbf{n}(t')$ . Nei due casi estremi considerati in b) e c),  $D(t')$  si riduce alla distanza tra  $P$  e  $Q^*$ . Si noti che quando  $v(t')$  tende a  $c$ ,  $D(t')$  tende a zero nel caso di emissione in avanti considerato in b), e tende a  $2c(t - t')$  nel caso di emissione all'indietro considerato in c). Si noti anche che

$$\mathbf{R}^*(t') = \mathbf{R}(t') - R(t') \frac{\mathbf{v}(t')}{c} = R(t') \left( \mathbf{n}(t') - \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \right) \quad (14.26)$$



Ora, per prepararci a calcolare i campi elettrico e magnetico, dimostriamo che la funzione  $t'(t, \mathbf{r})$  ha derivata temporale e gradiente dati da

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R(t')}{D(t')} \quad , \quad \nabla t' = -\frac{\mathbf{R}(t')}{cD(t')} \quad (14.27)$$

Infatti, derivando rispetto a  $t$  ambo i membri dell'equazione 23) otteniamo

$$\begin{aligned} c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \sqrt{[x - s_x(t')]^2 + [y - s_y(t')]^2 + [z - s_z(t')]^2} = \\ &= \frac{\partial t' - [x - s_x(t')]v_x(t') - [y - s_y(t')]v_y(t') - [z - s_z(t')]v_z(t')}{R(t')} = \\ &= \frac{\partial t' \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{R(t')} \implies 1 = \frac{\partial t'}{\partial t} \left[1 - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{cR(t')}\right] = \frac{\partial t' D(t')}{\partial t R(t')} \end{aligned}$$

Analogamente, derivando ambo i membri dell'eq. 23) rispetto ad  $x$  otteniamo

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial t'}{\partial x} &= \frac{[x - s_x(t')][1 - v_x(t') \frac{\partial t'}{\partial x}] - [y - s_y(t')]v_y(t') \frac{\partial t'}{\partial x} - [z - s_z(t')]v_z(t') \frac{\partial t'}{\partial x}}{R(t')} \implies \\ &= \frac{\partial t'}{\partial x} \left[ R(t') - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R}(t')}{c} \right] = \frac{x - s_x(t')}{c} \implies \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{R_x(t')}{cD(t')} \end{aligned}$$

Risultati analoghi si ottengono per  $\partial t'/\partial y$  e  $\partial t'/\partial z$ , dunque le equazioni 27) sono davvero corrette. Si noti che, in un dato punto  $\mathbf{r}$  e ad un dato istante  $t$ , sia i potenziali, sia le derivate parziali della funzione  $t'(t, \mathbf{r})$  dipendono solo dalla posizione e dalla velocità della carica al tempo  $t'$ , ma i campi elettrico e magnetico dipendono anche dall'accelerazione, come stiamo per vedere.

Ricordando che il campo elettrico è legato ai potenziali dalla relazione  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$  si vede che

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D^2(t')} \left[ \nabla D(t') + \frac{\mathbf{v}(t')}{c^2} \frac{\partial D(t')}{\partial t} - \frac{D(t')\mathbf{a}(t')}{c^2} \frac{\partial t'}{\partial t} \right] \quad (14.28)$$

dove  $\mathbf{a}(t') = d\mathbf{v}(t')/dt'$  e

$$D(t') = c(t - t') - \frac{[x - s_x(t')]v_x(t') + [y - s_y(t')]v_y(t') + [z - s_z(t')]v_z(t')}{c}$$

Ora, omettendo provvisoriamente di evidenziare che  $D$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{v}$  ed  $\mathbf{a}$  sono funzioni di  $t'(t, \mathbf{r})$ , notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= c - c \frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial t' - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c} = c - c \frac{\partial t'}{\partial t} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2}\right) \\ \frac{\partial D}{\partial x} &= -c \frac{\partial t'}{\partial x} - \frac{v_x}{c} - \frac{\partial t' - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c} = -\frac{v_x}{c} - c \frac{\partial t'}{\partial x} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Risultati analoghi si ottengono per  $\partial D/\partial y$  e  $\partial D/\partial z$ , quindi

$$\nabla D = -\frac{\mathbf{v}}{c} - c\nabla t' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right)$$

Tenendo conto delle equazioni 27) e ricordando che  $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2$  si ottiene

$$\nabla D = -\frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\mathbf{R}}{D} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) \quad , \quad \frac{\partial D}{\partial t} = c - c\frac{R}{D} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right)$$

Da queste equazioni e dalla prima delle equazioni 27) si vede che il termine in parentesi quadra nell'equazione 28) risulta

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\mathbf{R}}{D} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{v}R}{cD} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) - \frac{\mathbf{a}}{c^2}R = \\ & = \frac{1}{D} \left[ (\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R) \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) - \frac{\mathbf{a}}{c^2}RD \right] = \frac{1}{D} \left[ \mathbf{R}^* \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) - \frac{\mathbf{a}}{c^2}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*) \right] = \\ & = \frac{\mathbf{R}^*}{\gamma^2 D} + \frac{1}{c^2 D} [\mathbf{R}^*(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*)] = \frac{\mathbf{R}^*}{\gamma^2 D} + \frac{\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^* \times \mathbf{a})}{c^2 D} \end{aligned}$$

Finalmente possiamo concludere che il campo elettrico prodotto da una carica in moto vario vale

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{R}^*(t')}{4\pi\epsilon_0\gamma^2(t')D^3(t')} + \frac{\mu_0 q \mathbf{R}(t') \times [\mathbf{R}^*(t') \times \mathbf{a}(t')]}{4\pi D^3(t')} \quad (14.29)$$

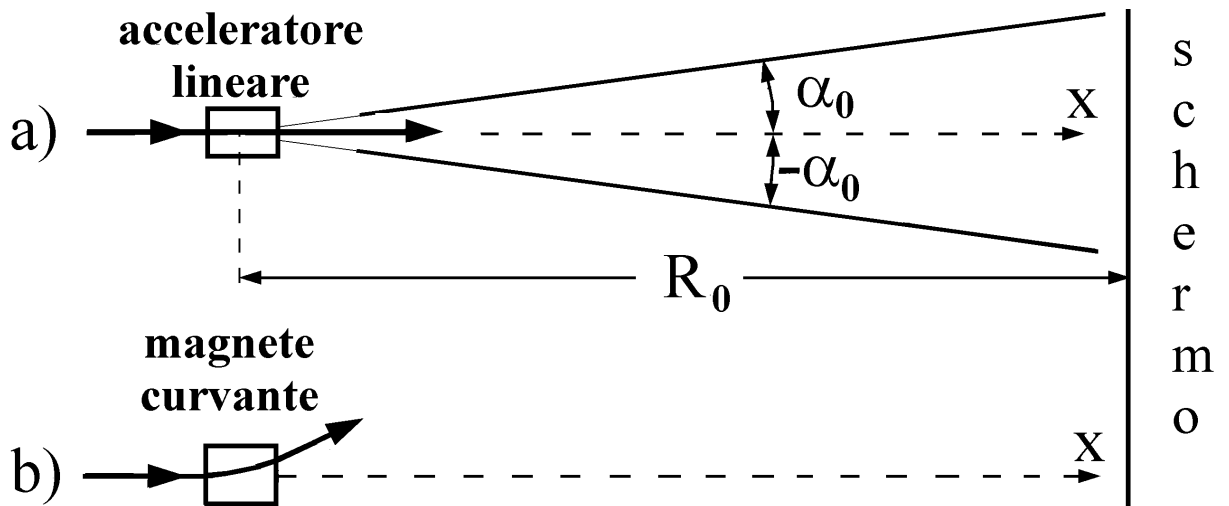
Il primo termine diverge dalla posizione  $Q^*$  che la carica raggiungerebbe al tempo  $t$  se conservasse la velocità che aveva al tempo  $t'$ ; per una carica ferma si riduce al campo coulombiano, per una carica in moto uniforme ha le caratteristiche descritte nel prossimo paragrafo. Il secondo termine è ortogonale al verso di emissione, si annulla sia quando  $\mathbf{a}(t')$  è nulla, sia quando  $\mathbf{a}(t')$  e  $\mathbf{R}^*(t')$  sono paralleli, e giace nel piano individuato da  $\mathbf{R}^*(t')$  e da  $\mathbf{a}(t')$ . Per vedere bene il suo andamento conviene riscriverlo con  $\mathbf{R}(t')$  sostituito da  $\mathbf{n}(t')R(t')$  e  $\mathbf{R}^*(t')$  sostituito da  $R(t')(\mathbf{n}(t') - \mathbf{v}/c)$ . Si vede così che

$$\mathbf{E}_{rad}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 q \mathbf{n}(t') \times [(\mathbf{n}(t') - \mathbf{v}(t')/c) \times \mathbf{a}(t')]}{4\pi R(t')[1 - \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]^3} \quad (14.30)$$

decade con l'inverso della distanza. In particolare, quando una carica in moto con velocità prossima a  $c$  accelera in una regione di dimensioni piccolissime rispetto alla distanza d'osservazione, come nei casi illustrati in figura 14, il campo di radiazione su uno schermo remoto ha valori di picco intensi solo per valori dell'angolo di emissione  $\alpha$  dell'ordine di  $1/\gamma$ . Nel caso a), l'accelerazione è parallela alla velocità ed il valore di picco del campo elettrico risulta

$$E_{rad} = \frac{\mu_0 q a \sin \alpha}{4\pi R_0 [1 - v \cos \alpha / c]^3}$$

Fig. 14.14

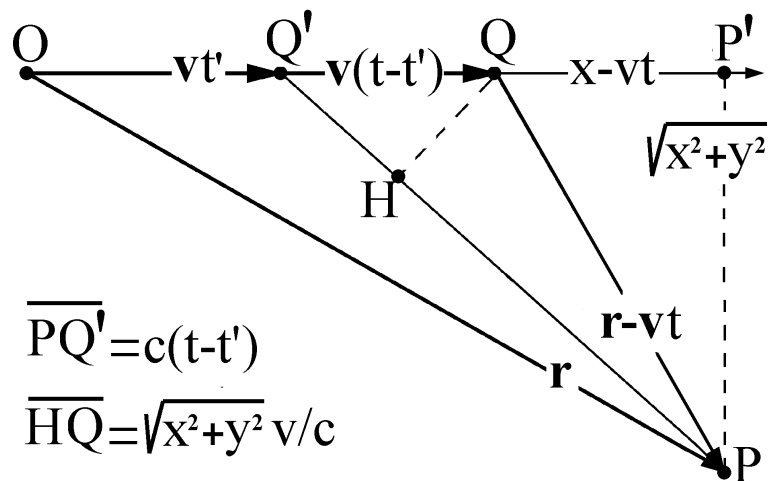


quindi è nullo in avanti e prende valori massimi per  $\alpha = \pm\alpha_0 \approx \pm 0.45/\gamma$ . Nel caso b) l'accelerazione è trasversa alla velocità ed il campo nei punti dello schermo remoto verso i quali ha puntato la velocità della carica durante l'attraversamento del magnete raggiunge il valore di picco

$$E_{rad} = \frac{\mu_0 q a}{4\pi R_0 [1 - v/c]^2}$$

Lasciamo per esercizio di dimostrare che  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{E}_{rad}$  ed il campo magnetico di radiazione  $\mathbf{B}_{rad}$  formano terna ortogonale destra con  $B_{rad} = E_{rad}/c$ , e passiamo a considerare il campo prodotto da una carica in moto uniforme. Con riferimento alla figura 15, pensiamo che la carica  $q$  sia in moto uniforme

Fig. 14.15



lungo l'asse  $x$  e passi dall'origine al tempo zero. In tal caso, i punti  $Q^*$  e  $Q$  coincidono,  $\mathbf{R}^*(t')$  si riduce a  $\mathbf{r} - \mathbf{vt}$  e  $D(t')$  può essere espressa come funzione esplicita di  $t$  ed  $\mathbf{r}$ . Infatti i triangoli  $Q'QH$  e  $Q'PP'$  sono simili, quindi  $\overline{HQ} = \sqrt{y^2 + z^2} v/c$  e

$$D = \overline{HP} = \sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{c^2}(y^2 + z^2)} = \sqrt{(x-vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}$$

Sostituendo nell'equazione 29), possiamo concludere che la carica in moto uniforme sull'asse  $x$ , passante dall'origine al tempo zero, produce il campo elettrico

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\gamma q(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (14.31)$$

Considereremo attentamente questo campo ed il campo magnetico ad esso associato nel prossimo capitolo.

## **ESERCIZI**

# Capitolo 15

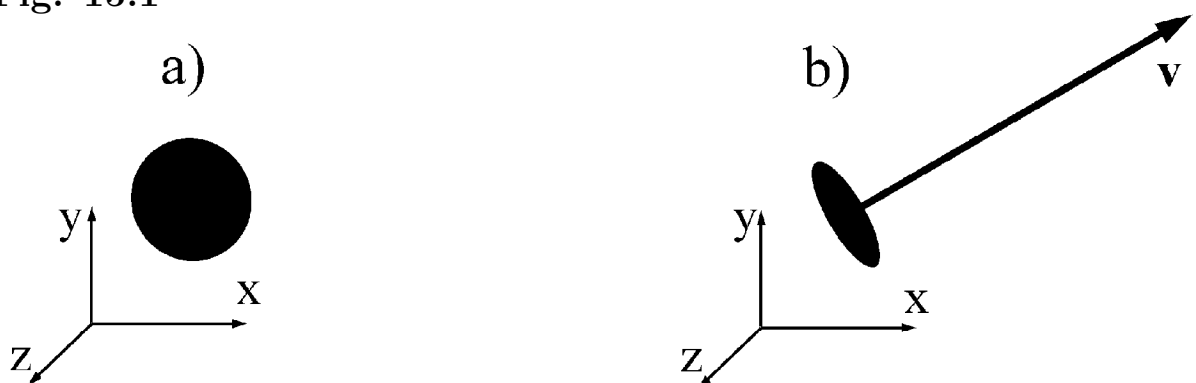
## Elementi di elettrodinamica

Nei primi paragrafi di questo capitolo impariamo a calcolare il campo EM che osserviamo noi, partendo da quello osservato da Primo. Ciò è molto utile, ad esempio, per calcolare il campo EM prodotto da cariche o da dipoli armonici in moto uniforme: pensando che Primo accompagni la carica o il dipolo e partendo dal campo EM di Primo, che conosciamo bene, possiamo calcolare il campo EM che osserviamo noi. Nel paragrafo 6 giungiamo finalmente al cuore della relatività ristretta e dimostriamo che il momento  $\mathbf{p}(t)$  e l'energia  $\mathcal{E}(t)$  di una particella sono legati dalla relazione  $\mathcal{E}(t) = c\sqrt{m^2c^2 + p^2(t)}$ . Infine studiamo la dinamica di particelle cariche in campi elettrici e magnetici stazionari e descriviamo in una nuova luce le collisioni di fotoni con particelle cariche e con atomi neutri.

### 15.1 Quadridensità di corrente e quadrinabla

Con riferimento alla figura 1 consideriamo un oggetto che, a riposo, ha forma sferica, volume  $\mathcal{V}_p$  e densità di carica uniforme  $\rho_p = q/\mathcal{V}_p$ . Quando l'oggetto

Fig. 15.1



è in moto con velocità  $\mathbf{v}(t)$ , come in b), noi osserviamo un disco di volume  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_p/\gamma(t)$  ed osserviamo densità di carica e di corrente nulle ovunque tranne che nel volume occupato dal disco, dove valgono

$$\rho(t) = \gamma(t)\rho_p \quad \text{e} \quad \mathbf{j}(t) = \rho(t)\mathbf{v}(t) = \gamma(t)\rho_p\mathbf{v}(t)$$

Ciò comporta che la grandezza

$$j^\mu \equiv (c\rho(t), \mathbf{j}(t)) \equiv \rho_p(\gamma(t)c, \gamma(t)\mathbf{v}(t)) \equiv \rho_p u^\mu(t)$$

è il prodotto della densità di carica propria per la quadrivelocità, quindi è un quadrivettore, o meglio è un campo quadrivettoriale uniforme nel volume occupato dall'oggetto e nullo altrove. Ciò suggerisce di descrivere una generica distribuzione di cariche e correnti con la **quadridentità di corrente**

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) \equiv (c\rho(t, \mathbf{r}), \mathbf{j}(t, \mathbf{r})) \equiv (c\rho(t, \mathbf{r}), j_x(t, \mathbf{r}), j_y(t, \mathbf{r}), j_z(t, \mathbf{r})) \quad (15.1)$$

Ora pensiamo che Primo osservi densità di carica  $\rho(t', \mathbf{r}')$  e densità di corrente  $\mathbf{j}(t', \mathbf{r}')$  e domandiamo: quali densità di carica e di corrente osserviamo noi? Per rispondere dobbiamo usare due volte le leggi di trasformazioni di Lorentz, dapprima per passare dalle coordinate  $(t, \mathbf{r})$  alle coordinate  $(t', \mathbf{r}')$  che consentono di individuare  $(c\rho', \mathbf{j}')$ , poi per passare da  $(c\rho', \mathbf{j}')$  a  $(c\rho, \mathbf{j})$ . Per esteso le leggi di trasformazione delle densità di carica e corrente sono

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \Gamma [c\rho'(t', \mathbf{r}') + \frac{V}{c^2} j'_x(t', \mathbf{r}')] \quad , \quad j_x(t, \mathbf{r}) = \Gamma [j'_x(t', \mathbf{r}') + V\rho'(t', \mathbf{r}')]$$

$$j_y(t, \mathbf{r}) = j'_y(t', \mathbf{r}') \quad , \quad j_z(t, \mathbf{r}) = j'_z(t', \mathbf{r}')$$

dove  $(t, \mathbf{r})$  e  $(t', \mathbf{r}')$  individuano lo stesso evento. Ciò è sottinteso anche quando si usano scritte abbreviate del tipo  $\rho = \Gamma [\rho' + (V/c^2)j'_x]$ .

A questo punto riscriviamo la legge di conservazione della carica nella forma

$$\frac{\partial c\rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \frac{\partial j_x(t, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial j_y(t, \mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial j_z(t, \mathbf{r})}{\partial z} = 0$$

e procediamo a verificare che le leggi di trasformazione di Lorentz la rendono invariante. Allo scopo basta verificare che il quadrioperatore differenziale

$$\mathbf{quadrinabla} \quad \partial_\mu \equiv \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) \equiv \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (15.2)$$

si trasforma davvero come un quadrivettore covariante. In tal caso infatti la legge di trasformazione della carica prende la forma **invariante a vista**

$$\partial_\mu j^\mu(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (15.3)$$

Per convincerci che è davvero così, basta ricordare la regola di differenziazione delle funzioni di funzioni e notare che

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \Gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \Gamma V \frac{\partial}{\partial x'} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = -\Gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} + \Gamma \frac{\partial}{\partial x'} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

Si noti che il quadrinabla covariante ha parte spaziale  $+\nabla$ , mentre i normali quadrivettori covarianti hanno parte spaziale preceduta dal segno meno. Si noti anche che  $\partial_\mu x^\mu = 4$  e che  $\partial_\mu \partial^\mu = \square$  è l'operatore differenziale di D'Alembert ed è invariante.

