2 Ottobre

Lemma Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto che (sia limitato) non sia illimitato superiormente e sia $Y = \{ y \in \mathbb{R} : x \le y \quad \forall x \in X \}$ (*)
(cioè Y è l'insieme dei maggioranti di X)

Allora Y ammette minimo.

Dim Siccome X è limitato superiormente, allora $Y \neq \emptyset$. Inoltre, dalla definizione di Y abbiamo

$$x \le y \quad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y.$$

Sia ora c un elemento di separazione tra X e Y:

$$x \le c \le y \quad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y \qquad (1)$$

Verifichiamo che risulta che $c = \min Y$.

Infatti, per primo cosa dalla (1) risulta $c \le y \quad \forall y \in Y$.

In secondo luogo, sempre dalla (1), risulta $x \le c \quad \forall x \in X$
$\Rightarrow c \in Y$. $\square$

Def (Estremo ~~superiore~~ inferiore) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
Se X è illimitato superiormente (inferiormente) poniamo $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$
(estremo superiore di X $= +\infty$)
estremo inferiore di X $= -\infty$
Se X è limitato superiormente (inferiormente) e Y è l'insieme, non vuoto dei suoi maggioranti (minoranti), poniamo $\sup X = \min Y$. $(\inf X = \max Y)$

Esempio $X = (0,1) = \{ x : 0 < x < 1 \}$

In questo caso $Y = [1, +\infty) = \{ y : y \ge 1 \}$

$\sup (0,1) = 1$

Intervalli: Notazione Siano $a < b$ due numeri reali

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$ $\qquad [a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} : x \ge a \}$

$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$ $\qquad (a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} : x > a \}$

$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x < b \}$

$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \}$

$X = (0,1) \qquad Y = \{ y : x \le y \quad \forall x \in (0,1) \}$

È semplice concludere che $Y \supseteq [1, +\infty)$.

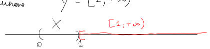
Ci si chiede che $\exists$ qualche maggiorante y con $y < 1$.

Se $y \le 0$ allora $y \le 0 < x \quad \forall x \in (0,1)$,
Risulta quindi che questo y non è un maggiorante.

Alternativamente, se non è vero che $y \le 0$ e se $y < 1$ allora $0 < y < 1$, cioè $y \in X$. Ma allora

$y = \max X = \max (0,1)$, ma $\max (0,1)$ non esiste.

Conclusione $Y = [1, +\infty)$



$\cancel{X} = [0,1] \qquad \max [0,1] = 1 = \sup [0,1]$

Il massimo di un insieme, se esiste, è l'estremo superiore.

Corollario Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, ~~se~~ su

X ammette massimo $\Longleftrightarrow \sup X \in X$

X ammette minimo $\Longleftrightarrow \inf X \in X$.

Osservazione Basta "studiare" l'estremo superiore. La ragione è che se $X \subseteq \mathbb{R}$ e se definisce

$$-X = \{-x : x \in X\}$$

$(\text{Es} \quad -[1,2] = [-2,-1])$ allora

$$\inf X = -\sup(-X)$$

$$1 = \inf[1,2] = -\sup(-[1,2]) = -\sup[-2,-1]$$
$$= -(-1) = 1$$

$$-[1,2] = \{-x : x \in [1,2]\} = \{-x : 1 \le x \le 2\}$$

$$= \{-x : -1 \ge -x \ge -2\} \qquad y = -x$$

$$= \{y : -1 \ge y \ge -2\} = [-2,-1]$$

0.7.4

$\forall\, n \geq 1$ e $\forall\, x > -1$ dimostrare che

$$\frac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - n x$$

$n = 1$ $\quad \boxed{\frac{1}{1+x} \geq 1 - x} \qquad \cdot (1+x)$

$$1 \geq (1-x)(1+x) = 1 - x^2$$

$$\cancel{1} \geq \cancel{1} - x^2 \iff \quad 0 \geq -x^2 \iff 0 \leq x^2 \ ✓$$

$n \Rightarrow n+1$ Da $\dfrac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - n x$ dimostriamo

che $\dfrac{1}{(1+x)^{n+1}} \geq 1 - (n+1) x \qquad (P_{n+1})$

Se $1 - (n+1)x \leq 0$ chiaramente (P_{n+1}) è vera perché

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} > 0 \qquad \forall\, x > -1$$

