

# Esercizi di Geometria

## Foglio 1

October 2, 2023

1. Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte dalle seguenti relazioni. Nel caso in cui la relazione sia di equivalenza, individuare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.
  1. Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:  $r \rho r_0$  se e solo se  $r$  è perpendicolare a  $r_0$ ;
  2. Nell'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi:  $x \rho x_0$  se e solo se  $|x| = |x_0|$ ;
  3. Nell'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi:  $x \rho x_0$  se e solo se  $xx_0 > 0$ ;
  4. Nell'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi:  $x \rho x_0$  se e solo se  $xx_0 \geq 0$ ;
  5. Nell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali:  $x \rho x_0$  se e solo se  $x$  ha un numero di cifre maggiore o uguale a quelle di  $x_0$ ;
  6. Nell'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali:  $x \rho x_0$  se e solo se  $x - x_0 \in \mathbb{Z}$ .
2. Cosa c'è di errato nella seguente dimostrazione che se una relazione  $\rho$  gode della proprietà simmetrica e transitiva allora gode anche della proprietà riflessiva.

*"Sia  $x$  qualsiasi. Se  $x\rho y$  allora per la proprietà simmetrica  $y\rho x$  e per la proprietà transitiva  $x\rho x$ ."*
3. (i) In  $\mathbb{Z}_7$  si calcoli per ogni elemento non nullo l'inverso rispetto al prodotto.  
(ii) In  $\mathbb{Z}_8$  e in  $\mathbb{Z}_{12}$  si individuino gli inversi di tutti gli elementi che hanno inverso rispetto al prodotto.
4. Sia  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  il campo dei numeri razionali. Si definisca un'ulteriore operazione in  $\mathbb{Q}$  ponendo  $x \star y = \frac{3}{4}(x \cdot y)$ . Si dimostri che  $(\mathbb{Q}, +, \star)$  è un campo.