## 15.2 Scrittura invariante a vista delle leggi EM

Cominciamo a scrivere la condizione di Lorentz nella forma

$$\frac{\partial\phi(t, \mathbf{r})}{c^2\partial t} + \frac{\partial A_x(t, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(t, \mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(t, \mathbf{r})}{\partial z} = \partial_\mu A^\mu(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (15.4)$$

Poiché  $\partial_\mu$  è covariante, possiamo essere certi che

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) \equiv \left( \frac{\phi(t, \mathbf{r})}{c}, \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \right) \equiv \left( \frac{\phi(t, \mathbf{r})}{c}, A_x(t, \mathbf{r}), A_y(t, \mathbf{r}), A_z(t, \mathbf{r}) \right) \quad (15.5)$$

è un campo quadrivettoriale controvariante. Lo si vede anche notando che le equazioni di D'Alembert  $\square\phi = \rho/\epsilon_0 = \mu_0 c^2 \rho$  e  $\square\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$  sono compendiate dall'equazione

$$\square A^\mu(t, \mathbf{r}) = \mu_0 j^\mu(t, \mathbf{r}) \quad (15.6)$$

Passiamo a considerare il **tensore elettromagnetico**

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = \partial^\mu A^\nu(t, \mathbf{r}) - \partial^\nu A^\mu(t, \mathbf{r}) \quad (15.7)$$

e procediamo a dimostrare che

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (15.8)$$

La definizione rende evidente che  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  è antisimmetrico: i suoi elementi cambiano segno quando gli indici vengono scambiati. Pertanto possiamo limitarci a considerare gli elementi sottodiagonali. Ricordando che le componenti spaziali di  $\partial^\mu$  hanno segno negativo, mentre quelle di  $A^\mu$  hanno segno positivo, è facile verificare che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{10} &= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = -\frac{\partial\phi}{c\partial x} - \frac{\partial A_x}{c\partial t} = \frac{E_x}{c} \\ \mathcal{F}^{20} &= \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 = -\frac{\partial\phi}{c\partial y} - \frac{\partial A_y}{c\partial t} = \frac{E_y}{c} \\ \mathcal{F}^{30} &= \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = -\frac{\partial\phi}{c\partial z} - \frac{\partial A_z}{c\partial t} = \frac{E_z}{c} \\ \mathcal{F}^{21} &= \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = B_z \\ \mathcal{F}^{31} &= \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -B_y \\ \mathcal{F}^{32} &= \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = B_x \end{aligned}$$

Lasciamo per esercizio di calcolare le componenti del tensore elettromagnetico doppio-covariante  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})$  e passiamo a dimostrare che le equazioni di Maxwell inomogenee sono riassunte dall'equazione

$$\mu_0 j^\nu(t, \mathbf{r}) = \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) \quad (15.9)$$

Infatti per  $\nu = 0$  questa equazione diventa

$$\mu_0 c \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0 c} = \partial_0 \mathcal{F}^{00} + \partial_1 \mathcal{F}^{10} + \partial_2 \mathcal{F}^{20} + \partial_3 \mathcal{F}^{30} = \frac{\partial E_x}{c \partial x} + \frac{\partial E_y}{c \partial y} + \frac{\partial E_z}{c \partial z}$$

ed è la legge di Gauss. E per  $\nu = 1, 2, 3$  l'equazione 9) è la proiezione sugli assi  $x, y$  e  $z$  della legge di Ampère-Maxwell, ad esempio per  $\nu = 1$

$$\mu_0 j_x = \partial_0 \mathcal{F}^{01} + \partial_1 \mathcal{F}^{11} + \partial_2 \mathcal{F}^{21} + \partial_3 \mathcal{F}^{31} = -\frac{\partial E_x}{c^2 \partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

La scrittura delle equazioni di Maxwell omogenee è un po' più involuta, consiste nell'affermare che l'equazione

$$\partial^\eta \mathcal{F}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\eta}(t, \mathbf{r}) + \partial^\nu \mathcal{F}^{\eta\mu}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (15.10)$$

vale per qualunque scelta dei tre indici. Per convincercene cominciamo a notare che vale quando almeno due indici sono uguali, ad esempio per  $\eta = \mu$  il primo membro si riduce a  $\partial^\mu (\mathcal{F}^{\mu\nu} + \mathcal{F}^{\nu\mu})$  ed è davvero nullo. Poi notiamo che quando gli indici sono 123 l'equazione 10) stabilisce che non esistono i monopoli magnetici, infatti

$$\partial^1 \mathcal{F}^{23} + \partial^2 \mathcal{F}^{31} + \partial^3 \mathcal{F}^{12} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Infine, notiamo che quando gli indici sono 012, 013 e 023, l'equazione 10) è la proiezione sugli assi  $z, y$  ed  $x$  della legge di induzione, ad esempio

$$\partial^0 \mathcal{F}^{12} + \partial^1 \mathcal{F}^{20} + \partial^2 \mathcal{F}^{01} = -\frac{\partial B_z}{c \partial t} - \frac{\partial E_y}{c \partial x} + \frac{\partial E_x}{c \partial y} = 0$$

Passiamo a considerare l'equazione invariante a vista

$$f^\mu(t, \mathbf{r}) = \mathcal{F}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) j_\nu(t, \mathbf{r}) \quad (15.11)$$

e procediamo ad identificare il campo quadrivettoriale  $f^\mu(t, \mathbf{r})$ . Poiché  $j_\nu$  ha componenti spaziali precedute dal segno meno, si vede che

$$f^0 = \mathcal{F}^{00} j_0 + \mathcal{F}^{01} j_1 + \mathcal{F}^{02} j_2 + \mathcal{F}^{03} j_3 = (E_x j_x + E_y j_y + E_z j_z)/c = w/c$$

$$f^1 = \mathcal{F}^{10} j_0 + \mathcal{F}^{11} j_1 + \mathcal{F}^{12} j_2 + \mathcal{F}^{13} j_3 = E_x \rho + B_z j_y - B_y j_z = f_x$$

$$f^2 = \mathcal{F}^{20} j_0 + \mathcal{F}^{21} j_1 + \mathcal{F}^{22} j_2 + \mathcal{F}^{23} j_3 = E_y \rho - B_z j_x + B_x j_z = f_y$$

$$f^3 = \mathcal{F}^{30} j_0 + \mathcal{F}^{31} j_1 + \mathcal{F}^{32} j_2 + \mathcal{F}^{33} j_3 = E_z \rho + B_y j_x - B_x j_y = f_z$$



dove  $f_x$ ,  $f_y$  ed  $f_z$  sono le componenti della densità di forza

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$$

che il campo elettromagnetico esercita sulla materia e  $w(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  è la densità di potenza ceduta dal campo elettromagnetico alla materia. Ciò suggerisce il nome di **quadridensità di forza** per il campo quadrivettoriale

$$f^\mu(t, \mathbf{r}) \equiv \left( \frac{w(t, \mathbf{r})}{c}, \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) \right) \equiv \left( \frac{w(t, \mathbf{r})}{c}, f_x(t, \mathbf{r}), f_y(t, \mathbf{r}), f_z(t, \mathbf{r}) \right) \quad (15.12)$$

Si noti bene che  $w$  può essere negativo, come avviene ad esempio quando una carica in moto è frenata dal campo elettromagnetico.

Aggiungiamo che è molto diffuso l'uso di dire che le equazioni quadritensoriali sono covarianti, ad intendere che i due membri covariano al variare dell'osservatore. Ma ciò può generare malintesi: le equazioni sono invarianti, ed i due membri possono essere entrambi invarianti, o entrambi quadrivettori controvarianti, o entrambi quadrivettori covarianti, o entrambi tensori doppio-controvarianti, e così via. Dunque è preferibile dire che le equazioni quadritensoriali sono **invarianti a vista**.

Infine sottolineiamo che **il prodotto scalare di due campi quadrivettoriali è un campo scalare in quattro dimensioni**: dipende dall'evento, ma non dipende dall'osservatore. Ad esempio sono campi scalari

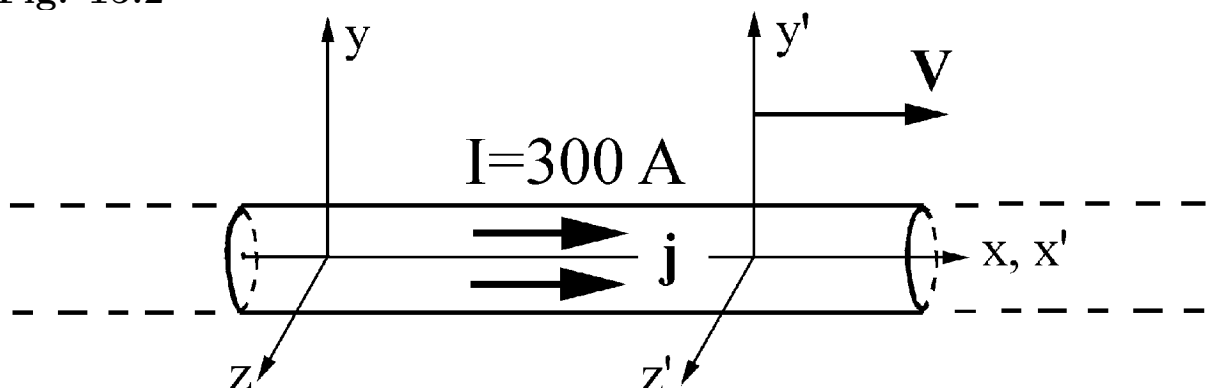
$$j^\mu(t, \mathbf{r})A_\mu(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r})\phi(t, \mathbf{r}) - \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r})$$

$$j^\mu(t, \mathbf{r})j_\mu(t, \mathbf{r}) = c^2\rho^2(t, \mathbf{r}) - j^2(t, \mathbf{r}) \quad , \quad A^\mu(t, \mathbf{r})A_\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\phi^2(t, \mathbf{r})}{c^2} - A^2(t, \mathbf{r})$$

### 15.3 Corrente uniforme in un cavo rettilineo

Ora possiamo analizzare con precisione la situazione considerata nel paragrafo 6.2, che ripresentiamo in figura 2. Per noi, un cavo conduttore indefinito centrato sull'asse  $x$  ha densità di carica nulla ed è percorso dalla corrente  $I$ , distribuita uniformemente nella sezione  $S$ . Nel paragrafo 6.2 abbiamo am-

Fig. 15.2



messo che un marciatore in moto lungo il cavo osservi la stessa corrente che osserviamo noi ed abbiamo concluso che osserva una densità lineare di carica proporzionale alla velocità di marcia, pari a  $-IV/c^2$ . Ora possiamo precisare che Primo, in moto con velocità  $\mathbf{V}$  parallela al cavo, osserva le densità di carica e corrente

$$\rho' = \Gamma[\rho - \frac{V}{c^2}j_x] = -\Gamma\frac{V}{c^2}j_x \quad , \quad j'_x = \Gamma[j_x - V\rho] = \Gamma j_x$$

Inoltre, Primo osserva la sezione che osserviamo noi, quindi osserva la densità lineare di carica  $\lambda' = S\rho'$  e la corrente  $I' = Sj'_x$  date da

$$\lambda' = -\Gamma I \frac{V}{c^2} \quad , \quad I' = \Gamma I$$

Naturalmente quando Primo è un marciatore, o un vetturino, o persino un pilota di jet supersonico,  $\Gamma$  differisce pochissimo dall'unità ed i risultati si riducono a quelli anticipati nel paragrafo 6.2.

## 15.4 Trasformazioni del campo EM e delle forze

Nel paragrafo 2 abbiamo introdotto il tensore elettromagnetico  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ , ora consideriamo le leggi di trasformazione delle sue componenti. Anzitutto notiamo che  $B_x$  è invariante perché sono invarianti le componenti con indici 2 e 3 di  $\partial^\mu$  e  $A^\mu$ . Poi notiamo che anche  $E_x$  è invariante, infatti

$$\begin{aligned} E_x/c &= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = \Gamma^2 \left[ (\partial'^1 + \frac{V}{c}\partial'^0)(A'^0 + \frac{V}{c}A'^1) - (\partial'^0 + \frac{V}{c}\partial'^1)(A'^1 + \frac{V}{c}A'^0) \right] = \\ &= \Gamma^2 \left[ (\partial'^1 A'^0 - \partial'^0 A'^1)(1 - \frac{V^2}{c^2}) \right] = \partial'^1 A'^0 - \partial'^0 A'^1 = E'_x/c \end{aligned}$$

Infine notiamo che

$$\begin{aligned} B_y &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = \Gamma \left[ (\partial'^1 + (V/c)\partial'^0)A'^3 - \partial'^3(A'^1 + (V/c)A'^0) \right] = \\ &= \Gamma \left[ \partial'^1 A'^3 - \partial'^3 A'^1 + (V/c)(\partial'^0 A'^3 - \partial'^3 A'^0) \right] = \Gamma (B'_y - (V/c^2)E'_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_z &= \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 = \Gamma \left[ \partial'^2(A'^1 + (V/c)A'^0) - (\partial'^1 + (V/c)\partial'^0)A'^2 \right] = \\ &= \Gamma \left[ \partial'^2 A'^1 - \partial'^1 A'^2 + (V/c)(\partial'^2 A'^0 - \partial'^0 A'^2) \right] = \Gamma (B'_z + (V/c^2)E'_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y/c &= \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 = \Gamma \left[ \partial'^2(A'^0 + (V/c)A'^1) - (\partial'^0 + (V/c)\partial'^1)A'^2 \right] = \\ &= \Gamma \left[ \partial'^2 A'^0 - \partial'^0 A'^2 + (V/c)(\partial'^2 A'^1 - \partial'^1 A'^2) \right] = \Gamma (E'_y/c + (V/c)B'_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z/c &= \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = \Gamma \left[ \partial'^3(A'^0 + (V/c)A'^1) - (\partial'^0 + (V/c)\partial'^1)A'^3 \right] = \\ &= \Gamma \left[ \partial'^3 A'^0 - \partial'^0 A'^3 + (V/c)(\partial'^3 A'^1 - \partial'^1 A'^3) \right] = \Gamma (E'_z/c - (V/c)B'_y) \end{aligned}$$

Insomma, le leggi di trasformazione del campo elettromagnetico sono

$$\begin{aligned}
B_x(t, \mathbf{r}) &= B'_x(t', \mathbf{r}') \\
B_y(t, \mathbf{r}) &= \Gamma[B'_y(t', \mathbf{r}') - (V/c^2)E'_z(t', \mathbf{r}')] \\
B_z(t, \mathbf{r}) &= \Gamma[B'_z(t', \mathbf{r}') + (V/c^2)E'_y(t', \mathbf{r}')] \\
E_x(t, \mathbf{r}) &= E'_x(t', \mathbf{r}') \\
E_y(t, \mathbf{r}) &= \Gamma[E'_y(t', \mathbf{r}') + VB'_z(t', \mathbf{r}')] \\
E_z(t, \mathbf{r}) &= \Gamma[E'_z(t', \mathbf{r}') - VB'_y(t', \mathbf{r}')]
\end{aligned} \tag{15.13}$$

Naturalmente le leggi di trasformazione inverse si ottengono trasferendo gli apici ai primi membri e sostituendo  $V$  con  $-V$ .

Ora pensiamo che al tempo  $t'$  una carica  $q$  sia ferma per Primo. In tal caso Primo osserva che la carica è soggetta alla forza  $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$ , mentre noi osserviamo che al tempo  $t$ , corrispondente a  $t'$ , la carica è soggetta alla forza di Lorentz  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$  che ha componenti

$$\begin{aligned}
F_x &= q(E_x + 0) = qE'_x = F'_x \\
F_y &= q(E_y - VB_z) = q \left[ \Gamma(E'_y + VB'_z) - V\Gamma \left( B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y \right) \right] = qE'_y\Gamma \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{F'_y}{\Gamma} \\
F_z &= q(E_z + VB_y) = q \left[ \Gamma(E'_z - VB'_y) + V\Gamma \left( B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z \right) \right] = qE'_z\Gamma \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{F'_z}{\Gamma}
\end{aligned}$$

Infine si noti che, quando  $\Gamma$  è quasi unitario, le leggi 13) si riducono a

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{V} \times \mathbf{E}'/c^2 \quad , \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{V} \times \mathbf{B}' \tag{15.14}$$

e la forza è invariante come in meccanica classica. Ma in generale è **invariante solo la componente longitudinale della forza, le componenti trasverse sono contratte rispetto a quelle della forza propria.**

## ESERCIZI

- 1) Dimostrare che  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  ed  $E^2 - c^2B^2$  sono invarianti.
- 2) Sull'asse di un solenoide lineare indefinito  $B = 1 \text{ T}$ . Quale campo magnetico osserva Primo quando corre parallelamente all'asse con  $V = 0.6 c$ ?
- 3) In un condensatore piano il campo elettrico vale  $E = 1000 \text{ V/m}$  ed il campo magnetico è nullo. Primo corre parallelamente alle armature con  $V = 0.8c$ . a) Mostrare che anche per Primo il campo elettrico è normale alle armature. b) Mostrare che Primo osserva un campo magnetico normale al campo elettrico e alla velocità. c) Calcolare le intensità dei campi per Primo.
- 4) Per noi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono ortogonali con  $E = 100 \text{ V/m}$  e  $B = 1 \text{ T}$ . Primo corre nella direzione di  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  con  $V = E/B$ . Calcolare  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B}'$ .

## 15.5 Campi creati da una carica in moto uniforme

Pensiamo che una carica in moto uniforme lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$  passi dall'origine al tempo zero. Primo, in moto con  $V = v$  ( $\Gamma = \gamma$ ), ha la carica

ferma nell'origine ed osserva campo magnetico nullo e campo elettrico

$$\mathbf{E}' \equiv (x', y', z') \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Dalle leggi di trasformazione si vede che, per noi,  $B_x$  è nullo e

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{q\gamma(x - vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}}$$

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{\gamma qy'}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma qy}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}}$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{\gamma qz'}{4\pi\epsilon_0(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma qz}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}}$$

$$B_y = -\frac{\gamma v}{c^2} E'_z = -\frac{\gamma v qz'}{4\pi\epsilon_0 c^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = -\frac{\gamma qvz}{4\pi\epsilon_0 c^2 [\gamma^2(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}}$$

$$B_z = \frac{\gamma v}{c^2} E'_y = \frac{\gamma v qy'}{4\pi\epsilon_0 c^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma qvy}{4\pi\epsilon_0 c^2 [\gamma^2(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}}$$

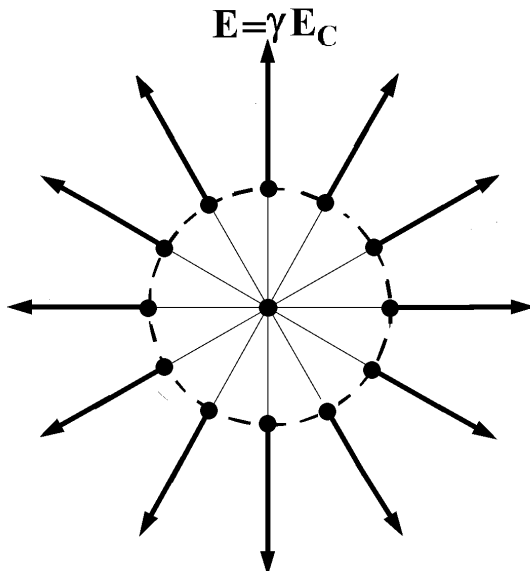
In forma vettoriale possiamo scrivere

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\gamma q(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (15.15)$$

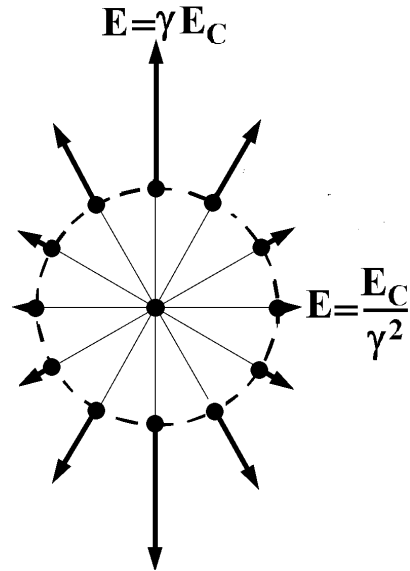
$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\gamma q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{c^2} \quad (15.16)$$

Dunque, **in qualunque punto ed a qualunque istante il campo elettrico è radiale: esce dalla posizione occupata allo stesso istante dalla carica.** Si noti bene sul piano  $x = vt$  il campo elettrico è  $\gamma$  volte più intenso del campo coulombiano  $E_C$  che sarebbe presente se la carica fosse

**Fig. 15.3** a)



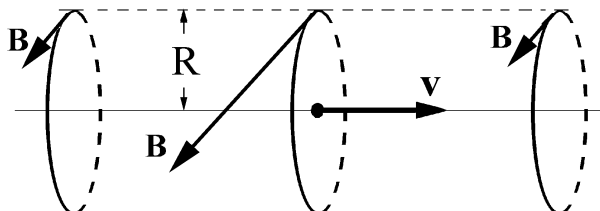
b)



ferma, come mostrato in figura 3a), mentre sull'asse  $x$ , per  $|x - vt| = l$ , il campo elettrico risulta  $q/(4\pi\epsilon_0\gamma^2l^2)$  ed è  $\gamma^2$  volte meno intenso del campo coulombiano, come mostrato in figura 3b). Insomma, **il campo elettrico prodotto dalla carica in moto uniforme è radiale, ha completa simmetria avanti-dietro e decade con l'inverso del quadrato della distanza dal punto occupato istantaneamente dalla particella, ma non è isotropo!** A parità di distanza dal punto occupato dalla carica al tempo  $t$ , il campo elettrico è intenso in direzione trasversa e debole in direzione longitudinale.

Passiamo al campo magnetico. Dall'equazione 16) si vede che le linee di flusso di  $\mathbf{B}$  sono circonferenze centrate sulla traiettoria in piani normali a  $\mathbf{v}$ , come mostrato in figura 13; al tempo  $t$  il campo magnetico è massimo sul piano  $x = vt$  contenente la carica; su tale piano, l'intensità vale  $B = \gamma\mu_0qv/4\pi R^2$  ed è proporzionale a  $\gamma$ . Naturalmente anche il campo magnetico viaggia insieme alla particella senza alcun ritardo.

**Fig. 15.4**



Infine pensiamo che due cariche,  $q_1$  e  $q_2$ , siano agli estremi di un segmento di lunghezza di riposo  $l$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$ , e pensiamo che  $q_1$  passi dall'origine al tempo zero. Quando il segmento è disposto sull'asse  $x$ , al tempo zero la carica  $q_2$  è in  $x = l/\gamma$  ed è sottoposta al campo elettrico  $q_1/4\pi\epsilon_0\gamma^2x^2$ , quindi le due cariche interagiscono con forza di intensità

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2(l/\gamma)^2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0l^2}$$

proprio come se fossero ferme. Invece, quando il segmento è disposto sull'asse  $y$ , sulla carica  $q_2$  agisce la forza di Lorentz  $\mathbf{F} = q_2[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  che risulta  $\gamma$  volte **minore** della forza che agirebbe tra le due cariche ferme. In tal caso, infatti, il campo elettrico agente sulla carica  $q_2$  vale  $E = q_1\gamma/4\pi\epsilon_0l^2$  e l'equazione 16) assicura che  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -(v^2/c^2)E$ , quindi la forza di Lorentz ha intensità

$$F = q_2E(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{q_2E}{\gamma^2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\gamma l^2}$$

Insomma: **la forza agente sulle due cariche ha componente longitudinale invariante e componente trasversa contratta.**

### ESERCIZI

1) Al tempo zero un protone passa dall'origine con  $\mathbf{v}$  costante. Calcolare i valori di picco di  $E$  e  $B$  in un punto a distanza di 10 cm dalla traiettoria.

## 15.6 Quadrivettore d'onda, aberrazione stellare, trasformazione delle intensità di OPPM

Un'OPPM che per noi si propaga nel vuoto con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e frequenza  $\omega = ck$ , si propaga nel vuoto anche per Primo, con vettore d'onda  $\mathbf{k}'$  e frequenza  $\omega' = ck'$ . Pertanto l'equazione  $k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0$  è invariante e

$$k^\mu \equiv (k, \mathbf{k}) \equiv (k, k_x, k_y, k_z)$$

è un quadrivettore controvariante di modulo nullo: il **quadrivettore d'onda**. Ciò comporta che le sue componenti si trasformano con le leggi

$$k = \Gamma(k' + \frac{V}{c}k'_x) , \quad k_x = \Gamma(k'_x + \frac{V}{c}k') , \quad k_y = k'_y , \quad k_z = k'_z$$

che possiamo scrivere anche nella forma

$$k = \Gamma k'(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha') , \quad k \cos \alpha = \Gamma k'(\cos \alpha' + \frac{V}{c}) , \quad k \sin \alpha = k' \sin \alpha'$$

Gli angoli  $\alpha$  ed  $\alpha'$  formati da  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  con l'asse delle  $x$  risultano legati dalla relazione

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + V/c}{1 + (V/c) \cos \alpha'} \quad (15.17)$$

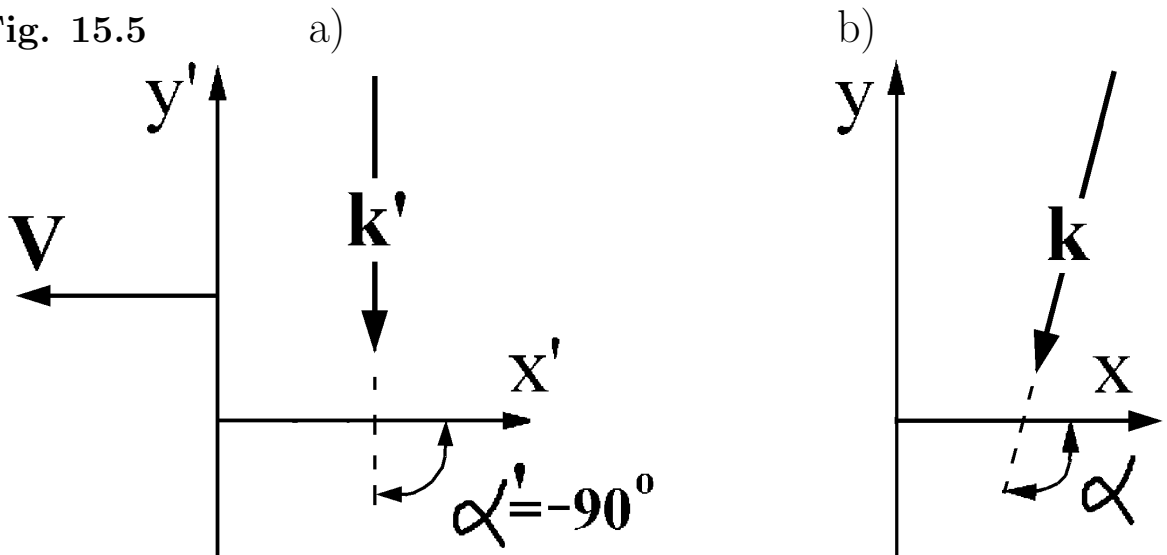
Come al solito le relazioni inverse si ottengono trasferendo gli apici a primo membro e sostituendo  $V$  con  $-V$ . Si noti che l'equazione 17) può essere ottenuta anche partendo dalla legge di trasformazione delle velocità, come suggerito nell'esercizio 4 del paragrafo 14.9.