Supponiamo che $1 - (n+1) x > 0$ e consideriamo

$$\frac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - n x \ (> 0) \qquad \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)^{n+1}}} \geq (1 - n x) \cdot \frac{1}{1+x} \geq (1 - n x)(1 - x)$$

$$\frac{1}{1+x} \geq 1 - x \qquad = 1 - (n+1) x + n x^2$$

$$\geq \boxed{1 - (n+1) x}$$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=1}^{n} x^{j-1} y^{n-j} \qquad n \geq 1$$

$n = 1$

$$x^n - y^n = x - y$$

$$(x-y)\sum_{j=1}^{1} x^{j-1} y^{1-j} = (x-y)\, x^0 y^0 = x - y$$

$n =$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=1}^{n} x^{j-1} y^{n-j}$$

$n+1$

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum_{j=1}^{n+1} x^{j-1} y^{n+1-j}$$

$$(x-y)\sum_{j=1}^{n+1} x^{j-1} y^{n+1-j} =$$

$$= (x-y)\sum_{j=1}^{n} x^{j-1} y^{n+1-j} + (x-y)\, x^n$$

$$= y (x-y)\sum_{j=1}^{n} x^{j-1} y^{n-j} + (x-y)\, x^n$$

$$= y\,(x^n - y^n) + (x-y)\, x^n = \cancel{x^n y} - y^{n+1} + x^{n+1} \cancel{- y x^n}$$

$$= x^{n+1} - y^{n+1}$$

Teorema (Caratterizzazione del sup) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ e sia $\sup A < +\infty$. Risulta che $\sup A$ è l'unico numero reale M che soddisfa le seguenti due proprietà:

1) $a \leq M \quad \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ t.c.

$$M - \varepsilon < a \leq M.$$

Dim Per prima cosa verifichiamo che $\sup A$ soddisfa 1) e 2). Sappiamo che

$a \leq \sup A \quad \forall a \in A$ perché $\sup A$ è un maggiorante di A. Quindi la 1) è soddisfatta da $\sup A$.

Supponiamo per assurdo che la 2) non sia vera. Allora $\exists$ $A \subseteq \mathbb{R}$ ed un $\varepsilon > 0$ tali che non è vero che

$$\exists a \in A \text{ t.c. } \sup A - \varepsilon < a \left(\leq \sup A\right).$$

Cioè per questo insieme A ho $a \leq \sup A - \varepsilon \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow$ $\sup A - \varepsilon$ è un maggiorante di A

$\Rightarrow$ $\sup A \leq \sup A - \varepsilon < \sup A \Rightarrow \sup A < \sup A$ assurdo.

Concludo che è vero che, se $\sup A < +\infty$, allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$.

Ora vogliamo dimostrare che se $M \in \mathbb{R}$ soddisfa 1 e 2 allora necessariamente $M = \sup A$.

Dalla 1), cioè da $a \leq M \quad \forall a \in A$, segue che M è un maggiorante di $A \Rightarrow \sup A \leq M$.

Vogliamo escludere che $\boxed{\sup A < M}$. *

Supponiamo per assurdo che valga ↑. Se pongo $\varepsilon = M - \sup A > 0$, risulta che

$$\sup A = M - \varepsilon = M - (M - \sup A) = \sup A$$

Siccome M soddisfa la 2), esiste $a \in A$ t.c.

$$\sup A = M - \varepsilon < a \leq \sup A \Rightarrow \sup A < \sup A$$

Concludo $\sup A = M$.

<u>Corollario</u> $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

<u>Dim</u>