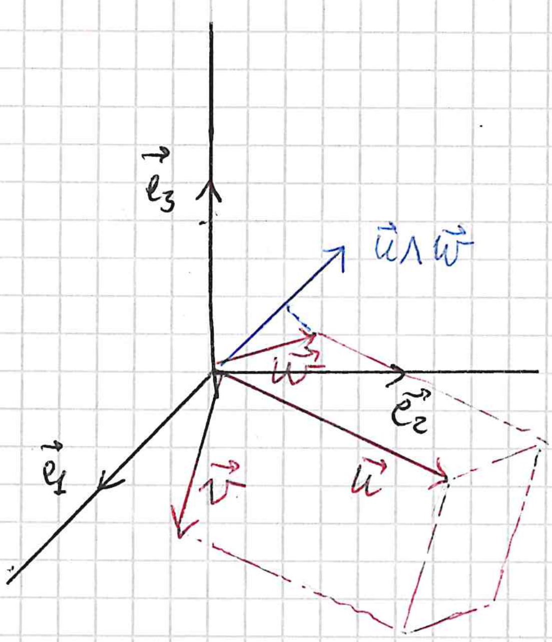
PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$

Poniamo $Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ dove $\vec{u} \wedge \vec{v}$ per ora è definito nel modo informale visto a pag. 12.
$Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è un "volume con segno".



Il segno dipende dall'orientamento: è positivo se l'orientamento è coerente con quello della terna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, è negativo se non lo è.

Dalla geometria elementare si ha che se $\lambda > 0$,

$$Vol(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = Vol(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = Vol(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}) =$$
$$= \lambda \, Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Inoltre

$$Vol(-\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = Vol(\vec{u}, -\vec{v}, \vec{w}) = Vol(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w}) =$$
$$= -Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Si ha inoltre che se inverto l'ordine di due vettori, il segno cambia (perché cambia l'orientamento).

$$Vol(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$
$$Vol(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$
$$Vol(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Invece le seguenti permutazioni ottenute con due scambi lasciano il segno invariato.

$$Vol(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$
$$Vol(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Per esempio:

$$Vol(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = Vol(\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_1}) = Vol(\vec{e_3}, \vec{e_1}, \vec{e_2}) = 1$$

$$Vol(\vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_3}) = Vol(\vec{e_3}, \vec{e_2}, \vec{e_1}) = Vol(\vec{e_1}, \vec{e_3}, \vec{e_2}) = -1$$

È anche chiaro che se in $Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ due vettori sono uguali, allora il volume è nullo.

Da quanto detto sopra segue che

$$((\vec{u}+\vec{u}')\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \mathrm{Vol}(\vec{u}+\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$$

$$= \mathrm{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{u}') = (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{u}')$$

$$= (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u} + (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u}'$$

$$= \mathrm{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) + \mathrm{Vol}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}')$$

$$= \mathrm{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \mathrm{Vol}(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$$

$$= (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} + (\vec{u}'\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$= (\vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}'\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Per l'arbitrarietà di $\vec{w}$ si ha quindi

$$(\vec{u}+\vec{u}')\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}'\wedge\vec{v}.$$

Ora useremo queste proprietà per vedere come si esprime il prodotto vettoriale in coordinate.

Se
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 = (y_1, y_2, y_3)$$

Abbiamo, per $k=1,2,3$

$$(\vec{x}\wedge\vec{y})\cdot\vec{e}_k = \left[\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{3} y_j\vec{e}_j\right)\right]\cdot e_k$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j (\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j)\cdot\vec{e}_k$$

segue che

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{e}_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{e}_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{e}_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

In definitiva,

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x} \wedge \vec{y} = {} & (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{e}_1 \\ & + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{e}_2 \\ & + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{e}_3\end{aligned}}$$

Questa è l'espressione di $\vec{x} \wedge \vec{y}$ in coordinate ottenuta "in modo euristico" partendo dalla nozione intuitiva e informale di volume orientato.

Nella teoria formale dell'algebra lineare, questa è la <u>definizione</u> di prodotto vettoriale.

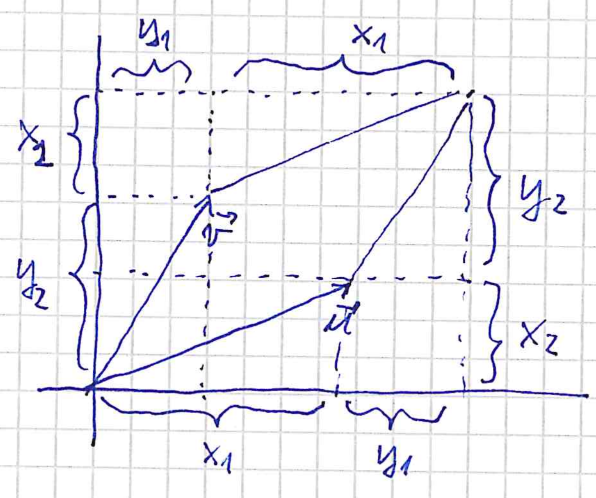
Il prodotto misto $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ esprime il "volume con segno" del parallelepipedo generato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Il numero $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ è anche detto "determinante", $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

OSSERVAZIONE

In $\mathbb{R}^2$ non si può fare il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2)$ perchè manca la direzione ortogonale al piano generato dai due vettori.
Ma comunque si ha

$$\text{Area}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

dove $\text{Area}(\vec{u}, \vec{v})$ è l'area "con segno", in cui il segno dipende dall'orientamento.



$$\text{Area}(\vec{u}, \vec{v}) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - 2\frac{x_1 x_2}{2}$$

$$- 2\frac{y_1 y_2}{2} - 2 x_2 y_1$$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2$$
$$- x_1 x_2 - y_1 y_2 - 2 x_2 y_1$$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1$$

In $\mathbb{R}^2$ definiamo quindi

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

dove $\vec{u} = (x_1, x_2)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2)$

OSSERAZIONE

Se in $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ si ha

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} = & \det\big((x_2, x_3), (y_2, y_3)\big) \vec{e}_1 \\ & - \det\big((x_1, x_3), (y_1, y_3)\big) \vec{e}_2 \\ & + \det\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

e se $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)$

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ & = z_1 \det\big((x_2, x_3), (y_2, y_3)\big) \\ & \quad - z_2 \det\big((x_1, x_3), (y_1, y_3)\big) \\ & \quad + z_3 \det\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \end{aligned}$$