Come primo esempio di applicazione delle leggi di trasformazione del vettore d'onda riprendiamo in esame la situazione considerata nel paragrafo 14.3. Pensiamo che il dipolo oscillante con frequenza propria  $\omega_p$  sia nell'origine di Primo, poniamo  $V = v$ ,  $\Gamma = \gamma$  e ricordiamo che per Primo la radiazione emessa ha  $k' = \omega_p/c$  indipendente dal verso di emissione. Ora basta notare che  $k' = \gamma k(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)$  per giungere all'equazione 14.6), infatti

$$k = \frac{k'}{\gamma(1 - (v/c) \cos \alpha)} \quad \implies \quad \omega(\alpha) = \frac{\omega_p \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c) \cos \alpha}$$

Un'applicazione interessante dell'equazione 17) consiste nel calcolo dell'angolo di aberrazione stellare. Pensiamo che Primo sia fermo rispetto al Sole ed osservi una stella in direzione normale al piano dell'orbita terrestre, come mostrato in figura 5a). Noi terrestri abbiamo orientato l'asse  $x$  nel verso della velocità di rivoluzione, quindi Primo viaggia con  $V = -30 \text{ km/s}$  e l'equazione 17) si riduce a  $\cos \alpha = -10^{-4}$ , ovvero  $\alpha = -90^\circ 00' 20.6''$ . Dunque, l'aberrazione stellare è certamente molto più piccola di quanto appare in figura 5b), ma è certo che per puntare un telescopio sulla stella dobbiamo inclinarlo proprio come se "piovessero" fotoni.

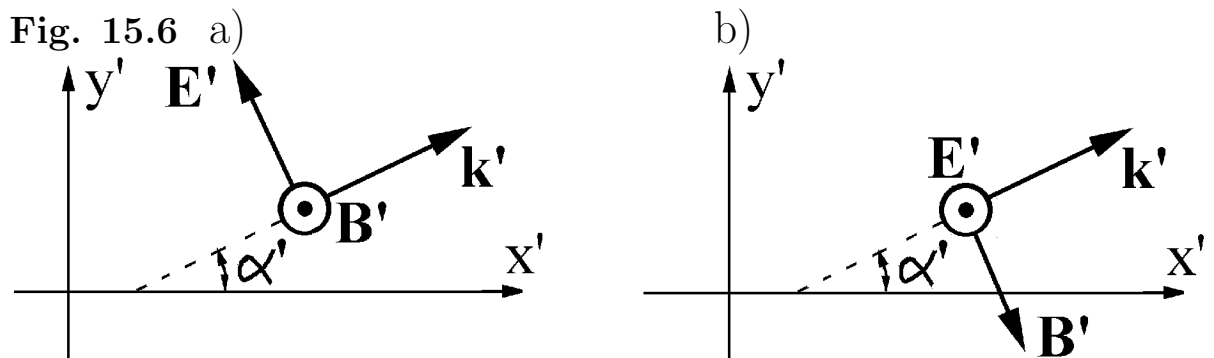
Fig. 15.5



Passiamo a studiare i campi che descrivono una stessa OPPMPL per noi e per Primo. Sappiamo che si ottengono moltiplicando i vettori fissi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  per il fattore di fase  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ . La fase  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t = -k^\mu x_\mu$  è, segno a parte, il prodotto scalare del quadrivettore d'onda per il quadrispostamento, quindi dipende dall'evento, ma non dall'osservatore. Di conseguenza i fattori di fase nei primi membri delle equazioni 13) sono uguali a quelli nei secondi membri, quindi le leggi di trasformazione dei campi dell'OPPMPL si riducono a relazioni tra le componenti dei vettori fissi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B}'$ , precisamente

$$\begin{aligned} B_x &= B'_x & , & \quad E_x = E'_x \\ B_y &= \Gamma(B'_y - (V/c^2)E'_z) & , & \quad E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z) \\ B_z &= \Gamma(B'_z + (V/c^2)E'_y) & , & \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y) \end{aligned} \quad (15.18)$$

Ora pensiamo che Primo osservi un'OPPM polarizzata come in figura 6. Nel



caso a)  $\mathbf{B}'$  è diretto lungo l'asse  $z'$ , quindi  $E'_z$  è nullo ed  $E'_y = cB' \cos \alpha'$ . Di conseguenza sia  $B_x$ , sia  $B_y$  sono nulle ed anche il nostro campo magnetico è polarizzato con  $\mathbf{B}$  lungo l'asse  $z$ , con

$$B = \Gamma(B' + \frac{V}{c^2}E'_y) = \Gamma B'(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha')$$

Nel caso b)  $\mathbf{E}'$  è diretto lungo l'asse  $z'$ , quindi  $B'_z$  è nullo e  $B'_y = -(E'/c) \cos \alpha'$ . Di conseguenza sia  $E_x$ , sia  $E_y$  sono nulle ed anche il nostro campo elettrico

è polarizzato con  $\mathbf{E}$  lungo l'asse  $z$  con

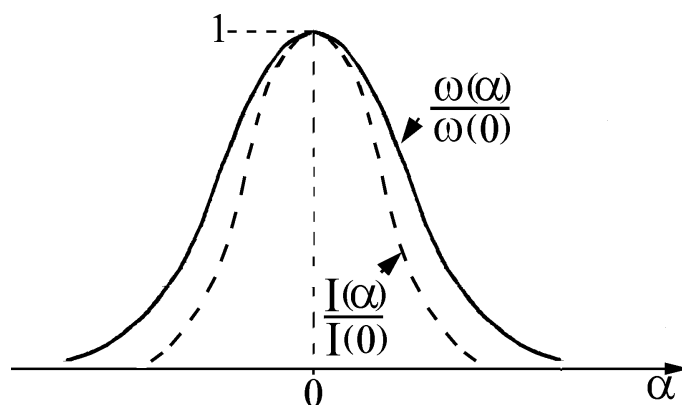
$$E = \Gamma(E' - VB'_y) = \Gamma E'(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha')$$

In entrambi i casi, il rapporto tra le ampiezze osservate da noi e da Primo risulta uguale a  $\Gamma(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha') = k/k' = \omega/\omega'$ , proprio come il rapporto tra le frequenze osservate. E poiché l'intensità dell'OPPMPL è proporzionale al quadrato del campo, possiamo concludere che, qualunque sia il verso di polarizzazione dell'OPPMPL, **il rapporto tra le intensità  $\mathcal{I}$  ed  $\mathcal{I}'$  osservate da noi e da Primo è uguale al quadrato del rapporto delle frequenze osservate:**

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}'} = \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \quad (15.19)$$

Questo risultato è utilissimo nello studio della radiazione emessa da dipoli armonici. Ad esempio un dipolo in moto con  $\gamma$  molto grande emette con intensità dipendente dall'angolo di emissione  $\alpha$  come mostrato dalla curva tratteggiata in figura 7. La larghezza a metà altezza del profilo di intensità è ben minore della larghezza a metà altezza  $2/\gamma$  del profilo di frequenza.

**Fig. 15.7**



## 15.7 Quadrimento, massa invariante

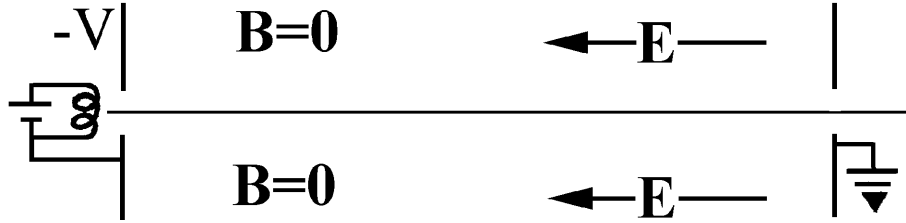
Cominciamo a ricordare che, in generale, le derivate rispetto al tempo del momento  $\mathbf{p}(t)$  e dell'energia  $\mathcal{E}(t)$  di una particella in moto con velocità  $\mathbf{v}(t)$  sono legate alla forza risultante  $\mathbf{F}(t)$  agente sulla particella dalle relazioni

$$d\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(t)dt \quad , \quad d\mathcal{E}(t) = W(t)dt = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t)dt \quad (15.20)$$

che conservano piena validità in meccanica relativistica. Ora, partendo dalle equazioni 20), vogliamo dimostrare che  $\mathbf{p}(t)$  ed  $\mathcal{E}(t)/c$  sono le parti spaziale e temporale di un quadrivettore. Cominciamo da una situazione sperimentale semplice. Nel cannone elettrostatico mostrato in figura 8, simile a quello dell'oscillografo, il campo elettrico è uniforme nella regione tra il filamento e l'anodo e tale regione è perfettamente schermata da campi magnetici. Gli



Fig. 15.8



elettroni sono emessi a riposo dal filamento, vengono accelerati dal campo elettrico ed escono dal cannone attraverso un collimatore praticato nell'anodo. Per semplicità, pensiamo che l'anodo sia infinitamente lontano, scegliamo l'asse del cannone come asse  $x$ , con origine sul filamento, e scegliamo l'origine dei tempi all'istante di emissione di un elettrone dal filamento. Al tempo  $t$  l'elettrone ha raggiunto la posizione  $x$  e ha acquistato il momento e l'energia

$$\Delta p_x = eEt \quad , \quad \Delta \mathcal{E} = eEx$$

Dalle leggi di trasformazione dei campi si vede che anche Primo osserva campo magnetico nullo e campo elettrico assiale con  $E' = E$ , quindi osserva che dal tempo 0 al tempo  $t'$  l'elettrone ha acquistato la quantità di moto e l'energia

$$\begin{aligned} \Delta p'_x &= eEt' = eE\Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) = \Gamma\left(\Delta p_x - \frac{V}{c^2}\Delta \mathcal{E}\right) \\ \Delta \mathcal{E}' &= eEx' = eE\Gamma(x - Vt) = \Gamma(\Delta \mathcal{E} - V\Delta p_x) \end{aligned}$$

Ciò mostra che  $\Delta \mathcal{E}/c$  e  $\Delta p_x$  si trasformano davvero come le componenti 0 ed 1 di un quadrivettore controvariante. Per dimostrare che tale conclusione ha validità generale pensiamo che una particella con quadridensità di corrente  $j^\mu(t, \mathbf{r})$  sia stimolata dal campo elettromagnetico  $\mathcal{F}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r})j_\nu(t, \mathbf{r})$ . In tal caso sappiamo che la quadridensità di forza agente sulla particella è il campo quadrivettoriale

$$f^\mu(t, \mathbf{r}) = \mathcal{F}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r})j_\nu(t, \mathbf{r}) \equiv \left( \frac{w(t, \mathbf{r})}{c}, \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) \right)$$

Per semplicità pensiamo che la carica  $q$  della particella sia distribuita uniformemente nel volume  $\mathcal{V}(t)$ ; in tal caso le variazioni di momento e di energia della particella nell'intervallo di tempo compreso tra  $t$  e  $t + dt$  sono

$$d\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t)\mathcal{V}(t)dt \quad \mathbf{e} \quad d\mathcal{E}(t) = w(t)\mathcal{V}(t)dt$$

Ma il prodotto  $\mathcal{V}(t)dt$  è invariante, perché i volumi in moto si contraggono di tanto quanto si dilatano gli intervalli di tempo, quindi  $d\mathbf{p}(t)$  e  $d\mathcal{E}(t)/c$  devono essere le parti spaziale e temporale di un quadrivettore, proprio come  $\mathbf{f}(t)$  e  $w(t)/c$ . Ciò comporta che il momento e l'energia della particella devono formare il quadrivettore

$$p^\mu(t) \equiv \left( \frac{\mathcal{E}(t)}{c}, \mathbf{p}(t) \right)$$

D'altra parte sappiamo che il momento della particella deve ridursi al valore newtoniano  $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)$  quando le velocità sono piccole rispetto a  $c$ , quindi  $p^\mu(t)$  deve essere il prodotto della massa per la quadrivelocità. Insomma, dobbiamo concludere che la particella ha il **quadrimento**

$$p^\mu(t) \equiv \left( \frac{\mathcal{E}(t)}{c}, \mathbf{p}(t) \right) \equiv mu^\mu(t) \equiv (mc\gamma(t), m\mathbf{v}(t)\gamma(t)) \quad (15.21)$$

Questo è il risultato fondamentale della teoria della relatività ristretta. Partendo dall'equazione 21) possiamo trarre le seguenti conclusioni importanti.

- Una particella a riposo ha energia data dalla celeberrima

$$\text{equazione di Einstein} \quad \mathcal{E}_0 = m c^2 \quad (15.22)$$

- L'energia totale  $\mathcal{E}(t) = mc^2\gamma(t)$  e l'energia cinetica  $\mathcal{E}_K(t) = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_0$  sono legate alla velocità dalle relazioni

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\gamma(t) \quad , \quad \mathcal{E}_K(t) = mc^2[\gamma(t) - 1] \quad (15.23)$$

- Il momento, la velocità e l'energia della particella sono legati dalla relazione

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)\gamma(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{c^2}\mathcal{E}(t) \quad (15.24)$$

- L'energia totale ed il momento della particella sono legati dalle relazioni

$$p(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\mathcal{E}^2(t) - m^2c^4} \quad , \quad \mathcal{E}(t) = c\sqrt{m^2c^2 + p^2(t)} \quad (15.25)$$

lo si vede tenendo conto che

$$p^\mu(t)p_\mu(t) = (\mathcal{E}(t)/c)^2 - p^2(t) = m^2c^2\gamma^2(t) [1 - v^2(t)/c^2] = m^2c^2$$

Sottolineiamo che **la letteratura corrente ha abbandonato la distinzione tra massa e massa relativistica**. A meno del fattore di conversione  $c^2$ , la massa  $m$  di una particella o di un sistema è l'energia valutata nel sistema del baricentro. Ciò comporta che la massa aumenta quando il sistema viene scaldato, quando viene compresso, quando viene fatto vibrare e quando viene fatto ruotare su se stesso, ma rimane invariata quando il sistema viene accelerato come un tutto.

Infine diciamo che un vecchio modello classico descriveva l'elettrone come una sferetta di raggio  $r_e$  carica in superficie con carica totale  $-e$  ed identificava l'energia di riposo  $mc^2$  con l'energia potenziale  $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_e)$  di tale distribuzione di carica. Tale modello attribuiva all'elettrone il raggio

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = \frac{3}{2}c\mathcal{T} \approx 2.8 \cdot 10^{-15} m$$

dove  $\mathcal{T}$  è il tempo caratteristico dell'elettrone dato dall'equazione 9.36). Ma sappiamo che il raggio dell'elettrone, ammesso che sia finito, è certamente minore di  $10^{-20} m$ , quindi il modello non può essere accettato. Alla stessa conclusione si giunge anche notando che il raggio elettrostatico del protone risulta circa mille volte minore del valore sperimentale.

## 15.8 Dinamica di particelle in campi uniformi

Cominciamo a pensare che una particella di massa  $m$  sia soggetta alla forza risultante  $\mathbf{F}$  costante nello spazio e nel tempo, diretta nel verso dell'asse  $x$ , e pensiamo che la particella sia nell'origine con velocità nulla al tempo zero. Al tempo  $t$  la particella ha acquistato il momento  $p(t) = Ft$  quindi ha

$$\gamma(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}_0} = \frac{c\sqrt{m^2c^2 + p^2(t)}}{mc^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}$$

dove  $a_p = F/m$  è l'accelerazione propria. Sappiamo anche che al tempo  $t$  la particella ha acquistato l'energia cinetica  $\mathcal{E}_K(t) = Fx(t)$ , quindi la legge oraria risulta

$$x(t) = \frac{\mathcal{E}_K(t)}{F} = \frac{mc^2\gamma(t) - mc^2}{F} = \frac{mc^2}{F}[\gamma(t) - 1] = \frac{c^2}{a_p} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2} - 1 \right]$$

ed è in pieno accordo con l'equazione 14.21). Ora possiamo precisare che l'energia richiesta per andare a distanza  $x = 1000 c^2/a_p$  con accelerazione propria  $a_p$  vale  $Fx = ma_p 1000c^2/a_p = 1000mc^2$  ed è davvero mille volte maggiore dell'energia di riposo.

Ora fissiamo l'attenzione sul cannone elettrostatico schematizzato in figura 8, eventualmente pensando che il filamento sia sostituito da una capsula che emette positroni, oppure protoni oppure ioni di vario tipo, sempre con energia cinetica trascurabile. Naturalmente per accelerare particelle con carica positiva la tensione deve essere positiva, ma le particelle che escono dal collimatore d'uscita hanno energia cinetica  $\mathcal{E}_K = eV$ , indipendentemente dalla loro massa, quindi hanno energia totale  $\mathcal{E} = mc^2 + eV$  e hanno  $\gamma = 1 + eV/mc^2$ . Per questa ragione conviene esprimere le energie delle particelle in elettronvolt. Per l'elettrone ed il positrone l'energia di riposo vale

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 = e \frac{mc^2}{e} \approx \frac{9.1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2}{1.6 \cdot 10^{-19}} eV \approx 0.511 MeV$$

Naturalmente l'energia di riposo del protone è 1836 volte maggiore, quindi vale  $938 MeV$ . Cannoni elettrostatici con tensioni da pochi  $V$  ad alcuni centinaia di  $V$  sono usati in strumenti costruiti per studiare le proprietà atomiche, vibrazionali e strutturali della materia con metodi di scattering di elettroni. Cannoni con tensioni di una decina di  $kV$  sono inseriti negli oscillografi e nei monitor TV, cannoni con tensioni di centinaia di  $kV$  sono usati nei microscopi elettronici e nei tubi a raggi X per analisi cliniche, e cannoni con tensioni di alcuni  $MV$  sono disponibili in laboratori specializzati dotati di generatori di van der Graaf. Dunque i cannoni elettrostatici producono fasci con  $\gamma$  modesti, raramente maggiore di 2, ma nel seguito penseremo astrattamente che il metodo di accelerazione elettrostatico possa produrre

anche fasci di particelle con  $\gamma$  molto grandi. Naturalmente la legge oraria di una particella nel cannone elettrostatico è iperbolica con  $a_p = eE/m$ , ma ciò che interessa nel presente contesto è di valutare le caratteristiche del fascio uscente dal collimatore d'uscita data la massa e la tensione di accelerazione. Ad esempio consideriamo i seguenti problemi.

- Calcolare il momento delle particelle sul collimatore d'uscita.

RISPOSTA: l'energia  $\mathcal{E} = mc^2 + eV$  è la somma dell'energia di riposo e del lavoro fatto sulla particella. Dalla prima delle equazioni 25) otteniamo

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(mc^2 + eV)^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{e^2V^2 + 2mc^2eV} = \frac{eV}{c} \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{eV}}$$

Si noti che, finché  $eV$  è piccola rispetto all'energia di riposo il momento è legato alla tensione dalla relazione classica  $p = \sqrt{2meV}$ , e si noti che le deviazioni rispetto a tale relazione, a parità di energia cinetica, ovvero a parità di tensione di accelerazione, sono molto più importanti per l'elettrone ed il positrone che per protoni ed ioni. Invece quando  $eV$  è grande rispetto all'energia di riposo il momento tende ad  $eV/c$  e cessa di dipendere dalla massa della particella. Aggiungiamo che quando si esprime l'energia in  $eV$  conviene esprimere il momento in  $eV/c$ , senza preoccuparsi di convertire il risultato in unità SI. Ma non si incorra nell'errore di scrivere  $p = eV/c$ : ciò è (quasi) corretto solo quando  $eV$  è grandissimo rispetto all'energia di riposo.

- Calcolare il valore di  $\gamma$  sul collimatore d'uscita. La risposta è immediata:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{mc^2 + eV}{mc^2} = 1 + \frac{eV}{mc^2}$$

- Calcolare la velocità delle particelle sul collimatore d'uscita.

RISPOSTA: poiché  $p = mv\gamma = v\mathcal{E}/c^2$  si vede che

$$v = c \frac{pc}{\mathcal{E}} = c \frac{eV \sqrt{1 + 2mc^2/eV}}{eV + mc^2} = c \frac{\sqrt{1 + 2mc^2/eV}}{1 + mc^2/eV}$$

Si noti che per  $eV \ll mc^2$  la velocità risulta  $v = \sqrt{2eV/m}$  come nel caso classico, mentre per  $eV \gg mc^2$  la velocità approssima  $c$ .

- Calcolare il tempo di transito filamento-anodo.

RISPOSTA. La forza agente è costante e vale  $F = eV/L$  dove  $L$  è la lunghezza del cannone, quindi il tempo di transito  $T$  risulta

$$T = \frac{p}{F} = \frac{pL}{eV} = \frac{L}{c} \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{eV}}$$

Passiamo a considerare il moto di particelle cariche in un campo magnetico stazionario. Con riferimento alla figura 9 pensiamo che in una regione schermata da campi elettrici una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muova

in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme, e pensiamo che ad un certo istante la particella abbia velocità normale a  $\mathbf{B}$ . In tal caso, trascurando la perdita di energia per radiazione, possiamo essere certi che la particella descrive una circonferenza. Infatti la forza agente  $\mathbf{F}(t) = q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}$  è perpendicolare alla velocità e non fa lavoro, quindi il modulo della velocità rimane costante. Il raggio  $R_c$  della circonferenza prende il nome di **raggio di ciclotrone**, mentre la frequenza angolare di rivoluzione  $\omega_c = v/R_c$  prende il nome di **frequenza di ciclotrone**. Per calcolare  $R_c$  ed  $\omega_c$  consideriamo la figura 10. Nel tempuscolo  $dt$  il momento  $\mathbf{p}(t)$  della particella ruota dell'angolo  $\omega_c dt$ , quindi  $d\mathbf{p}(t)$  ha modulo  $|d\mathbf{p}| = p\omega_c dt$  e la forza centripeta ha modulo  $|F| = |d\mathbf{p}|/dt = p\omega_c$ . D'altra parte sappiamo che  $|F| = |q|vB$ , quindi

$$\omega_c = \frac{|q|vB}{p} = \frac{|q|B}{\gamma m} = \frac{|q|B}{m} \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (15.26)$$

$$R_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{p}{|q|B} = \frac{mv}{|q|B\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (15.27)$$

Queste equazioni mettono in evidenza i seguenti fatti.

- Per velocità piccole rispetto a  $c$  la frequenza di ciclotrone non dipende significativamente dalla velocità e la misura di  $\omega_c/B$  fornisce il rapporto tra la carica e la massa della particella.
- Per particelle con  $|q| = e$ , la misura del raggio di ciclotrone in un campo magnetico noto fornisce il momento  $p = eR_c B$ . Si noti che un elettrone ed un protone in moto nello stesso campo magnetico con lo stesso momento descrivono circonferenze con lo stesso raggio in versi opposti.

### ESERCIZI

1) Un elettrone ha velocità di  $10^8$  m/s. Calcolare: a) l'energia totale (in eV), b) l'energia cinetica, c) il momento (in eV/c), d) la forza necessaria ad accelerare l'elettrone di  $10$  m/s<sup>2</sup> nel verso del moto.

2) Calcolare il momento e la velocità di un elettrone sull'anodo di un cannone elettrostatico da 200 keV.

Fig. 15.9

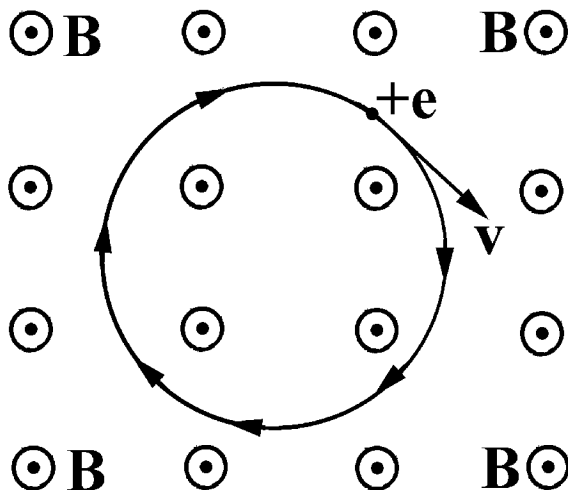
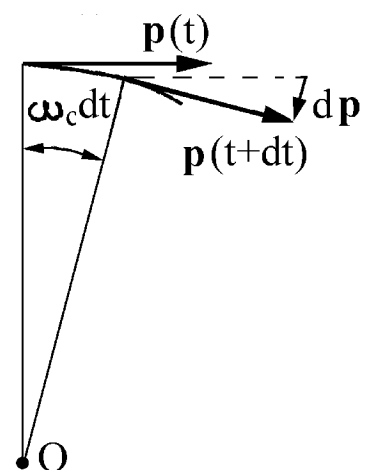


Fig. 15.10



3) Al centro di una gabbia di Faraday sferica di raggio  $10\text{ m}$ , una punta portata alla tensione di  $-10^5\text{ V}$  emette elettroni quasi fermi. Calcolare: a) energia cinetica, energia totale, momento, velocità ed accelerazione degli elettroni quando stanno per urtare la parete della gabbia, b) il tempo di transito di un elettrone dalla punta alla gabbia.

4) Calcolare la velocità degli elettroni che circolano nell'anello di ELETTRA con energia cinetica di  $2\text{ GeV}$ .

5) Un elettrone entra con energia cinetica trascurabile in una regione dove agisce un campo elettrico uniforme da  $10^6\text{ V/m}$  e ne esce dopo un percorso di  $2\text{ m}$ . Calcolare: a) la velocità finale, b) l'energia, c) il momento, d) il tempo di attraversamento della regione di accelerazione, e) i valori minimo e massimo dell'accelerazione entro la regione.

6) La velocità di un elettrone differisce dalla velocità della luce di  $1\text{ m/s}$ . Calcolare l'energia ed il momento dell'elettrone.

7) Un elettrone entra con energia cinetica trascurabile in un campo elettrico omogeneo da  $10^4\text{ V/m}$  e ne esce dopo  $100\text{ ns}$ . Calcolare: a) la velocità e l'energia finali, b) la lunghezza del percorso nel campo.

8) Un elettrone ed un protone hanno lo stesso momento. Calcolare le velocità delle due particelle per i seguenti valori del momento:

a)  $p = 1\text{ KeV}/c$ , b)  $p = 1\text{ MeV}/c$ , c)  $p = 1\text{ GeV}/c$ , d)  $p = 1\text{ TeV}/c$ .

9) Riportare in grafico l'energia in funzione del momento, a) per un elettrone, b) per un protone c) per un atomo d'oro.

10) Un elettrone di energia di  $1\text{ GeV}$  attraversa una regione lunga  $1\text{ m}$  nella quale agisce un campo elettrico da  $10^6\text{ V/m}$  inizialmente normale alla velocità. Ammettere che l'angolo di deflessione della traiettoria dall'ingresso all'uscita sia piccolissimo, calcolarlo e verificare che lo è davvero. AIUTO. Calcolato il tempo di transito nella regione ed il momento ceduto dal campo alla particella, l'angolo di deflessione si calcola come rapporto tra la variazione di momento ed il momento iniziale....

11) In un campo magnetico uniforme da  $1\text{ T}$  un elettrone descrive circonferenze di raggio  $1\text{ cm}$ . Calcolare: a) la velocità ed il periodo del moto, b) la quantità di moto, c) l'energia cinetica.

12) In un campo magnetico uniforme da  $1\text{ T}$  un elettrone ed un protone hanno velocità ortogonali al campo ed energie identiche pari a  $1\text{ MeV}$ . Calcolare i raggi di ciclotrone e le frequenze di ciclotrone delle due particelle.

13) In un campo magnetico uniforme da  $1\text{ T}$  un elettrone ha velocità  $2 \cdot 10^8\text{ m/s}$  inclinata di  $45^\circ$  rispetto a  $\mathbf{B}$ . Mostrare che la traiettoria è elicoidale e calcolarne il passo ed il diametro del cilindro sul quale è avvolta.

14) Nel collider LHC un protone e un antiprotone collidono con energia di  $7 + 7\text{ TeV}$  e velocità opposte. Quale energia e quale momento ha il protone per un osservatore che accompagna l'antiprotone nel suo moto

## 15.9 Scattering Compton

Nel paragrafo 10.5) abbiamo descritto l'interazione di un'OPPMPL con una carica libera seguendo l'approccio classico di Thomson, assumendo che la velocità di picco delle oscillazioni indotte dal campo elettromagnetico rimanesse molto minore di  $c$ . Ora consideriamo lo scattering di un fotone da un elettrone libero, inizialmente fermo nel nostro laboratorio, senza preoccuparci di descrivere in dettaglio l'interazione, ma tenendo conto solo delle leggi di conservazione dell'energia e del momento del sistema, leggi che valgono qualunque sia la velocità di picco acquistata dall'elettrone durante l'interazione. Come mostrato in figura 11, prima della collisione l'elettrone è fermo, quindi il sistema fotone-elettrone ha momento  $\hbar\mathbf{k}$  ed energia  $\hbar\omega + mc^2$ , dove  $mc^2$  è l'energia di riposo dell'elettrone. Dopo la collisione l'energia  $\hbar\omega'$  ed il momento  $\hbar\mathbf{k}'$  del fotone sono legati al momento  $\mathbf{p}'$  ed all'energia  $\mathcal{E}' = c\sqrt{m^2c^2 + (p')^2}$  dell'elettrone dalle leggi di conservazione

$$\hbar\omega' + c\sqrt{m^2c^2 + (p')^2} = \hbar\omega + mc^2 \quad , \quad \hbar\mathbf{k}' + \mathbf{p}' = \hbar\mathbf{k} \quad (15.28)$$

Dividendo per  $c$  la prima equazione ed usando il teorema di Carnot per riscrivere la seconda, rimaniamo alle prese con le relazioni

$$\hbar k' + \sqrt{m^2c^2 + (p')^2} = \hbar k + mc \quad , \quad (\hbar k')^2 + (\hbar k)^2 - 2\hbar^2 k k' \cos \theta = (p')^2$$

dove  $\theta$  è l'angolo di deflessione del fotone. La prima relazione conduce a

$$(p')^2 = [\hbar k - \hbar k' + mc]^2 - m^2c^2 = \hbar^2(k - k')^2 + 2\hbar(k - k')mc$$

la seconda può essere riscritta nella forma

$$(p')^2 = \hbar^2(k - k')^2 + 2\hbar^2 k k' (1 - \cos \theta)$$

quindi  $k$  e  $k'$  sono legati dalla relazione

$$2\hbar(k - k')mc = 2\hbar^2 k k' (1 - \cos \theta)$$

Dividendo ambo i membri per  $2\hbar m c k k'$  si ottiene

$$\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{mc} (1 - \cos \theta) \quad \implies \quad \lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \theta)$$

**Fig. 15.11**

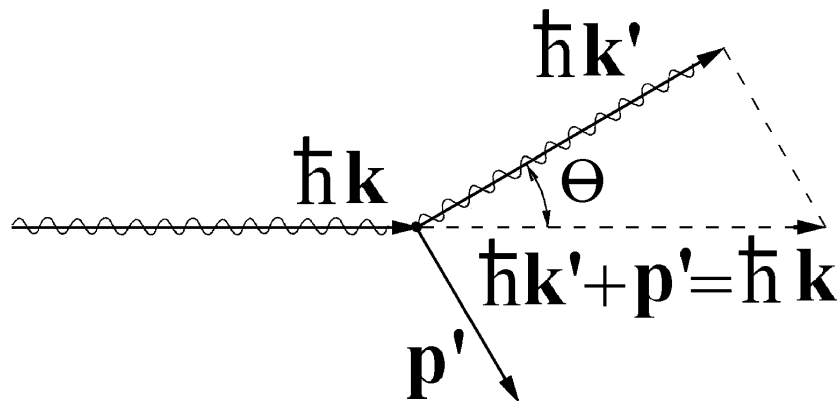
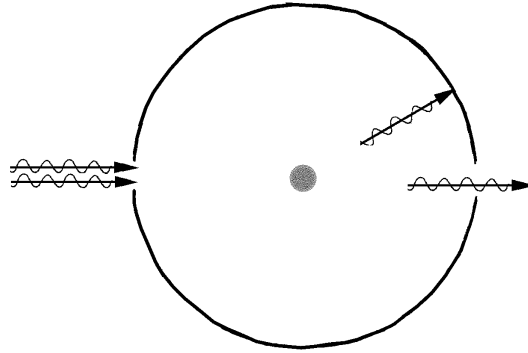


Fig. 15.12



Insomma, le lunghezze d'onda del fotone diffuso e del fotone incidente sono legate dalla relazione

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta) \quad \text{dove} \quad \lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc} \approx 2.42 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (15.29)$$

La lunghezza  $\lambda_C$  è la **lunghezza d'onda Compton dell'elettrone**. In una serie di esperimenti eseguiti intorno al 1922 Compton ha trovato pieno accordo con l'equazione 29) e ha dato definitiva conferma alle idee di Einstein. Il nome "fotone" risale proprio a quegli anni.

A questo punto risulta chiaro che la descrizione classica di Thomson non è completamente corretta per le ragioni seguenti.

- La radiazione diffusa da un elettrone libero non ha la stessa frequenza della radiazione incidente. Ma quando la lunghezza d'onda dei fotoni incidenti è maggiore di 1 nm l'equazione 29) mostra che, anche nel caso estremo di scattering all'indietro, la lunghezza d'onda emessa è diversa solo di alcune parti per mille da quella incidente. In tal caso la descrizione classica di Thomson è soddisfacente e ha il merito di condurre ad una valutazione semplice della sezione d'urto. Ma la descrizione di Compton, sebbene non fornisca la sezione d'urto, ha il merito di essere valida per fotoni di qualunque energia, perché si basa sulle leggi di conservazione del momento e dell'energia che hanno validità generale.

- I fotoni diffusi non sono descritti dall'onda dipolare di Thomson, ma da onde simili a quella incidente, deviate angularmente e distribuite statisticamente a formare il lobo dipolare. Possiamo vedere la cosa pensando alla situazione mostrata in figura 12. I fotoni di un fascio quasi monocromatico entrano in una camera sferica attraverso un collimatore d'ingresso ed incidono su elettroni quasi fermi confinati in un volumetto  $\mathcal{V}$  posto al centro della sfera. Di tanto in tanto, diciamo una volta al secondo per fissare le idee, un fotone viene deflesso e va ad impressionare una pellicola depositata sulla parete interna della camera. I fotoni indeviati escono dalla sfera attraverso un foro di diametro un po' maggiore di quello d'ingresso. Al passare del tempo, sulla pellicola appaiono qua e là macchioline di area confrontabile con quella della sezione trasversa del fascio incidente. Via via le macchioline si addensano e dopo alcune ore la pellicola risulta impressionata come se ciascun



fotone fosse stato diffuso con lobo dipolare di Thomson. Ma tale situazione è il risultato di un insieme statistico di processi di collisione Compton indipendenti, non di un unico processo Thomson! Per tenerne conto cominciamo ad esprimere l'intensità del fascio di radiazione incidente come  $\mathcal{I} = c\hbar\omega N/\mathcal{V}$ , dove  $N$  è il numero di fotoni presenti nel volume  $\mathcal{V}$ . Con ciò la relazione  $W = \mathcal{I}\sigma_T$  prende la forma

$$W = c\hbar\omega \frac{N}{\mathcal{V}} \sigma_T \implies \frac{W}{\hbar\omega} = \frac{c\sigma_T}{\mathcal{V}} N$$

Poi notiamo che il rapporto tra la potenza diffusa  $W$  e l'energia  $\hbar\omega$  di ciascun fotone è il numero (medio) di processi di scattering in un secondo, ovvero la frequenza media  $\bar{\nu}$  delle collisioni fotone-elettrone nelle condizioni considerate. Tale frequenza risulta

$$\bar{\nu} = \frac{c\sigma_T}{\mathcal{V}} N \quad (15.30)$$

Infine ammettiamo che le collisioni siano eventi indipendenti ed **interpretiamo  $\bar{\nu}dt$  come probabilità che un certo elettrone defletta un fotone nel tempuscolo  $dt$** . Ciò si esprime un po' impropriamente dicendo che  $\bar{\nu}$  è la **"probabilità per unità di tempo"** della collisione di un elettrone con i fotoni del fascio. Si veda in proposito l'esercizio 5.

## ESERCIZI

1) Una particella di massa  $m$  deflette di  $\pi$  un fotone. a) Ammettere che la velocità acquistata dalla particella sia piccola rispetto a  $c$  e mostrare che vale  $v = c(2\hbar\omega/mc^2)$ . b) Mostrare che l'energia cinetica acquistata dalla particella vale  $\frac{1}{2}mv^2 = \hbar\omega(2\hbar\omega/mc^2)$ . c) Calcolare la velocità e l'energia cinetica acquistata da un elettrone che deflette di  $\pi$  un fotone da  $5 eV$ . d) come c) ma per un protone.

2) Un fascio di fotoni di energia  $1 keV$ , ben collimati angularmente, incide su elettroni liberi e quasi fermi. Calcolare: a) la massima variazione di lunghezza d'onda dei fotoni diffusi, b) il momento e l'energia acquistati da un elettrone che deflette il fotone di  $90^\circ$ .

3) Un'OPPMPL con campo elettrico di picco di  $1 V/m$  e  $k = 10^7 m^{-1}$  investe un gas diluito di elettroni quasi fermi. a) Quale potenza irradia ciascun elettrone. b) Quanti fotoni sono diffusi in un'ora da ciascun elettrone. c) Che cosa cambia quando i fotoni hanno  $k = 10^{10} m^{-1}$ .

4) Un fascio di fotoni rossi viene inviato contro un elettrone che viaggia verso di noi con energia di  $2 GeV$ . a) Quale energia hanno i fotoni incidenti per Primo che accompagna l'elettrone. b) Quale energia hanno, per Primo, i fotoni diffusi verso di noi. c) Quale energia hanno per noi i fotoni che riceviamo. d) Confrontare i risultati con quelli ottenuti per uno specchio in moto verso di noi.

5) Si pensi ad eventi indipendenti, si ammetta che  $\bar{\nu}dt$  sia la probabilità che un evento avvenga nel tempuscolo  $dt$  e si dimostri che:

- a) la probabilità di zero eventi nel tempo  $t$  vale  $p_0 = e^{-\bar{\nu}t}$
- b) la probabilità di uno e un solo evento nel tempo  $t$  è  $p_1 = \bar{\nu}te^{-\bar{\nu}t}$
- c) la probabilità di due e due soli eventi nel tempo  $t$  è  $p_2 = \frac{(\bar{\nu}t)^2}{2}e^{-\bar{\nu}t}$
- d) la probabilità di  $n$  ed  $n$  soli eventi nel tempo  $t$  vale  $p_n = \frac{(\bar{\nu}t)^n}{n!}e^{-\bar{\nu}t}$
- e) la frequenza media dell'evento vale  $\bar{\nu}$ .

AIUTO. La probabilità che l'evento non si verifichi nel tempo  $t$  è il prodotto delle probabilità che non si verifichi in ciascuno dei  $t/dt$  tempuscoli che compongono il tempo  $t$ . La probabilità che si verifichi una volta è il prodotto delle probabilità che non si verifichi in  $t/dt - 1$  tempuscoli per la probabilità che si verifichi in uno dei tempuscoli per il numero di scelte possibili di tale tempuscolo. La probabilità che si verifichi due volte è il prodotto delle probabilità che non si verifichi in  $t/dt - 2$  tempuscoli per la probabilità che si verifichi in due dei tempuscoli per il numero di scelte possibili dei due tempuscoli. Inoltre si tenga conto che

$$\sum_0^{\infty} n \frac{x^n}{n!} = \sum_1^{\infty} n \frac{x^n}{n!} = x \sum_1^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_0^{\infty} \frac{x^m}{m!} = xe^x$$

# Capitolo 16

## Cavità risonanti, corpo nero, coefficienti di Einstein

Iniziamo il capitolo con lo studio del campo ELETTRROMAGNETICO nelle guide d'onda e nelle cavità risonanti, studio che, oltre ad essere importante per la tecnologia dei sistemi di trasmissione e ricezione a microonde, introduce le conoscenze necessarie ad affrontare uno dei più importanti argomenti di fisica: il **problema del corpo nero**. Per definizione il corpo nero è la regione interna ad una cavità con pareti in equilibrio termodinamico alla temperatura  $T$ . Una superficie nera ideale è un foro nella parete della cavità, di dimensioni tali da poter trascurare gli effetti diffrattivi, ma non tali da alterare significativamente l'equilibrio termodinamico interno. Lo spettro del corpo nero era già ben conosciuto sperimentalmente nell'ultimo decennio dell'800, ma il problema di giustificarlo con approccio microscopico costituiva un formidabile rompicapo. Noi percorriamo brevemente la strada che ha portato Planck a risolvere il problema e, guidati da Einstein, mostriamo che il corpo nero è un gas di fotoni in equilibrio termodinamico con le pareti. Poi guidati da Bohr e, ancora una volta, da Einstein, descriviamo le principali modalità di interazione dei fotoni con gli atomi e poniamo le basi per lo studio della fisica dei lasers.

### 16.1 Guide d'onda

Con riferimento alla figura 1, consideriamo un tubo metallico di sezione rettangolare con pareti interne perfettamente lucide. Per fissare le idee pensiamo che l'altezza  $b$  sia dell'ordine di 1 *cm*, che la larghezza  $a$  sia ben maggiore

a) Sezione d'ingresso

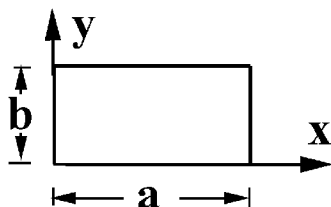
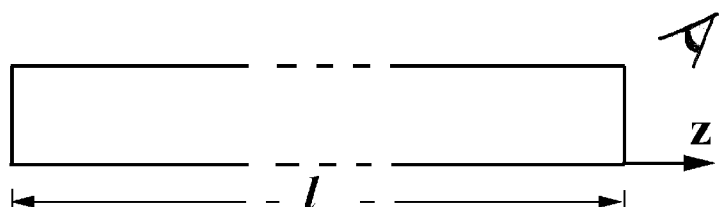


Fig. 16.1



b) sezione longitudinale



di  $b$ , che la lunghezza  $l$  sia di alcuni metri e domandiamo: che cosa osserviamo quando avviciniamo una lampada ad una estremità del tubo e poniamo l'occhio sull'altra, come in figura 1? Vediamo luce anche quando non vediamo direttamente la lampada: la radiazione raggiunge il nostro occhio per successive riflessioni sulle pareti. Infatti, trascurando l'assorbimento nel metallo e ricordando che, a meno di effetti diffrattivi, la riflessione lascia inalterata la proiezione parallela del vettore d'onda, dobbiamo concludere che tutta la potenza entrante da una parte esce dall'altra. Ciò è vero perché le lunghezze d'onda della radiazione emessa dalla lampada sono molto minori delle dimensioni trasverse del tubo, tanto da poter trascurare la diffrazione e rendere lecita una descrizione geometrica. Ma quando la radiazione ha lunghezza d'onda confrontabile con le dimensioni trasverse del tubo i fenomeni diffrattivi diventano importanti e la situazione cambia.

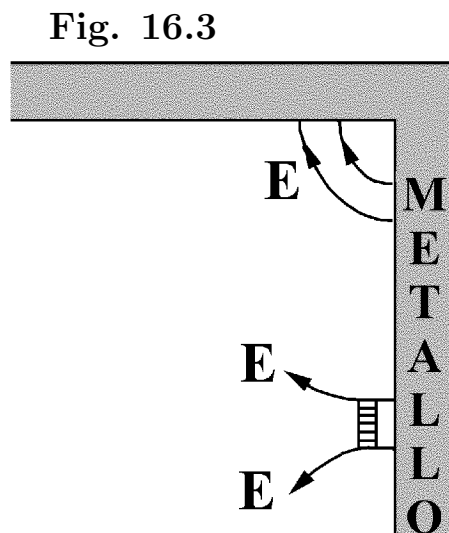
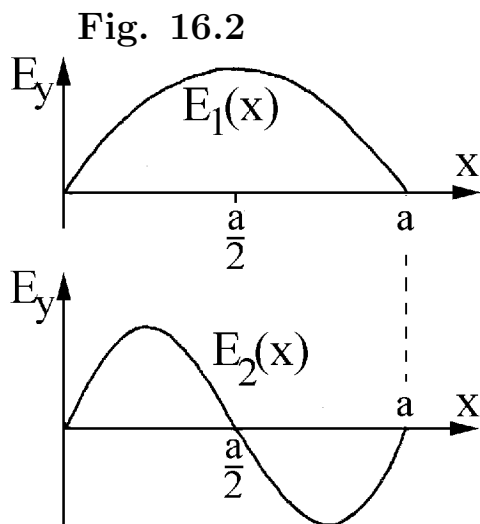
Per studiare la propagazione di energia elettromagnetica nella guida conviene introdurre il seguente linguaggio. Dati i due campi  $\mathbf{E}_1(t, \mathbf{r})$  ed  $\mathbf{E}_2(t, \mathbf{r})$  definiamo il loro "prodotto scalare" con l'integrale

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2(t, \mathbf{r}) \quad (16.1)$$

esteso al volume  $\mathcal{V}$  della guida. Quando il "prodotto scalare" è nullo diciamo che i due campi sono "ortogonali". Si noti che i campi ortogonali sono certamente "ortogonali", ma non viceversa, ad esempio i campi

$$\left(0, E \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), 0\right) \quad \text{e} \quad \left(0, E \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right), 0\right)$$

mostrati in figura 2 sono paralleli, ma sono "ortogonali" nel volume della guida. Infatti il consueto prodotto scalare dei due campi è positivo per  $x < a/2$  ed è negativo per  $x > a/2$ , quindi il suo integrale esteso a tutta la guida è nullo. Si noti che i due campi sono "ortogonali" anche in una guida di lato  $2a$ , ma non in una guida di lato  $a/2$ . Poi ricordiamo che l'energia elettromagnetica è proporzionale al quadrato del campo ELETTRICO e diciamo che



il “prodotto scalare” di un campo per se stesso è l’“energia” del campo nel volume  $\mathcal{V}$ .

Ora ci proponiamo di descrivere un generico campo ELETTRICO nella guida come sovrapposizione di campi ELETTRICI elementari “ortogonali” l’uno all’altro nel volume della guida. Ciò consentirà di calcolare l’energia elettromagnetica contenuta nella guida come somma delle energie dei singoli campi ELETTRICI elementari, infatti

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} | \mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(t, \mathbf{r}) + \dots |^2 = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} E_1^2(t, \mathbf{r}) + \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} E_2^2(t, \mathbf{r}) + \dots$$

Per individuare i campi ELETTRICI elementari procediamo pensando che le pareti metalliche abbiano conducibilità infinita. In tal caso il campo ELETTRICO è nullo entro il metallo e deve essere nullo oppure normale alle pareti con derivata normale nulla a distanza infinitesima dalle pareti. Infatti il cilindretto gaussiano mostrato in figura 3, posto nel vuoto quasi a contatto con una parete, non contiene carica, quindi ha basi attraversate dallo stesso flusso, ovvero dallo stesso campo. Ora notiamo che i campi armonici con componenti

$$\begin{aligned} E_x(t, \mathbf{r}) &= E_x \cos(L\pi x/a) \sin(M\pi y/b) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y(t, \mathbf{r}) &= E_y \sin(L\pi x/a) \cos(M\pi y/b) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z(t, \mathbf{r}) &= E_z \sin(L\pi x/a) \sin(M\pi y/b) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (16.2)$$

soddisfano le condizioni al contorno per qualunque scelta dei due interi  $L$  ed  $M$ , di  $k_z$ , di  $\omega$  e dei coefficienti  $E_x$ ,  $E_y$  ed  $E_z$ . Ma tali scelte non possono essere arbitrarie: devono assicurare che i campi abbiano divergenza nulla e d’alambertiano nullo all’interno della guida, dove sono nulle le densità di carica e di corrente. Le condizioni  $\square E_x(t, \mathbf{r}) = 0$ ,  $\square E_y(t, \mathbf{r}) = 0$  e  $\square E_z(t, \mathbf{r}) = 0$  sono equivalenti e comportano che

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{L^2\pi^2}{a^2} + \frac{M^2\pi^2}{b^2} + k_z^2 = 0$$

Quindi, scelti  $L$ ,  $M$  e  $k_z$ , la frequenza è univocamente determinata dalla **relazione di dispersione**

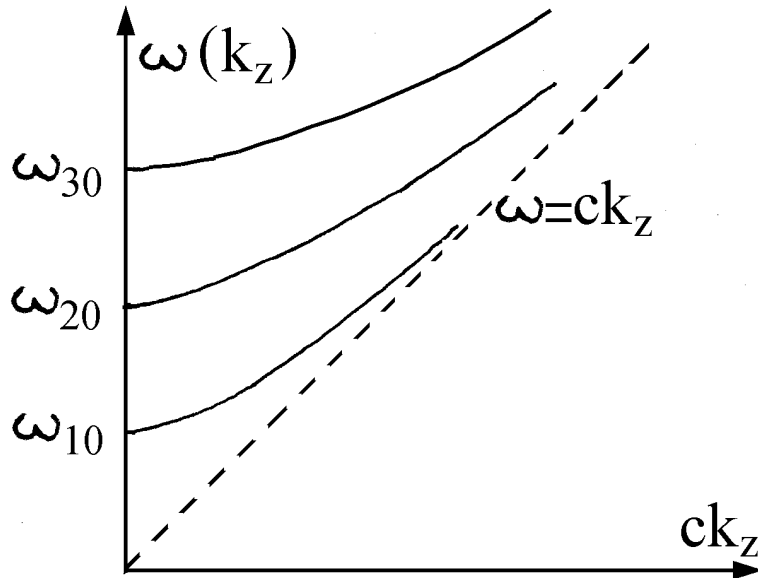
$$\omega(k_z) = \sqrt{\omega_{LM}^2 + c^2 k_z^2} \quad \text{dove} \quad \omega_{LM} = c \sqrt{\left(\frac{L\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{M\pi}{b}\right)^2} \quad (16.3)$$

che copia quella del collisionless plasma con  $k$  sostituito da  $k_z$  ed  $\omega_p$  sostituito da  $\omega_{LM}$ . Ad esempio le relazioni di dispersione per  $M = 0$  ed  $L = 1, 2, 3$  sono riportate in figura 4. Si noti che le **velocità di fase**  $\omega(k_z)/k_z$  sono maggiori di  $c$ , mentre le **velocità di gruppo**  $d\omega(k_z)/dk_z$  sono minori di  $c$ : partono da zero per  $k_z = 0$  e tendono a  $c$  per  $k_z \rightarrow \infty$ .

Dalle equazioni 2) si vede che i campi con  $L = 0$  sono polarizzati con campo elettrico lungo l’asse  $x$ , infatti hanno componenti

$$\left( E \sin\left(M\frac{\pi y}{b}\right) e^{i[k_z z - \omega(k_z)t]}, 0, 0 \right)$$

Fig. 16.4

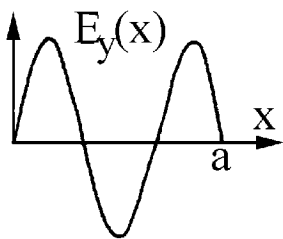


Analogamente si vede che i campi con  $M = 0$  sono polarizzati con campo elettrico lungo l'asse  $y$ , infatti hanno componenti

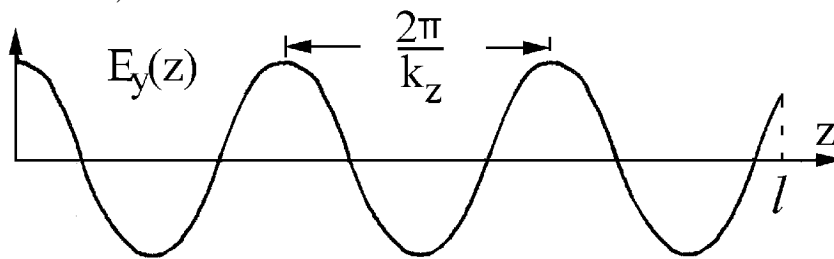
$$\left( 0, E \sin\left(L \frac{\pi x}{a}\right) e^{i[k_z z - \omega(k_z)t]}, 0 \right)$$

In entrambi i casi il campo ELETTRICO ha davvero divergenza nulla ed è trasverso alla direzione di propagazione, ma il campo MAGNETICO non è trasverso: la componente  $B_z$  non è nulla. Infatti la legge di induzione mostra che  $\partial B_z / \partial t = \partial E_x / \partial y$  nel primo caso e che  $\partial B_z / \partial t = -\partial E_y / \partial x$  nel secondo. Si usa dire che i campi del primo tipo “riempiono” i **modi di propagazione**  $TE_{0M}$ , quelli del secondo tipo “riempiono” i **modi di propagazione**  $TE_{L0}$ . Ad esempio i campi ELETTRICI che possono riempire

Fig. 16.5 a)



b)



il modo di propagazione  $TE_{30}$ , oscillano lungo l'asse  $y$  in modo stazionario, con 3 semionde contenute nella larghezza  $a$ , come mostrato nella figura 5a), e si propagano lungo l'asse  $z$  con lunghezza d'onda  $2\pi/K_z$ , come mostrato nella figura 5b). Attenzione al linguaggio: il modo di propagazione è unico, ma può contenere campi ELETTRICI di ampiezza arbitraria e  $k_z$  arbitraria.

Finora abbiamo considerato modi di propagazione con  $L = 0$ , oppure con  $M = 0$ , ed abbiamo visto che non possono essere Trasversi Magnetici (TM), sono necessariamente TE. Ora vogliamo mostrare che i campi di un generico modo di propagazione con  $L \neq 0$  ed  $M \neq 0$  possono essere descritti come

sovrapposizione di campi che riempiono due modi di propagazione ortogonali l'uno all'altro: il modo  $TE_{LM}$  ed il modo  $TM_{LM}$ . Allo scopo partiamo dalle equazioni 2) e notiamo che la condizione  $\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0$  conduce a

$$(-E_x L \frac{\pi}{a} - E_y M \frac{\pi}{b} + i E_z k_z) \sin(L \frac{\pi x}{a}) \sin(M \frac{\pi y}{b}) e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

Quindi i campi dei modi  $TE_{LM}$  devono avere  $E_y = -E_x \frac{Lb}{Ma}$  (16.4)

Poi calcoliamo  $\partial B_z(t, \mathbf{r})/\partial t$  con la legge di induzione e notiamo che

$$\frac{\partial B_z(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \left( E_x M \frac{\pi}{b} - E_y L \frac{\pi}{a} \right) \cos(L \frac{\pi x}{a}) \cos(M \frac{\pi y}{b}) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Quindi i campi dei modi  $TM_{LM}$  devono avere  $E_y = E_x \frac{Ma}{Lb}$  (16.4')

Dalle equazioni 4) e 4') si vede che i campi  $TE_{LM}$  sono ortogonali in senso stretto ai campi  $TM_{LM}$ , infatti, indicate con apice le componenti dei secondi, il consueto prodotto scalare di campi  $TE_{LM}$  e  $TM_{LM}$  risulta

$$E_x E'_x + E_y E'_y + E_z E'_z = E_x E'_x - E_x \frac{Lb}{Ma} E'_x \frac{Ma}{Lb} + 0 = 0$$

Si noti bene che, come per i modi  $TE_{L0}$  e  $TE_{0M}$ , i modi  $TE_{LM}$  e  $TM_{LM}$  sono univocamente individuati da  $L$  ed  $M$ , ma i campi che riempiono un dato modo possono essere diversi, sia perché  $k_z$  può essere scelto arbitrariamente, sia perché può essere scelta arbitrariamente l'ampiezza  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ . E si noti che i campi che riempiono due modi di propagazione con indici diversi sono certamente "ortogonali" l'uno all'altro nel volume della guida, basta procedere come suggerito nell'esercizio 1) per convincersene.

Insomma, un qualunque campo ELETTRICO nella guida può essere descritto come sovrapposizione di campi ELETTRICI elementari che riempiono i modi di propagazione  $TE_{LM}$  e  $TM_{LM}$ . I modi TE possono avere uno dei due indici nullo, i modi TM devono avere entrambi gli indici diversi da zero. Ad esempio se fosse nullo  $M$  sarebbero nulle  $E_z$  ed  $E_x$  quindi anche  $E_y$ .

Nella tecnologia delle microonde si usa scegliere  $a = 2b$  in modo che il modo  $TE_{01}$  abbia **frequenza di soglia**  $\omega_{01}$  doppia di quella del modo  $TE_{10}$  ed uguale a quella del modo  $TE_{20}$ . In tal caso, in tutta la banda compresa tra  $\omega_{10}$  ed  $\omega_{20}$ , la guida d'onda è selettiva: trasmette potenza solo nel modo  $TE_{10}$ . Per tale ragione si usa dire che il modo  $TE_{10}$  è il **modo dominante delle guide d'onda rettangolari**.

Finora, avendo usato l'approssimazione di conducibilità infinita, abbiamo trascurato le perdite di energia in riflessione. Ora ricordiamo le equazioni 11.28) e notiamo che, per angoli di incidenza grandi, la dissipazione in condizioni TE è molto minore che in condizioni TM. Quindi una guida alimentata in modo misto attenua i campi ELETTRICI dei modi TE molto meno di

quelli dei modi TM. Insomma è vero che i modi TE e TM con indici uguali hanno la stessa relazione di dispersione, ma è anche vero che hanno perdite di energia in riflessione ben diverse.

### ESERCIZI

1) Ricordare le formule di prostaferesi

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) , \quad 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) , \quad 2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

e dimostrare che i campi ELETTRICI di due modi di propagazione con indici diversi sono “ortogonali” nel volume della guida.

2) Considerare onde elettromagnetiche nell’intercapedine tra due lastre piane parallele e dimostrare che si propagano con la relazione di dispersione del vuoto illimitato.

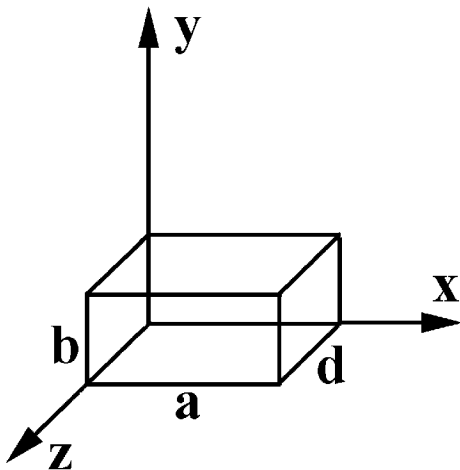
## 16.2 Modi di oscillazione del campo EM nelle cavità

Con riferimento alla figura 6a), consideriamo un parallelepipedo rettangolo di lati  $a$ ,  $b$  e  $d$ , con pareti interne perfettamente conduttrici. Sappiamo che sulle pareti il campo ELETTRICO deve essere nullo oppure deve essere normale alle pareti con derivata nulla, quindi le componenti di un campo elettrico armonico devono essere

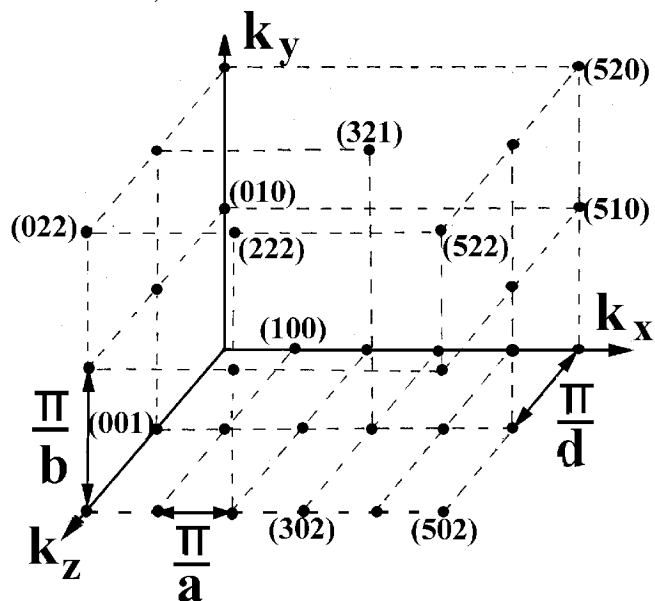
$$\begin{aligned} E_x(t, \mathbf{r}) &= E_x \cos(L\pi x/a) \sin(M\pi y/b) \sin(N\pi z/d) e^{-i\omega t} \\ E_y(t, \mathbf{r}) &= E_y \sin(L\pi x/a) \cos(M\pi y/b) \sin(N\pi z/d) e^{-i\omega t} \\ E_z(t, \mathbf{r}) &= E_z \sin(L\pi x/a) \sin(M\pi y/b) \cos(N\pi z/d) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (16.5)$$

dove  $L$ ,  $M$  ed  $N$  sono numeri interi positivi (uno dei tre può essere nullo).

Fig. 16.6 a)



b)





Dati  $L$ ,  $M$  ed  $N$ , la condizione che i dalambertiani delle componenti 5) siano nulli individua univocamente la frequenza

$$\omega_{LMN} = c \sqrt{\left(\frac{L\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{M\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{N\pi}{d}\right)^2} \quad (16.6)$$

e la condizione che il campo abbia divergenza nulla impone che i coefficienti  $E_x$ ,  $E_y$  ed  $E_z$  siano legati dalla relazione

$$L \frac{\pi}{a} E_x + M \frac{\pi}{b} E_y + N \frac{\pi}{d} E_z = 0$$

che determina univocamente  $E_z$  quando sono dati  $E_x$  ed  $E_y$ . Ciò comporta che, fissati  $L$ ,  $M$  ed  $N$ , rimangono individuati solo due **modi di oscillazione** indipendenti del campo EM nella cavità, ad esempio uno con  $\mathbf{E}$  polarizzato lungo l'asse  $x$ , l'altro con  $\mathbf{E}$  polarizzato lungo l'asse  $y$ . Entrambi i modi possono essere riempiti con campi EM di ampiezza arbitraria. Naturalmente due modi con polarizzazioni ortogonali sono "ortogonali" e non è difficile convincersi che due modi con indici diversi sono "ortogonali" nella cavità, anche quando hanno la stessa polarizzazione. Quindi, un generico campo EM nella cavità può essere descritto come sovrapposizione di campi "ortogonali", individuati da tre interi, dal verso di polarizzazione e dall'energia, e possiamo essere certi che l'energia elettromagnetica contenuta nella cavità è la somma delle energie contenute in tutti i modi di oscillazione della cavità.

Ora domandiamo: **per una cavità di volume  $\mathcal{V}$ , quanti modi di oscillazione "ortogonali" l'uno all'altro hanno  $(k_x, k_y, k_z)$  tale che  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  sia compreso tra  $k$  e  $k + dk$ ? Le scelte possibili per  $(k_x, k_y, k_z)$  sono i punti del reticolo reciproco  $(L\pi/a, M\pi/b, N\pi/d)$  considerato nella figura 6b). Il numero di tali punti compresi nell'intercapedine tra  $k$  e  $k + dk$  del primo ottante è il rapporto tra il volume di tale intercapedine, pari a  $4\pi k^2 dk/8$ , ed il volume della cella elementare del reticolo reciproco, pari a  $(\pi/a)(\pi/b)(\pi/d)$ . Pertanto possiamo rispondere che **il numero di modi di oscillazione del campo EM nel volume  $\mathcal{V} = abd$ , con vettore d'onda di modulo compreso tra  $k$  e  $k + dk$  vale****

$$2 \frac{4\pi k^2 dk}{8} \frac{abd}{\pi^3} = \left(\frac{k}{\pi}\right)^2 \mathcal{V} dk \quad (16.7)$$

Il fattore 2 tiene conto che, per ogni scelta dei tre interi, sono possibili due stati di polarizzazione linearmente indipendenti. Sostituendo  $k$  con  $\omega/c$  vediamo che **il numero di modi del campo EM nel volume  $\mathcal{V}$  e nella banda compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  vale**

$$\mathcal{D}(\omega) \mathcal{V} d\omega \quad \text{dove} \quad \mathcal{D}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (16.8)$$

La grandezza  $\mathcal{D}(\omega)$  prende il nome di **densità-spettrale di modi**.

Infine sottolineiamo che **il numero di modi nel volume  $\mathcal{V}$  e nella banda compresa tra  $\omega$  ed  $\omega + d\omega$  vale  $\mathcal{D}(\omega)\mathcal{V}d\omega$  anche quando le pareti non sono metalliche ed anche quando non vi sono pareti.** In tal caso i modi nel volume di interesse possono essere diversi da quelli che abbiamo descritto, ma insistiamo: **il numero di modi nel volume  $\mathcal{V}$  e nella banda compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  vale  $\mathcal{D}(\omega)\mathcal{V}d\omega$  in ogni caso.** Per convincersene basta pensare che il volume di interesse sia contenuto entro una cavità con pareti metalliche, valutare il numero di modi entro la cavità e moltiplicarlo per il rapporto tra il volume di interesse e quello della cavità.

### 16.3 Il problema del corpo nero

Le misure della potenza che il Sole distribuisce su una superficie terrestre nella banda compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  erano già molto accurate nella seconda metà dell'800 ed erano state estese dal visibile al lontano infrarosso ed all'ultravioletto grazie all'uso dei reticoli di diffrazione introdotti da Rowland intorno al 1880. Inoltre era stata analizzata nelle sue componenti spettrali la radiazione emessa da un foro di area  $A$  praticato nelle pareti di un forno a temperatura  $T$ . Si era osservato quanto segue.

- Il foro si comporta come la superficie di un corpo nero ideale: irradia nello spazio tutta la potenza che attraversa la sua superficie provenendo dall'interno. Precisamente la potenza emessa è il prodotto della densità d'energia  $u$  presente entro il forno per  $Ac/4$ . L'origine del fattore  $1/4$  è illustrata in figura 7: la radiazione viaggiante in un verso inclinato di  $\theta$  sulla normale al foro esce con sezione trasversale di area  $A \cos \theta$ ; il fattore  $1/4$  è il valor medio di  $\cos \theta$  sull'emisfera d'uscita.
- La potenza emessa dal foro è proporzionale all'area ed alla quarta potenza della temperatura, come precisato dalla legge empirica introdotta da **Stefen e Boltzmann** nel 1879:

$$W = \sigma AT^4 \quad \text{dove} \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (16.9)$$

- La potenza-spettrale  $dW(\omega)/d\omega$  emessa dal foro dipende da  $\omega$  come in figura 8: parte con andamento quadratico in  $\omega$ , raggiunge valore massimo per  $\omega = \omega_{max}$ , poi diminuisce e tende a zero esponenzialmente. La frequenza di massima emissione risulta proporzionale alla temperatura come precisato dalla legge empirica scoperta da **Wien** nel 1893:

$$\omega_{max} = \alpha T \quad \text{dove} \quad \alpha = 3.7 \cdot 10^{11} K^{-1} s^{-1} \quad (16.10)$$

- A parità di area e di temperatura, una superficie di riflettività  $\mathcal{R}$  emette la frazione  $1 - \mathcal{R}$  della potenza emessa da una superficie nera. Se ne emettesse di più o di meno l'energia potrebbe fluire da un corpo lucido ad un corpo

Fig. 16.7

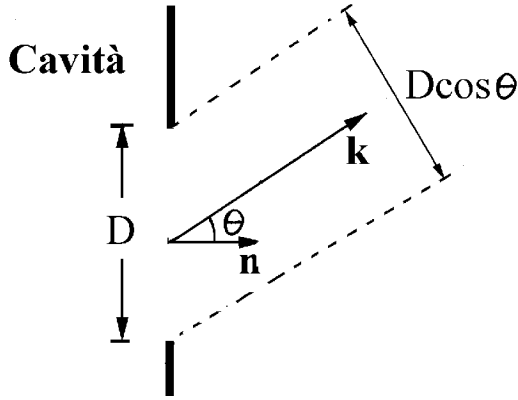
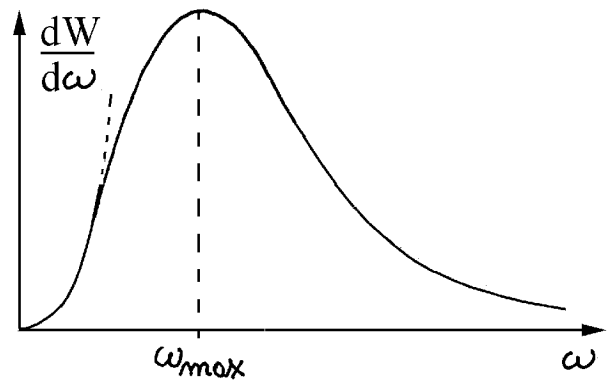


Fig. 16.8



nero, o viceversa, anche quando i due corpi hanno la stessa temperatura, ed il secondo principio della termodinamica sarebbe violato.

Il problema di giustificare le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann a partire dalle leggi fondamentali conosciute costituiva il **problema del corpo nero**. Si sapeva che una cavità di volume  $\mathcal{V}$  contiene  $\mathcal{D}(\omega)\mathcal{V}d\omega$  modi di frequenza compresa tra  $\omega$  ed  $\omega + d\omega$  e si sapeva che l'energia della cavità è la somma delle energie distribuite nei vari modi, ma l'approccio classico al calcolo dell'energia immagazzinata in un modo portava ad un risultato inconsistente. Per capire bene questo punto procediamo al calcolo con approccio discreto, ovvero pensiamo che l'energia nel modo possa assumere solo i valori  $N\epsilon$ , con  $N$  intero, riservandoci di far tendere  $\epsilon$  a zero al termine del calcolo.

La legge fondamentale della fisica statistica stabilisce che, in condizioni di equilibrio termodinamico a temperatura  $T$ , la probabilità  $p_N$  che il modo contenga l'energia  $N\epsilon$  vale

$$p_N = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-N\epsilon/k_B T}$$

La costante  $\mathcal{Z}$  è determinata dalla condizione  $\sum_{N=0}^{\infty} p_N = 1$  e risulta

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-N\epsilon/k_B T} = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon/k_B T}}$$

Quindi la probabilità che il modo abbia energia  $N\epsilon$  vale

$$p_N = (1 - e^{-\epsilon/k_B T}) e^{-N\epsilon/k_B T} \quad (16.11)$$

e l'energia media del modo risulta

$$\bar{\mathcal{E}} = \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon N p_N = \epsilon (1 - e^{-\epsilon/k_B T}) \sum_{N=0}^{\infty} N e^{-N\epsilon/k_B T}$$

Per valutare la somma di destra poniamo  $x = \epsilon/k_B T$  e notiamo che

$$\sum_{N=0}^{\infty} N e^{-Nx} = -\frac{d}{dx} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-Nx} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{(1 - e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{e^{-\epsilon/k_B T}}{(1 - e^{-\epsilon/k_B T})^2}$$

Dunque l'energia media di un modo in equilibrio termodinamico vale

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\epsilon e^{-\epsilon/k_B T}}{1 - e^{-\epsilon/k_B T}} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} \quad (16.12)$$

Facendo tendere  $\epsilon$  a zero, otteniamo il risultato  $\bar{\mathcal{E}} = k_B T$ , noto come “teorema” classico di equipartizione dell'energia nei modi vibrazionali in equilibrio termodinamico. Se tale “teorema” valesse davvero la densità-spettrale di energia nella cavità varrebbe  $k_B T \mathcal{D}(\omega)$  e la potenza-spettrale emessa dalla superficie nera risulterebbe

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{Ac}{4} k_B T \mathcal{D}(\omega) = Ak_B T \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}$$

Questo risultato descrive bene la potenza spettrale emessa dal corpo nero a basse frequenze, come mostrato dalla curva tratteggiata in figura 8, ma è totalmente inadeguato ad alte frequenze. Ma basta porre

$$\epsilon = \hbar\omega \quad , \quad \text{con} \quad \hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

nell'equazione 12) per giungere ad un accordo perfetto con le leggi empiriche del corpo nero. Con questa scoperta Planck ha dato inizio alla rivoluzione quantistica proprio all'inizio del '900.

In linguaggio moderno la scoperta di Planck dice quanto segue.

- Un modo di oscillazione del campo EM di vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e polarizzazione definiti può essere occupato da un numero intero  $N$  di fotoni di energia  $\hbar\omega$ .
- In condizioni di equilibrio termodinamico l'energia media in un modo vale

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (16.13)$$

quindi il numero medio di fotoni nel modo risulta

$$\bar{N} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (16.14)$$

Si noti che questa equazione può essere scritta anche nella forma

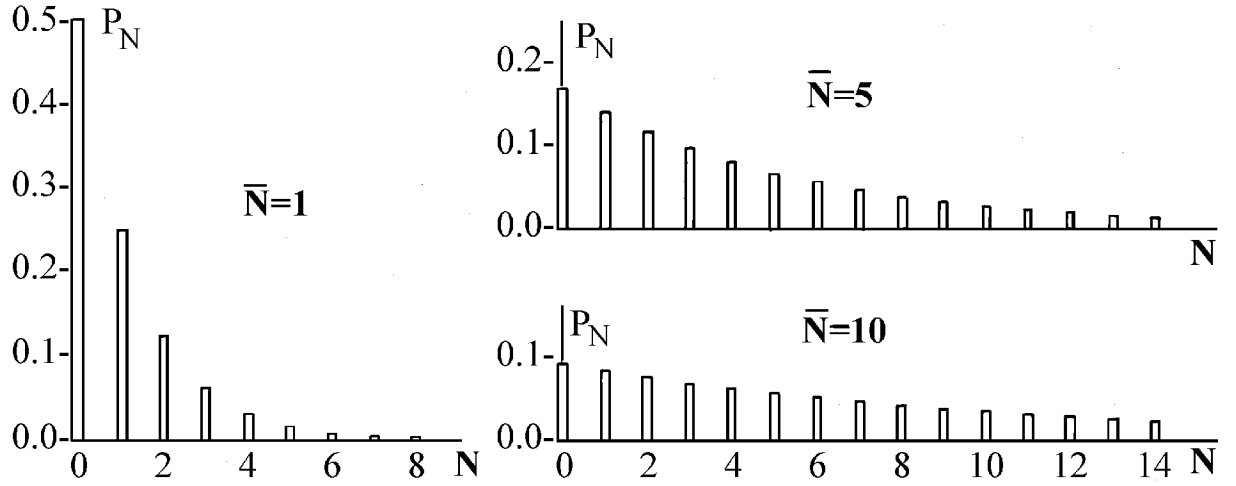
$$e^{\hbar\omega/k_B T} = 1 + \frac{1}{\bar{N}} = \frac{\bar{N} + 1}{\bar{N}} \quad (16.14')$$

- In condizioni di equilibrio termodinamico, **la probabilità che un modo contenente in media  $\bar{N}$  fotoni ne contenga esattamente  $N$  vale**

$$p_N = (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) e^{-N\hbar\omega/k_B T} = \frac{1}{\bar{N} + 1} \left( \frac{\bar{N}}{\bar{N} + 1} \right)^N \quad (16.15)$$

e decresce monotonamente all'aumentare di  $N$  come mostrato in figura 9. Sottolineiamo che **qualunque sia  $\bar{N}$ ,  $p_N$  è massima per  $N = 0$ .**

**Fig. 16.9**



Si noti che il volume della cavità non entra nelle equazioni 13), 14) e 15). Quando il volume, aumenta aumenta il numero di modi, quindi l'energia totale, ma l'energia in un modo, il numero medio di fotoni nel modo e la probabilità che il modo sia occupato da  $N$  fotoni non cambiano. Quindi, fissata l'attenzione su un particolare volume  $\mathcal{V}$ , dobbiamo pensare che **ciascun fotone sia distribuito in tutto il volume e contribuisca con  $\hbar\omega/\mathcal{V}$  alla densità d'energia**. All'aumentare del volume la densità d'energia associata a ciascun fotone diminuisce, ma la densità d'energia totale rimane inalterata perché aumenta il numero di modi.

Per mostrare che la teoria di Planck è davvero in accordo con i fatti sperimentali, moltiplichiamo la densità-spettrale di modi per il numero medio di fotoni nel modo e per l'energia di ciascun fotone e scriviamo la **densità spettrale d'energia di Planck**

$$\rho_{eq}(\omega) = \mathcal{D}(\omega)\bar{N}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (16.16)$$

L'indice *eq* ricorda che l'equazione 16) vale in condizioni di equilibrio termodinamico. Moltiplicando per  $Ac/4$  otteniamo la potenza-spettrale emessa da un foro di area  $A$  praticato nelle pareti della cavità:

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{Ac\rho_{eq}(\omega)}{4} = A \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (16.17)$$

Per verificare la consistenza di questo risultato con le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann conviene introdurre la variabile  $x = \hbar\omega/k_B T$  e scrivere

$$\frac{dW(x)}{dx} = AT^4 \frac{k_B^4}{4\pi^2c^2\hbar^3} \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (16.17')$$

Derivando rispetto ad  $x$  si vede che la potenza-spettrale è massima quando  $x = 3 - 3e^{-x}$ . Questa equazione, oltre alla soluzione  $x = 0$ , ha soluzione  $x \approx 2.82$ , quindi la potenza-spettrale massima viene emessa alla frequenza

$$\omega_{max} = 2.82 \frac{k_B T}{\hbar}$$

Fu proprio il confronto di questo risultato con la legge di Wien che permise a Planck di determinare un valore di  $\hbar$  in accordo con quello che oggi conosciamo entro l'1%. Infine, integrando ambo i membri dell'equazione 17') e tenendo conto che  $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)dx = \pi^4/15$ , si giunge alla legge empirica di Stefan-Boltzmann e si vede che la costante  $\sigma$  è legata a  $k_B$ ,  $c$  ed  $\hbar$  dalla relazione

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2 \hbar^3}$$

L'accordo con il valore sperimentale della costante di Stefan-Boltzmann è tale da non lasciare dubbi sul fatto che l'energia EM sia davvero quantizzata.

## 16.4 Livelli energetici e stati quantici

Nel primo decennio del secolo scorso gli spettri d'emissione e d'assorbimento degli elementi semplici erano ben conosciuti sperimentalmente, ma mancava una teoria capace di giustificarli. Si sapeva bene che le energie dei fotoni emessi o assorbiti dall'atomo di idrogeno sono centrate intorno a valori ben precisi dati dalla **formula empirica di Balmer**

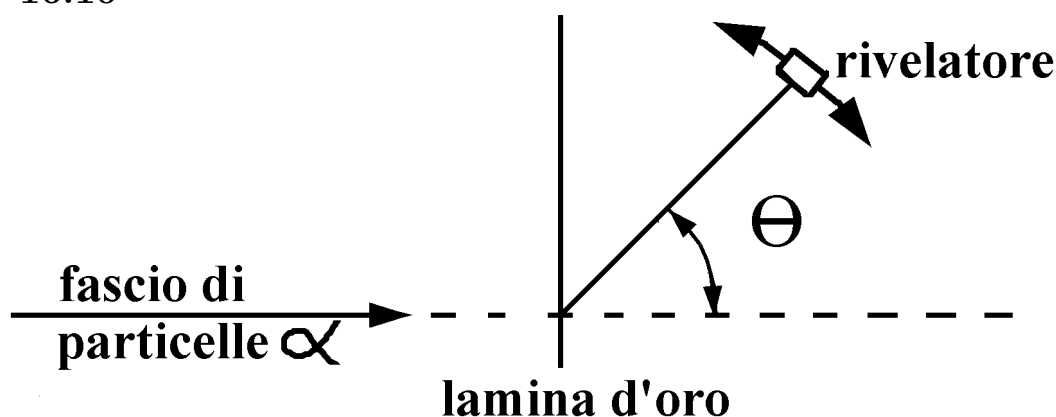
$$\hbar\omega = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \text{dove } n_1 \text{ ed } n_2 \text{ sono interi positivi} \quad (16.18)$$

e si conosceva il valore della **costante di Rydberg**  $R = 13.605 \text{ eV}$ . Già nel 1885 Balmer aveva notato che l'equazione 18), con  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ , riproduce bene le frequenze delle righe spettrali visibili, qualche anno dopo Lyman aveva osservato la serie di frequenze ultraviolette corrispondenti a  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2, 3, 4, \dots$ , serie che abbiamo descritto nel paragrafo 10.7, e nel 1908 Paschen aveva osservato la serie di frequenze infrarosse corrispondenti a  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4, 5, 6, \dots$ . La formula di Balmer suggerisce che l'atomo di idrogeno può esistere solo in livelli di energia  $E_n = -R/n^2$  e che emette o assorbe energia quando passa dall'uno all'altro di tali livelli. Ad esempio, passando dal livello di energia  $\mathcal{E}_3$  al livello di energia  $\mathcal{E}_2$  l'atomo perde l'energia  $R(1/4 - 1/9) = 1.89 \text{ eV}$  ed emette un fotone rosso porpora.

La prima chiave di lettura della gran mole di risultati acquisiti dai pionieri della spettroscopia atomica viene fornita nel 1911 da esperimenti di collisione tra particelle nucleari condotti da Geiger e Mardsen nel laboratorio diretto da Rutherford. Come mostrato in figura 10, un fascio di particelle  $\alpha$ , ben collimato in angolo ed energia, viene inviato su un sottile foglio d'oro e la distribuzione angolare di particelle  $\alpha$  emergenti dal foglio viene misurata da un rivelatore ruotabile. Rutherford si accorge che le particelle  $\alpha$  vengono deflesse anche a grandi angoli e mostra che i risultati sono consistenti con l'idea che l'atomo sia costituito da un nucleo centrale massivo circondato da una nuvola di elettroni leggerissima. A quel punto sembrava naturale pensare che l'elettrone dell'atomo di idrogeno si comportasse come un pianeta in

moto nel campo elettrostatico generato dal protone, ma non si riusciva a capire come l'elettrone potesse evitare di emettere radiazione per lunghi tempi e decidersi a farlo solo occasionalmente: secondo la fisica classica avrebbe dovuto irradiare energia elettromagnetica con continuità e spiraleggiare sino a cadere sul protone. Invece, l'esistenza stessa dell'atomo d'idrogeno mostrava che un atomo di energia  $E_1 = -R$ , sottratto a stimoli, rimane nello stato rilassato senza emettere radiazione, e la formula di Balmer mostrava che l'assorbimento o l'emissione di radiazione avviene solo per frequenze ben definite. Ad evitare malintesi sottolineiamo che la formula di Balmer si riferisce alle energie di picco degli spettri di emissione o assorbimento, non dice nulla riguardo alla larghezza dei picchi. In realtà i picchi hanno il profilo lorentziano (M.15) con larghezze tanto piccole da meritare il nome di righe. Ad esempio la radiazione emessa nella transizione dal primo stato eccitato allo stato fondamentale ha larghezza di banda intrinseca  $\Gamma_0 \approx 10^{-7}\omega_0$ .

Fig. 16.10



La seconda chiave di lettura degli esperimenti spettroscopici viene fornita da Bohr nel 1913. Bohr avanza l'ipotesi che l'elettrone di un atomo d'idrogeno nel livello energetico  $E_n$  orbiti con momento angolare  $n\hbar$ , con  $n$  intero diverso da zero, e mostra che questa semplice regola di quantizzazione, insieme all'ipotesi che l'atomo emetta o assorba radiazione solo quando passa da un livello energetico all'altro, conduce ad un accordo impressionante con la formula di Balmer, si veda in proposito l'esercizio 1. Ma attenzione: **la regola di quantizzazione di Bohr non è corretta. Nell'atomo di idrogeno in un livello di energia  $E_n = -R/n^2$  il momento angolare dell'elettrone NON vale  $n\hbar$ , può assumere uno qualunque dei valori  $l\hbar$ , con  $l$  intero compreso tra 0 ed  $n - 1$ .** In particolare l'atomo di idrogeno rilassato NON ha momento angolare  $\hbar$ , ha momento angolare nullo e completa simmetria sferica, con densità di carica data dall'equazione 1.4). Inoltre, **la proiezione del momento angolare su un qualunque asse può prendere i valori  $m\hbar$  con  $m$  intero compreso tra  $-l$  ed  $l$ .** Ad esempio l'elettrone dell'atomo d'idrogeno nel livello energetico  $E_4$  può avere momento angolare  $3\hbar$  con 7 diverse proiezioni sull'asse  $z$ , può avere momento angolare  $2\hbar$  con 5 diverse proiezioni sull'asse  $z$ , può avere momento angolare

$\hbar$  con 3 diverse proiezioni sull'asse  $z$  e può avere momento angolare nullo. Dunque al livello energetico  $E_4$  corrispondono  $7+5+3+1 = 4^2$  stati quantici diversi, ciascuno individuato dai tre interi  $4, l, m$ . In linguaggio quantistico si dice che il livello energetico  $E_4$  dell'atomo d'idrogeno è 16 volte degenere, ad intendere che 16 stati diversi hanno energia  $E_4$ . Analogamente il livello energetico  $E_3$  è nove volte degenere, il livello energetico  $E_2$  è quattro volte degenere ed il livello energetico  $E_1$  è non degenere.

Per atomi diversi dall'atomo d'idrogeno i livelli energetici dipendono non solo dal numero quantico principale  $n$ , ma anche dal numero quantico  $l$  che individua il momento angolare. Tuttavia rimane vero che le energie dei fotoni emessi o assorbiti sono ben descritte dalle differenze di due termini specifici dell'elemento. Questa affermazione è la regola di combinazione enunciata da Ritz già nel 1908. Aggiungiamo che, quando gli spettri sono misurati con interferometri ad alta risoluzione emergono effetti che possono essere interpretati solo ammettendo che l'elettrone abbia un momento angolare intrinseco. Inoltre l'analisi degli spettri mostra che i picchi di emissione o assorbimento sono intensi solo quando le transizioni avvengono tra due stati atomici che hanno momenti angolari differenti per  $\pm\hbar$ . Di tali effetti si occuperanno i corsi di fisica quantistica, noi procederemo come se non esistessero.

Nel 1917 Einstein torna ad occuparsi dell'interazione radiazione-materia dopo aver completato la teoria della relatività generale. A quel tempo l'idea di Bohr che l'atomo possa vivere senza irradiare con continuità, non solo quando è nello stato rilassato, ma anche quando è in stati eccitati di momento angolare multiplo intero di  $\hbar$ , era ben affermata, ma la descrizione corretta dei possibili stati atomici non era disponibile. Tuttavia era ben chiaro che diversi stati atomici possono avere la stessa energia ed era chiaro che la transizione tra due stati atomici di energia diversa può comportare l'emissione o l'assorbimento di un quanto di energia pari alla differenza tra le energie dei due stati. Era anche ben conosciuta la legge fondamentale della fisica statistica introdotta da Boltzmann ed enunciata in tutta generalità da Gibbs nel 1902. Si sapeva che, condizioni di equilibrio termodinamico, la probabilità che un atomo sia in uno dei  $g_n$  stati di energia  $E_n$  vale

$$p_{stato} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-E_n/k_B T} \quad \text{dove} \quad \mathcal{Z} = \sum_{stati} e^{-E_n/k_B T} = \sum_n g_n e^{-E_n/k_B T} \quad (16.19)$$

Il calcolo della costante  $\mathcal{Z}$  richiede la conoscenza delle energie  $E_n$  e delle degenerazioni  $g_n$  di tutti i possibili livelli energetici ed è il problema fondamentale della fisica statistica. Ma ora siamo interessati al rapporto tra le probabilità  $p_\alpha$  e  $p_\beta$  di trovare l'atomo negli stati quantici  $\alpha$  e  $\beta$ , quindi  $\mathcal{Z}$  non ci interessa. Per evitare di confondere gli stati con i livelli energetici, indichiamo con  $E(\alpha)$  ed  $E(\beta)$  le energie dei due stati, conveniamo che  $E(\beta)$  sia maggiore di  $E(\alpha)$ , e notiamo che

$$p_\alpha/p_\beta = e^{[E(\beta)-E(\alpha)]/k_B T}$$



Insomma: **il rapporto  $p_\alpha/p_\beta$  dipende solo dalla temperatura e dalla differenza d'energia dei due stati.** Posto  $E(\beta) - E(\alpha) = \hbar\omega_{\alpha\beta}$  ed indicati con  $\overline{N}_\alpha$  ed  $\overline{N}_\beta$  i numeri medi di atomi nei due stati quantici in condizioni di equilibrio termodinamico, possiamo scrivere

$$\frac{p_\alpha}{p_\beta} = \frac{\overline{N}_\alpha}{\overline{N}_\beta} = e^{\hbar\omega_{\alpha\beta}/k_B T} \quad (16.20)$$

Questa equazione consente di capire la differenza principale tra gli spettri di emissione e di assorbimento delle sostanze. Ricordando che a temperatura ambiente  $k_B T$  vale circa  $1/40$  eV, e che la differenza di energia tra lo stato rilassato ed il primo stato eccitato è dell'ordine di  $10$  eV, si vede che il rapporto tra la probabilità che un atomo sia in un particolare stato eccitato e quella che sia rilassato è davvero piccolissima a  $T$  ambiente, infatti  $p_\beta/p_\alpha$  è dell'ordine di  $e^{-400} \approx 10^{-174}$ . Invece alla temperatura di  $3000K$  lo stesso rapporto diventa dell'ordine di  $e^{-40} \approx 4 \cdot 10^{-18}$ . Sembra ancora piccolissimo, ma la densità di un gas a pressione atmosferica e temperatura di  $3000K$  vale  $\approx 3 \cdot 10^{24}/m^3$ , quindi la densità di atomi eccitati in tali condizioni è dell'ordine di  $10^7/m^3$ . Si noti anche che la popolazione degli stati eccitati dipende in modo molto forte dalla temperatura, ad esempio a  $3500K$  è circa  $300$  volte maggiore che a  $3000K$ . Per tali ragioni gli spettri di emissione da fiamme e da corpi incandescenti sono molto diversi dagli spettri di assorbimento dei gas a temperatura ambiente. Ad esempio l'idrogeno atomico rilassato a temperatura ambiente assorbe solo i fotoni di energie corrispondenti alla serie di Lyman, come abbiamo visto nel paragrafo 10.7, ma l'idrogeno del Sole emette ed assorbe fotoni di tutte le serie.

Infine notiamo che le equazioni 20) e 14') comportano che: **in condizioni di equilibrio termodinamico, il numero medio  $\overline{N}$  di fotoni in uno qualunque dei modi della cavità di frequenza  $\omega_{\alpha\beta}$  è legato alle popolazioni medie  $\overline{N}_\alpha$  ed  $\overline{N}_\beta$  dei due stati dalla relazione**

$$\frac{\overline{N}_\alpha}{\overline{N}_\beta} = 1 + \frac{1}{\overline{N}} \quad (16.21)$$

## ESERCIZI

1) Seguendo Bohr, pensare che l'elettrone dell'atomo d'idrogeno descriva orbite circolari con momento angolare  $n\hbar$ . a) Eguagliare la forza elettrostatica agente sull'elettrone alla forza centripeta e mostrare che l' $n$ -esima orbita circolare ha raggio  $a_n$  e velocità  $v_n$  legati da

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n^2} = \frac{mv_n^2}{a_n} = \frac{(mv_n a_n)^2}{ma_n^3} \quad \implies \quad a_n = n^2 \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2}$$

b) Valutare l'energia dell'atomo come somma dell'energia potenziale e del-

l'energia cinetica e mostrare che i livelli energetici sono

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n} + \frac{1}{2}mv_n^2 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_n} = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 n^2}$$

c) Verificare che questo risultato conduce ad un valore della costante di Rydberg in buon accordo con il valore sperimentale  $R = 13.605 \text{ eV}$ .

2) Pensare che l'idrogeno della superficie solare sia in equilibrio alla temperatura di  $6000 \text{ K}$  e calcolare: a) il rapporto tra le densità di atomi in due stati di energia  $E_6$  ed  $E_5$ , b) il rapporto tra le densità di atomi nei due livelli energetici  $E_6$  ed  $E_5$ .

3) Usando il modello di Bohr, descrivere lo spettro dello ione  $He^+$  e confrontarlo con quello dell'atomo d'idrogeno.

4) Sostituire la massa dell'elettrone con la massa ridotta del sistema elettrone-nucleo e calcolare la costante di Rydberg per l'atomo di deuterio.

5) Considerare condizioni di equilibrio termodinamico alle temperature: di  $300 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$  e  $30000 \text{ K}$ . Nei tre casi, calcolare: a) la probabilità che un modo di energia  $\hbar\omega = 10 \text{ eV}$  sia occupato da 1 fotone, b) il numero medio di fotoni nel modo.

6) In condizioni di equilibrio termodinamico il numero medio di fotoni in un modo di energia  $2 \text{ eV}$  è  $\bar{N} = 10$ . Calcolare: a) la probabilità che il modo non sia occupato, b) la probabilità che sia occupato proprio da 10 fotoni, c) la temperatura, d) il rapporto tra le popolazioni di due stati quantici di energie differenti proprio di  $2 \text{ eV}$ .

## 16.5 Emissione spontanea e stimolata

Nel paragrafo 16.7 abbiamo visto che la teoria classica dello scattering Thomson deve essere intesa come una descrizione statistica dell'esito di un gran numero di processi di collisione indipendenti. Abbiamo considerato un elettrone libero confinato nel volume  $\mathcal{V}$ , abbiamo indicato con  $N$  il numero di fotoni presenti nello stesso volume ed abbiamo interpretato

$$\bar{\nu} = \frac{c\sigma_T}{\mathcal{V}}N$$

come "probabilità per unità di tempo" che l'elettrone diffonda un fotone.

Ora pensiamo che il volume  $\mathcal{V}$  contenga atomi e sia attraversato da un fascio di radiazione di frequenza  $\omega$ . Continuiamo ad indicare con  $N$  il numero di fotoni del fascio presenti nel volume  $\mathcal{V}$  e notiamo che l'intensità del fascio vale  $\mathcal{I} = c\hbar\omega N/\mathcal{V}$ . Poi fissiamo l'attenzione su un atomo nello stato  $\alpha$  e generalizziamo l'equazione  $W = \mathcal{I}\sigma(\omega)$  scrivendo che la potenza sottratta al fascio quando lo stato  $\alpha$  assorbe un fotone e transisce allo stato  $\beta$  vale

$$W = \mathcal{I}\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \hbar\omega \frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}}N$$

Dal paragrafo 10.7 sappiamo che quando lo stato  $\alpha$  è lo stato rilassato e lo stato  $\beta$  è il primo stato eccitato la sezione d'urto è data dall'equazione 10.19), ma per ora non ci preoccupiamo di descrivere la sezione d'urto  $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$ . Procedendo come abbiamo fatto nel caso dello scattering Thomson, dividiamo  $W$  per  $\hbar\omega$  e diciamo che

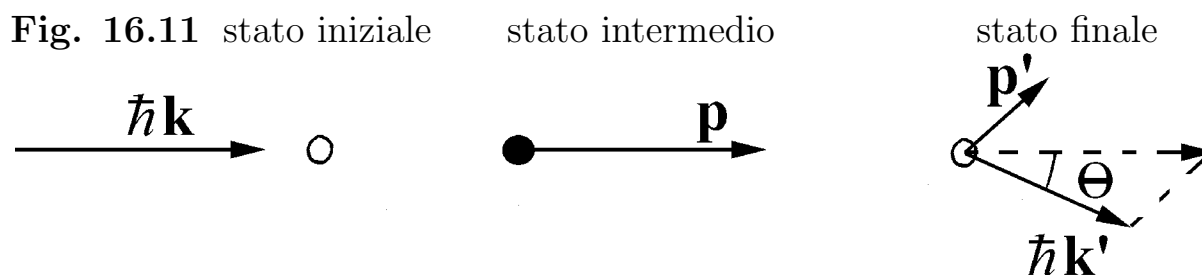
$$\bar{\nu}(\omega) = \frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}}N \quad (16.22)$$

è la “probabilità per unità di tempo” che lo stato  $\alpha$  assorba un fotone del fascio e transisca allo stato  $\beta$ . Anche in questo caso si deve intendere che  $\bar{\nu}(\omega)dt$  è la probabilità che l'assorbimento avvenga nel tempuscolo  $dt$ .

A questo punto domandiamo: che cosa avviene degli atomi che hanno assorbito un fotone e sono transiti allo stato  $\beta$ ? Per rispondere possiamo farci guidare dalle seguenti considerazioni.

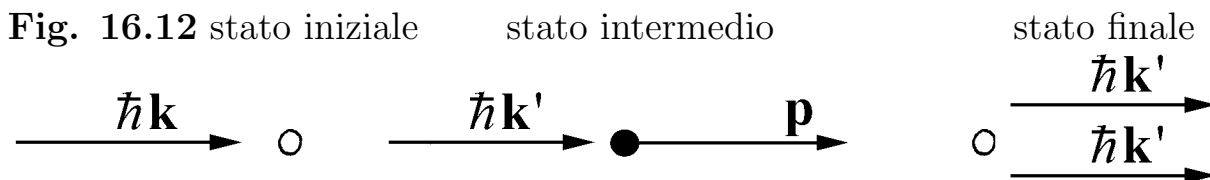
- L'atomo può transire spontaneamente dallo stato  $\beta$  allo stato  $\alpha$  emettendo un fotone in uno dei modi della cavità di frequenza  $\omega_{\alpha\beta}$ .
- Come un'altalena messa in oscillazione in passato da una forza periodica in fase con la velocità può essere fermata applicando una forza periodica in antifase con la velocità, così l'atomo stimolato dall'onda EM che lo aveva portato dallo stato  $\alpha$  allo stato  $\beta$ , può transire dallo stato  $\beta$  allo stato  $\alpha$  quando l'onda lo stimola con fase opposta.
- L'atomo nel suo complesso scambia momento con l'onda elettromagnetica incidente solo nella direzione del vettore d'onda. Infatti le componenti trasverse delle forze esercitate dall'onda elettromagnetica sulla nuvola elettronica e sul core sono opposte e l'unica forza con valor medio temporale non nullo è legata alla potenza di stimolo come precisato dall'equazione 10.1).

Partendo da tali considerazioni Einstein descrive i processi che coinvolgono un atomo nello stato  $\alpha$  come processi in due atti: atto di assorbimento di un fotone di momento  $\hbar\mathbf{k}$  ed atto di emissione di un fotone di momento  $\hbar\mathbf{k}'$ . Nel primo atto l'atomo assorbe un fotone di energia  $\hbar\omega$ , transisce dallo stato  $\alpha$  allo stato  $\beta$  ed acquista il momento  $\hbar\mathbf{k}$  con “probabilità per unità di tempo” data dall'equazione 22). Nel secondo atto l'atomo nello stato  $\beta$  emette un fotone di energia  $\hbar\omega'$ , transisce allo stato  $\alpha$  e perde il momento  $\hbar\mathbf{k}'$ . L'atto di emissione può avvenire in due modi distinti: per **emissione spontanea** oppure per **emissione stimolata**. Quando l'atto d'assorbimento è seguito da un atto di emissione spontanea, la situazione si presenta come mostrato in figura 11 (disegnata assumendo che l'atomo sia inizialmente fermo). L'atomo



assorbe un fotone di momento  $\hbar\mathbf{k}$ , si mette in moto con velocità  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$  dell'ordine del  $m/s$  e, dopo un po', emette spontaneamente un fotone di momento  $\hbar\mathbf{k}'$ , rimanendo in moto con velocità  $\mathbf{v} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')/m$ . Il risultato complessivo è che il fotone viene deflesso alla Compton dall'intero atomo. E poiché l'atomo ha una lunghezza d'onda Compton piccolissima, lo scattering è **quasi** perfettamente elastico anche quando l'angolo di deflessione è grande.

Quando l'atto d'assorbimento è seguito da un atto di emissione stimolata la situazione si presenta come in figura 12 (anch'essa disegnata assumendo che l'atomo sia inizialmente fermo). L'atomo assorbe un fotone di momento  $\hbar\mathbf{k}$  e si mette in moto con  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$ . Poi, stimolato da un secondo fotone di momento  $\hbar\mathbf{k}'$  lievemente diverso dal precedente, emette un clone di tale fotone e, in prima approssimazione, si ferma. Complessivamente entrano due fotoni di momento lievemente diverso ed escono due fotoni identici di momento  $\hbar\mathbf{k}'$ , lasciando l'atomo quasi fermo.



## ESERCIZI

1) Un atomo d'elio fermo, stimolato da un fascio di fotoni pienamente risonanti di energia  $\hbar\omega_0 = 21.2 \text{ eV}$ , assorbe un fotone. Calcolare: a) la velocità acquistata dall'atomo, b) la frequenza della radiazione in un sistema di riferimento solidale con l'atomo eccitato. Poi pensare che l'atomo eccitato decada in modo stimolato e calcolare: c) la frequenza del fotone emesso nel sistema di riferimento solidale con l'atomo e nel nostro, d) la velocità finale dell'atomo. Infine pensare che l'atomo eccitato decada in modo spontaneo emettendo un fotone nel verso opposto a quello del fascio e, nel nostro sistema di riferimento, calcolare: e) l'energia del fotone emesso, f) la velocità e l'energia finali dell'atomo.

## 16.6 Principio del bilancio dettagliato

Le transizioni radiative nei gas rarefatti hanno sezioni d'urto di piena risonanza grandissime, ma hanno larghezze di banda tanto piccole da poter ritenere che i fotoni di frequenza ben diversa da quelle di risonanza non interagiscano con gli atomi. Ora pensiamo che una cavità contenga una specie atomica che può transire dallo stato  $\alpha$  e allo stato  $\beta$  con frequenza di risonanza  $\omega_{\alpha\beta}$  e fissiamo l'attenzione su un modo del campo EM di vettore d'onda  $\mathbf{k}$  tale che  $ck$  sia poco diverso da  $\omega_{\alpha\beta}$ . In tale situazione possiamo ammettere che le transizioni radiative dirette o inverse tra gli stati atomici  $\alpha$  e  $\beta$  siano gli unici processi che possono cambiare efficacemente il numero  $N$  di

fotoni presenti nel modo considerato. Ad evitare malintesi sottolineiamo che **i numeri  $N_\alpha$  ed  $N_\beta$  di stati  $\alpha$  e  $\beta$  nella cavità possono cambiare per tante altre ragioni**, ad esempio perché tali stati decadono spontaneamente verso stati di energia minore, o perché stati di energia maggiore transiscono spontaneamente all'uno o all'altro dei due stati, o per effetto di transizioni non radiative indotte da collisioni con elettroni, ioni ed atomi eccitati da una scarica elettrica. Ma per il momento non ce ne preoccupiamo e fissiamo l'attenzione solo sul modo della cavità individuato dal particolare vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . In tale modo il numero  $N$  di fotoni diminuisce di un'unità quando uno dei fotoni provoca una transizione  $\alpha \rightarrow \beta$ , ed aumenta di un'unità sia quando una transizione stimolata  $\beta \rightarrow \alpha$  clona il fotone incidente, sia quando una transizione spontanea  $\beta \rightarrow \alpha$  emette un fotone proprio nel modo di momento  $\hbar\mathbf{k}$ . Per descrivere in dettaglio i tre processi partiamo dall'equazione 22), moltiplichiamo  $\bar{\nu}(\omega)$  per  $N_\alpha$  e notiamo che il “numero per unità di tempo” di fotoni sottratti al modo risulta

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{ass} = -\frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}}NN_\alpha \quad (16.23)$$

Poi notiamo che il “numero per unità di tempo” di fotoni restituiti al modo dai processi di clonaggio è certamente proporzionale ad  $NN_\beta$  e lo indichiamo con

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{clon} = \frac{c\sigma_{\beta\alpha}(\omega)}{\mathcal{V}}NN_\beta$$

senza porre condizioni su  $\sigma_{\beta\alpha}$ , ma riservandoci di dimostrare che è uguale a  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Infine indichiamo con  $\mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega)$  la **“probabilità per unità di tempo” che un dato stato  $\beta$  emetta spontaneamente un fotone proprio nel modo di momento  $\hbar\mathbf{k}$**  e scriviamo

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{spon} = \mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega)N_\beta$$

Pertanto la derivata temporale del numero di fotoni nel modo risulta

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}}NN_\alpha + \frac{c\sigma_{\beta\alpha}(\omega)}{\mathcal{V}}NN_\beta + \mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega)N_\beta \quad (16.24)$$

Ora pensiamo che la cavità, con tutto ciò che contiene, sia in equilibrio termodinamico a temperatura  $T$ . In tal caso  $N$ ,  $N_\alpha$  ed  $N_\beta$  fluttuano intorno ai valori di equilibrio  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}_\alpha$  ed  $\bar{N}_\beta$ . Ma in equilibrio termodinamico  $dN/dt$  deve fluttuare intorno a zero e l'equazione 24) deve ridursi a

$$0 = -\frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}}\bar{N}\bar{N}_\alpha + \frac{c\sigma_{\beta\alpha}(\omega)}{\mathcal{V}}\bar{N}\bar{N}_\beta + \mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega)\bar{N}_\beta$$

Riarrangiando i termini e dividendo per  $c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)\bar{N}\bar{N}_\beta/\mathcal{V}$  otteniamo

$$\frac{\bar{N}_\alpha}{\bar{N}_\beta} = \frac{\sigma_{\beta\alpha}(\omega)}{\sigma_{\alpha\beta}(\omega)} + \frac{\mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega)\mathcal{V}}{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)\bar{N}}$$

Questa equazione deve ridursi all'equazione 21) per qualunque  $\bar{N}$ , ovvero per qualunque temperatura, quindi dobbiamo concludere che

$$\sigma_{\beta\alpha}(\omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega) = \frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}} \quad (16.25)$$

Queste relazioni costituiscono il **principio del bilancio dettagliato di Einstein**. La prima dice che, a parità di frequenza del fotone incidente, le sezioni d'urto dei processi di assorbimento e di clonaggio sono uguali. La seconda dice che il processo di clonaggio è  $N$  volte più efficiente del processo di emissione spontanea nel ripopolare un dato modo della cavità, infatti

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{clon} = N \left(\frac{dN}{dt}\right)_{spon} \quad (16.26)$$

Si noti bene che le equazioni 25), sebbene ottenute considerando situazioni di equilibrio termodinamico, hanno validità generale. Sostituendole nelle equazioni 24) si vede che la derivata temporale del numero  $N$  di fotoni in un particolare modo del campo EM di una data cavità è legata ai numeri di fotoni nel modo ed ai numeri di stati  $\alpha$  e  $\beta$  presenti in cavità dalla relazione

$$\frac{dN}{dt} = \frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}} [-NN_{\alpha} + (N+1)N_{\beta}] \quad (16.27)$$

## 16.7 Coefficienti $A$ e $B$ di Einstein

Consideriamo un atomo in uno stato  $\beta$  che può decadere spontaneamente allo stato  $\alpha$  emettendo un fotone e definiamo il **coefficiente di Einstein**  $A_{\beta\alpha}$  come “probabilità per unità di tempo” che avvenga il decadimento radiativo  $\beta \rightarrow \alpha$ . Dalla seconda delle equazioni 25) sappiamo che quando l'atomo nello stato  $\beta$  è in una cavità di volume  $\mathcal{V}$ , la “probabilità per unità di tempo” che decada allo stato  $\alpha$  emettendo un fotone in un particolare modo della cavità vale  $\mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega) = c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)/\mathcal{V}$ , quindi possiamo calcolare  $A_{\beta\alpha}$  sommando  $\mathcal{G}_{\beta\alpha}(\omega)$  su tutti i modi della cavità che possono ospitare il fotone emesso. Sappiamo che il numero di modi della cavità con frequenza compresa tra  $\omega$  ed  $\omega + d\omega$  vale  $\mathcal{D}(\omega)\mathcal{V}d\omega = (\omega^2/\pi^2c^3)\mathcal{V}d\omega$ , quindi

$$A_{\beta\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}} \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \mathcal{V}d\omega = \frac{1}{\pi^2c^2} \int_0^{\infty} \omega^2 \sigma_{\alpha\beta}(\omega) d\omega$$

Ma  $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$  prende valori importanti solo in una banda strettissima centrata intorno ad  $\omega_{\alpha\beta}$ , quindi possiamo sostituire  $\omega^2$  con  $\omega_{\alpha\beta}^2$  e portato fuori dell'integrale. Insomma possiamo concludere che

$$A_{\beta\alpha} = \frac{\omega_{\alpha\beta}^2}{\pi^2c^2} \int_0^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\omega) d\omega \quad (16.28)$$

Ora vogliamo dimostrare che il coefficiente di Einstein  $A_{\beta\alpha}$  è null'altro che la **larghezza di banda**  $\Gamma_{\alpha\beta}$  della **transizione radiativa**  $\alpha \rightarrow \beta$ . Per

convincerene scriviamo la sezione d'urto per la transizione  $\alpha \rightarrow \beta$  come generalizzazione dell'equazione 10.19'), precisamente

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi^2 c^2 \Gamma_{\alpha\beta}}{\omega_{\alpha\beta}^2} \mathcal{L}(\omega) \quad \text{dove} \quad \mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{\alpha\beta}/2}{(\omega_{\alpha\beta} - \omega)^2 + (\Gamma_{\alpha\beta}/2)^2} \quad (16.29)$$

Sostituiamo questa sezione d'urto nell'equazione 28), ricordiamo che l'integrale sull'asse  $\omega$  della lorentziana è unitario e concludiamo che  $A_{\beta\alpha}$  e  $\Gamma_{\alpha\beta}$  sono davvero notazioni equivalenti per la stessa grandezza: la “probabilità per unità di tempo” che lo stato  $\beta$  decada spontaneamente allo stato  $\alpha$  emettendo un fotone in un modo qualunque. In particolare il coefficiente  $A$  per il decadimento spontaneo dal primo stato eccitato allo stato rilassato è null'altro che  $\Gamma_0$ .

Ora pensiamo che il sistema atomico sia immerso in un gas di fotoni di densità-spettrale d'energia  $\rho(\omega)$ , senza preoccuparci di precisare come siano diretti i fotoni: possono essere diretti preferenzialmente in un verso, come avviene quando il volume  $\mathcal{V}$  è attraversato da un fascio di intensità  $d\mathcal{I} = c\rho(\omega)d\omega$ , oppure possono avere versi distribuiti uniformemente su tutto l'angolo solido, come avviene quando il sistema è in equilibrio termodinamico, oppure possono viaggiare avanti-indietro tra due specchi come avviene in una cavità Fabry-Perot. In ogni caso il numero di fotoni di frequenza compresa tra  $\omega$  ed  $\omega + d\omega$  contenuti nel volume  $\mathcal{V}$  vale  $\rho(\omega)\mathcal{V}d\omega/\hbar\omega$ , quindi la “probabilità per unità di tempo” che il dato stato  $\beta$  decada allo stato  $\alpha$  in modo stimolato vale

$$\int_0^\infty \frac{c\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\mathcal{V}} \frac{\rho(\omega)\mathcal{V}d\omega}{\hbar\omega} = \frac{c}{\hbar} \int_0^\infty \frac{\rho(\omega)\sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\omega} d\omega$$

Ai tempi di Einstein anche i migliori fasci di radiazione avevano larghezza spettrali molto grandi rispetto alla larghezze di banda delle sezioni d'urto, quindi  $\rho(\omega)/\omega$  poteva essere sostituito con  $\rho(\omega_{\alpha\beta})/\omega_{\alpha\beta}$  e portato fuori dell'integrale. In tali condizioni la “probabilità per unità di tempo” che il dato stato  $\beta$  decada allo stato  $\alpha$  in modo stimolato si riduce a

$$\frac{c\rho(\omega_{\alpha\beta})}{\hbar\omega_{\alpha\beta}} \int_0^\infty \sigma_{\alpha\beta}(\omega)d\omega = \rho(\omega_{\alpha\beta}) \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{\alpha\beta}^3} A_{\beta\alpha} = \rho(\omega_{\alpha\beta}) B_{\alpha\beta}$$

e risulta proporzionale ad  $A_{\beta\alpha}$ . Nel termine di destra abbiamo introdotto il

$$\text{coefficiente di Einstein} \quad B_{\alpha\beta} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{\alpha\beta}^3} A_{\beta\alpha} \quad (16.30)$$

Questa equazione e l'equazione  $B_{\beta\alpha} = B_{\alpha\beta}$  esprimono il principio del bilancio dettagliato nel caso che larghezza di banda della radiazione sia molto maggiore di quella della transizione radiativa. In questa forma il principio del bilancio dettagliato ha un grande interesse storico, ma in situazioni sperimentali moderne la larghezza spettrale di  $\rho(\omega)$  è spesso confrontabile o minore di quella di  $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$ , quindi è necessario descrivere l'assorbimento e l'emissione stimolata con l'approccio seguito nel paragrafo precedente.

## 16.8 Allargamento Doppler e collisionale

Pensiamo che un gas maxwelliano in quiete nel nostro laboratorio abbia temperatura  $T$  dell'ordine di  $3000\text{ K}$  e sia tanto rarefatto che i vari atomi eccitati non collidano con altri atomi durante i processi di emissione spontanea. E pensiamo che uno spettrometro ad altissima risoluzione misuri l'intensità spettrale della radiazione emessa dal gas entro un piccolo angolo solido centrato nel verso positivo dell'asse  $z$ . Se gli atomi emettitori fossero fermi i fotoni emessi nei decadimenti  $\beta \rightarrow \alpha$  avrebbero frequenze centrate intorno alla frequenza di risonanza  $\omega_{\alpha\beta}$  con larghezza spettrale intrinseca  $\Gamma_{\alpha\beta}$  dell'ordine di  $10^{-7}\omega_{\alpha\beta}$ , ma lo spettrometro riceve fotoni emessi da atomi in moto con velocità dirette in tutti i versi, quindi le frequenze misurate differiscono da  $\omega_{\alpha\beta}$  per effetto Doppler. Nel paragrafo 14.3) abbiamo visto che per velocità piccole rispetto a  $c$  l'effetto Doppler trasverso è trascurabile e l'effetto Doppler longitudinale comporta spostamenti proporzionali a  $v_z/c$ , dove  $v_z$  è la proiezione longitudinale della velocità, quindi le frequenze dei fotoni che raggiungono lo spettrometro sono  $\omega = \omega_{\alpha\beta}(1 \pm v_z/c)$ . Ora ricordiamo che, in equilibrio termodinamico, la probabilità che una molecola di un gas di massa molare  $M$  abbia componente  $z$  della velocità nell'intervallo compreso tra  $v_z$  e  $v_z + dv_z$  vale  $f(v_z)dv_z$  dove

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} e^{-Mv_z^2/2RT}$$

Questa gaussiana prende valori uguali alla metà del valore massimo per  $v_z = \pm\sqrt{2 \ln 2(RT/M)}$ , quindi ha larghezza a metà altezza

$$\Delta v_z = 2\sqrt{2 \ln 2 \frac{RT}{M}} = 2.355\sqrt{\frac{RT}{M}}$$

Ciò comporta che la **larghezza Doppler della riga di emissione** vale

$$\Delta\omega = \omega_{\alpha\beta} \frac{\Delta v_z}{c} = 2.355 \omega_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{RT}{Mc^2}} \quad (16.31)$$

Ad esempio, per He alla temperatura di  $3000\text{ K}$ ,  $\Delta\omega$  è certamente piccolo, circa un centomillesimo di  $\omega_{\alpha\beta}$ , ma è circa cento volte maggiore della larghezza spettrale intrinseca  $\Gamma_{\alpha\beta}$ . Si noti anche che il profilo del picco misurato dallo spettrometro, oltre ad essere molto più largo di quello intrinseco, ha forma di riga diversa: gaussiana anziché lorentziana.

Naturalmente l'effetto Doppler longitudinale allarga non solo le righe di emissione, ma anche quelle di assorbimento. Infatti un fascio di fotoni monocromatici di frequenza  $\omega = \omega_{\alpha\beta} + d\omega$  risuona pienamente con la frazione di atomi che vanno incontro ai fotoni con velocità  $v_z = cd\omega/\omega_{\alpha\beta}$ . Quindi anche le sezioni d'urto di assorbimento e di emissione stimolata hanno profili



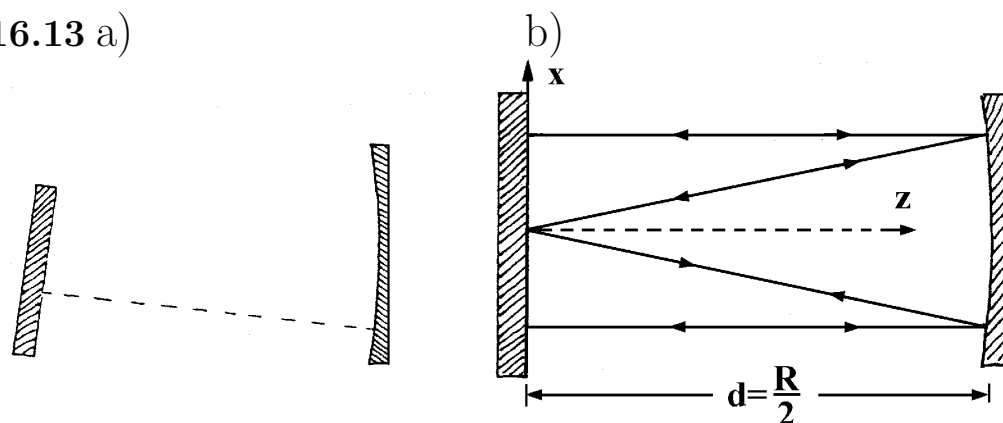
gaussiani con larghezza a metà altezza dipendente dalla temperatura come precisato dall'equazione 31).

Quanto detto vale per gas tanto rarefatti da poter trascurare le collisioni molecolari. Quando i gas non sono molto rarefatti, le collisioni riducono le durate dei processi di emissione coerente rendendole uguale a quelle di volo libero e le larghezze spettrali dei singoli fotoni emessi o assorbiti diventano gli inversi dei tempi di volo libero. Tale effetto prende il nome di **allargamento collisionale delle righe di emissione** ed è il principale responsabile dell'allargamento delle righe spettrali per gas a pressione atmosferica; comincia a prendere il sopravvento sull'allargamento Doppler già a pressioni di alcune centinaia di pascal.

## 16.9 Cavità ottiche, legge ABCD

In questo paragrafo descriviamo sommariamente un tipo di cavità ottica che gioca un ruolo particolarmente importante nella tecnologia LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). La cavità è costituita da uno specchio piano e da uno specchio sferico concavo di raggio  $R$ , posti a distanza  $d = R/2$ . In a) abbiamo esagerato il disallineamento per met-

Fig. 16.13 a)



tere in evidenza che i due specchi possono essere orientati senza particolari cautele: è sufficiente che una delle rette normali allo specchio piano incida normalmente sullo specchio sferico in un punto non troppo periferico. Nel seguito, per semplicità, pensiamo che la retta passante per i centri dei due specchi sia normale ad entrambi, come in figura 13b). Anche la distanza  $d$  tra gli specchi può essere scelta senza particolari cautele, è sufficiente che sia minore del raggio dello specchio sferico, ma la scelta  $d = R/2$  è particolarmente conveniente. In tal caso  $d$  è uguale alla distanza focale dello specchio sferico, quindi il fuoco di tale specchio giace sullo specchio piano e, se la riflessione seguisse localmente la legge di Cartesio, un raggio uscente dallo specchio piano ritornerebbe sui suoi passi dopo quattro passaggi completi entro la cavità, come mostrato in figura 13b).

Per descrivere la propagazione dei raggi nella cavità pensiamo che gli specchi riflettano anche l'asse ottico, ovvero conveniamo che  $z$  aumenti indefinitamente lungo il percorso. Indichiamo con  $x(0)$  ed  $x'(0)$  l'ordinata e l'inclinazione di un raggio che esce dallo specchio piano e con  $x(2d)$  ed  $x'(2d)$  l'ordinata e l'inclinazione dello stesso raggio quando esce dallo specchio piano dopo un giro completo nella cavità, e notiamo che queste grandezze sono legate dalla legge di trasferimento

$$\begin{pmatrix} x(2d) \\ x'(2d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}$$

Eseguendo il prodotto delle matrici vediamo che la matrice ABCD per un giro completo nella cavità a partire dallo specchio piano risulta

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & d \\ -1/d & 0 \end{pmatrix} \quad (16.32)$$

Si noti che  $M^2 = -I$  e che  $M^4 = I$ , dove  $I$  è la matrice identica. Ciò conferma che dopo quattro giri nella cavità il raggio ritorna esattamente sui suoi passi. Dunque, se non intervenissero fenomeni di diffrazione ed assorbimento, la radiazione rimarrebbe permanentemente intrappolata nella cavità. Ma non si deve dimenticare che il fascio di radiazione sugli specchi ha dimensioni limitate, quindi la riflessione non segue esattamente la legge di Cartesio: i due specchi rimettono radiazione con lobi di diffrazione che hanno intensità massima sull'asse ottico, e sono tanto più larghi angularmente quanto più piccole sono le dimensioni dei fasci incidenti sugli specchi. Ciò induce a pensare che l'intensità della radiazione decresca con la distanza dall'asse ottico. Per tenerne conto, introduciamo il **semidiadmetro efficace**  $w(z)$  del fascio di radiazione, ammettendo che possa dipendere dalla posizione. In approssimazione di Fraunhofer possiamo valutare  $w(z)$  notando che il lobo principale di diffrazione emesso dallo specchio piano ha divergenza angolare  $1.22\lambda/2w(0)$ , quindi raggiunge lo specchio sferico con semidiadmetro  $w(d) = 0.61\lambda d/w(0)$ . Ciò comporta che, in approssimazione di Fraunhofer,  $w(0)$  e  $w(d)$  sono legati dalla relazione

$$w(0)w(d) = 0.61\lambda d$$

Pertanto possiamo aspettarci che  $w = \sqrt{0.61\lambda d}$  sia il valor medio del semidiadmetro del fascio nella cavità e che  $w(0)$  e  $w(d)$  siano rispettivamente un po' minore ed un po' maggiore di  $w$ . Ad esempio in una cavità lunga 30 cm un fascio di radiazione con  $\lambda = 0.5 \mu m$  ha semidiadmetro medio intorno a 0.3 mm. Si noti che, avendo limitato l'attenzione ai lobi di diffrazione principali emessi dagli specchi, abbiamo implicitamente ammesso che la cavità sia dotata di un diaframma di diametro un po' maggiore di  $2w$ , centrato sull'asse ottico. Tale diaframma ha il compito di assorbire la potenza che

ciascuno specchio distribuisce nei lobi di diffrazione secondari. Se non fosse presente il fascio di radiazione intrappolato avrebbe forme meno semplici di quello che abbiamo descritto.

Una descrizione più accurata del fascio di radiazione nella cavità può essere data partendo dalle equazioni di Maxwell e tenendo conto delle condizioni al contorno imposte dagli specchi. Qui ci limitiamo a riportare i risultati, senza preoccuparci di giustificarli in modo preciso.

- Le onde che corrono avanti e indietro raggiungono gli specchi con fronti d'onda coincidenti con gli specchi stessi, quindi il raggio di curvatura dei fronti d'onda è infinito per  $z = 0$  ed è uguale ad  $R$  per  $z = d$ .
- La condizione che il campo ELETTRICO sugli specchi sia nullo implica che  $d$  deve contenere un numero intero di mezze lunghezze d'onda. Equivalentemente possiamo dire che la fase di un'onda corrente deve variare di multipli interi di  $2\pi$  dopo un giro nella cavità. Quindi i modi di propagazione consentiti differiscono l'uno dall'altro, oltre che per la polarizzazione, per il numero  $N$  di semilunghezze d'onda presenti nella cavità. Ciò comporta che le lunghezze d'onda ed i vettori d'onda consentiti sono

$$\lambda_N = \frac{d}{2N} \quad , \quad k_N = \frac{N\pi}{d} \quad \text{con } N \text{ intero}$$

Si noti che  $N$  può essere un numero molto grande, ad esempio per una cavità di lunghezza 1 m, riempita da radiazione nella banda visibile,  $N$  ha valori dell'ordine di  $10^6$ .

- Conviene associare al fascio di radiazione il parametro complesso  $q(z)$  tale che

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (16.33)$$

dove  $R(z)$  è il raggio di curvatura dei fronti d'onda. La ragione che rende  $q(z)$  estremamente utile è la seguente: i valori  $q(z_2)$  e  $q(z_1)$  presi da  $q(z)$  sui piani  $z = z_1$  e  $z = z_2$  sono legati dalla

$$\text{legge ABCD} \quad q(z_2) = \frac{Aq(z_1) + B}{Cq(z_1) + D} \quad (16.34)$$

dove  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono gli elementi della matrice di trasferimento geometrico tra i due piani. Lasciamo a corsi più avanzati il compito di giustificare la legge ABCD e ci limitiamo a mostrare che è consistente con le considerazioni riportate sopra, basate sull'approssimazione di Fraunhofer. Allo scopo calcoliamo il semidiametro ed il raggio di curvatura del fronte d'onda sullo specchio piano imponendo la condizione che  $q(0)$  riprenda il valore iniziale dopo un giro. Usando la matrice 32) vediamo che

$$q(0) = \frac{0q(0) + d}{-q(0)/d + 0} = -\frac{d^2}{q(0)} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{q(0)} = \frac{i}{d}$$

Confrontando questo risultato con l'equazione 33), confermiamo che  $R(0)$  è infinito e vediamo che  $\pi w^2(0)/\lambda = d$ . Quindi

$$w(0) = \sqrt{\lambda d/\pi} \quad (16.35)$$

è davvero un po' minore del semidiametro medio  $w = \sqrt{0.61\lambda d}$  valutato in approssimazione di Fraunhofer. Ora, conoscendo  $q(0)$ , è facile determinare  $q(d)$ , infatti la matrice ABCD di trasferimento dallo specchio piano allo specchio sferico vale  $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , e la legge ABCD conduce a

$$q(d) = q(0) + d = -id + d \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{q(d)} = \frac{1}{2d} + i\frac{1}{2d}$$

Il confronto con l'equazione 33) mostra che il raggio di curvatura sullo specchio sferico vale  $R(d) = 2d = R$ , come previsto, e mostra che il semidiametro sullo specchio sferico vale

$$w(d) = \sqrt{2\lambda d/\pi} \approx \sqrt{0.64\lambda d} \quad (16.36)$$

Ciò conferma che  $w(d)$  è davvero un po' maggiore del semidiametro medio valutato in approssimazione di Fraunhofer.

## ESERCIZI

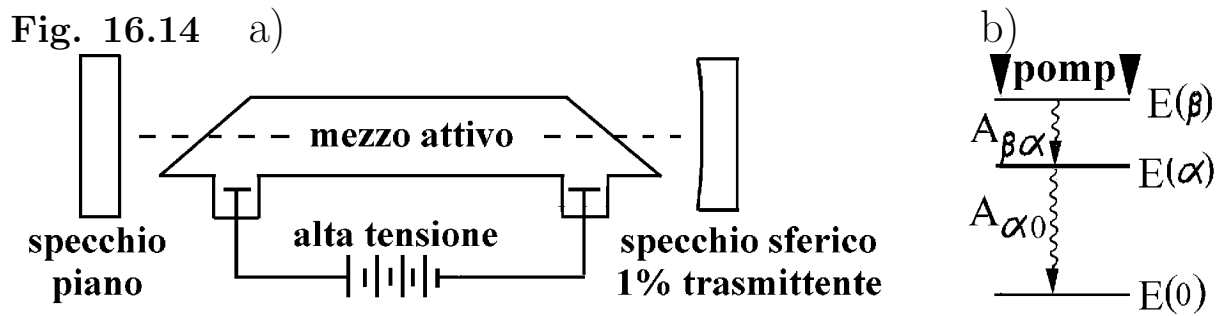
1) Una microcavità con specchio sferico di raggio  $R = \lambda$  ha lunghezza  $d = \lambda/2$ . Quali dimensioni trasverse ha la più semplice onda elettromagnetica intrappolata?

2) Un fascio di radiazione con  $\lambda = 0.5 \mu m$  ha fronte d'onda piano di diametro di  $2 m$ . Quali dimensioni ha il fascio che raggiunge la Luna?

## 16.10 Principio di funzionamento di un Laser

Lo schema costruttivo di un laser a gas è mostrato in figura 14a). Entro una cavità ottica piano-sferica con specchio sferico parzialmente trasmittente, viene posta un'ampolla con finestre di Brewster contenente una miscela gassosa a pressione di un centinaio di pascal. Due elettrodi alimentati con alta tensione producono una scarica elettrica stazionaria che ha l'effetto di popolare con particolare efficienza lo stato  $\beta$  di una specie atomica presente nell'ampolla. Nel seguito abbreviamo la dizione "Numero per Unità di Tempo" con NUT ed indichiamo con  $NUT_{pomp}$  il NUT di stati  $\beta$  prodotti dal **sistema di pompaggio ottico**. Per non complicare troppo il discorso, ammettiamo che siano verificate le seguenti condizioni.

- Lo stato  $\beta$  decade spontaneamente allo stato  $\alpha$  con coefficiente di Einstein  $A_{\beta\alpha}$ , ma non decade ad altri stati.
- Lo stato  $\alpha$  decade allo stato rilassato con coefficiente di Einstein  $A_{\alpha 0}$  molto maggiore di  $A_{\beta\alpha}$ . Ciò assicura che gli stati  $\alpha$  prodotti dal decadimento degli



stati  $\beta$  hanno probabilità di assorbire un fotone e tornare allo stato  $\beta$  molto piccola rispetto alla probabilità di decadere allo stato rilassato.

Se non esistesse l'emissione stimolata, verrebbe arggiunta una situazione stazionaria quando il  $NUT_{pomp}$  è uguale al NUT di decadimenti  $\beta \rightarrow \alpha$ , pari a  $N_\beta A_{\beta\alpha}$ , ed al NUT di decadimenti spontanei  $\alpha \rightarrow 0$ , dato da  $N_\alpha A_{\alpha 0}$ . Ciò comporta che, se non esistesse l'emissione stimolata, le popolazioni degli stati  $\beta$  ed  $\alpha$  sarebbero legate dalla relazione

$$\frac{N_\beta}{N_\alpha} = \frac{A_{\alpha 0}}{A_{\beta\alpha}}$$

e poiché  $A_{\alpha 0} \gg A_{\beta\alpha}$ , il sistema sarebbe in condizioni di **inversione di popolazione**: gli stati  $\beta$  sarebbero in numero molto maggiore degli stati  $\alpha$ , pur avendo energia maggiore.

Ora pensiamo che uno dei modi della cavità di frequenza  $\omega_{\alpha\beta}$  sia popolato da un numero di fotoni ben maggiore dell'unità. In tal caso i processi di emissione stimolata  $\beta \rightarrow \alpha$  diventano importanti e tendono a livellare le popolazioni dei due stati perché le transizioni stimolate  $\beta \rightarrow \alpha$  riducono la popolazione dello stato  $\beta$ . Ma il sistema di pompaggio rifornisce stati  $\beta$  in continuazione ed impedisce che le popolazioni dei due stati si livellino, mantenendo il gas in condizioni stazionarie con  $N_\beta > N_\alpha$ . In tal caso il NUT di fotoni clonati dagli stati  $\beta$  è maggiore del NUT di fotoni assorbiti dagli stati  $\alpha$  e la differenza tra i due numeri è il NUT di fotoni che escono dalla cavità. In parte questi fotoni vengono persi per diffrazione e per assorbimento sugli specchi, in parte attraversano lo specchio semitrasparente e formano il fascio laser.

## RELAZIONI MATEMATICHE

$$\nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{d\mathcal{V}} \oint_{\delta S} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.1)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.2)$$

$$\nabla f(t, \mathbf{r}) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x} f(t, \mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial y} f(t, \mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial z} f(t, \mathbf{r}) \right) \quad (M.3)$$

$$f(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - f(t, \mathbf{r}) = d\mathbf{s} \cdot \nabla f(t, \mathbf{r}) \quad (M.4)$$

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{r} + d\mathbf{s}) - \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) = (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.5)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{2} \right) = \mathbf{a} \quad (M.6)$$

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (M.7)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{a}}{r} \right) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (M.8)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] = \frac{1}{d\mathcal{S}} \oint_{\delta \gamma} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (M.9)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] \quad (M.10)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] \quad (M.11)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] \quad (M.12)$$

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] = -\nabla^2 \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{r})] \quad (M.13)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{G}(t, \mathbf{r})] = -\mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \quad (M.14)$$

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad \int_0^\infty \mathcal{L}(\omega) d\omega = 1 \quad (M.15)$$