PROPRIETA' DEL VALORE ATTESO E DELLA VARIANZA

Definizione operativa di valore atteso di una variabile aleatoria discreta (*v.a.d.*):

$$E(X)=\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)=x_1 p(x_1)+x_2 p(x_2)+\cdots+x_n p(x_n)$$

Proprietà:

$$E(c)=c$$

$$E(c)=c\times 1=c$$

$$E(cX)=cE(X)$$

$$E(cX)=\sum_{i=1}^{n} c x_i p(x_i)=c x_1 p(x_1)+c x_2 p(x_2)+\cdots+c x_n p(x_n)=$$

$$=c[x_1 p(x_1)+x_2 p(x_2)+\cdots+x_n p(x_n)]=cE(X)$$

$$E(c+X)=c+E(X)$$

$$E(c+X)=\sum_{i=1}^{n}(c+x_i)p(x_i)=\sum_{i=1}^{n}[cp(x_i)+x_i p(x_i)]=$$

$$=c\sum_{i=1}^{n}p(x_i)+\sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i)=c\times 1+E(X)$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Con Y e X indipendenti avremo che il loro verificarsi congiunto sarà dato da: $P(X\cap Y)=P(X)P(Y)$.

Scriveremo quindi la doppia sommatoria di tutte le coppie di valori (x_i,y_j) moltiplicate tra loro:

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j)p(x_i)p(y_j)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_i p(x_i) y_j p(y_j)}_{fissando\ i=1\ldots i=2\ldots i=n}$$

$$\ldots x_1 p(x_1) y_1 p(y_1)+x_1 p(x_1) y_2 p(y_2)+\cdots+x_1 p(x_1) y_n p(y_n)=$$

$$=x_1 p(x_1)\left[\sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j)\right]$$

$$\ldots x_2 p(x_2) y_1 p(y_1)+x_2 p(x_2) y_2 p(y_2)+\cdots+x_2 p(x_2) y_n p(y_n)=$$

$$=x_2 p(x_2)\left[\sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j)\right]$$

$$\vdots$$

$$\ldots x_n p(x_n) y_1 p(y_1) + x_n p(x_n) y_2 p(y_2) + \cdots + x_n p(x_n) y_n p(y_n) =$$

$$= x_n p(x_n) \left[\sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) \right]$$

Possiamo dunque riscrivere la doppia sommatoria dei prodotti $x_i p(x_i) y_j p(y_j)$, scomponendola nel prodotto di due sommatorie dei fattori con indici *i* e *j* rispettivamente:

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \left[\sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) \right],$$

ossia $E(XY) = E(X)E(Y)$.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Per quanto visto sopra, possiamo scrivere l'equivalenza nei termini di una doppia sommatoria di coppie (x_i, y_j) questa volta però sommate tra di loro:

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j) p(x_i) p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[x_i p(x_i) p(y_j) + y_j p(y_j) p(x_i) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i p(x_i) p(y_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) p(x_i)$$

scomporre la doppia sommatoria per gli indici *i* e *j* nel prodotto di due sommatorie:

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \left[\sum_{j=1}^{n} p(y_j) \right] + \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) \left[\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \right]$$

dato che la somma delle probabilità di tutti gli eventi possibili in uno spazio campione è 1, avremo infine

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) + \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) = E(X) + E(Y).$$

In modo analogo si dimostra l'equivalenza

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y).$$

PROPRIETA' DEL VALORE ATTESO E DELLA VARIANZA

Definizione operativa di varianza di una variabile aleatoria discreta (*v.a.d.*):

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(x_i) = [x_1 - \mu]^2 p(x_1) + [x_2 - \mu]^2 p(x_2) + \cdots + [x_n - \mu]^2 p(x_n)$$

Formula alternativa:

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - \mu]^2 p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} [x_i{}^2 + \mu^2 - 2\mu x_i] p(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x_i{}^2 p(x_i) + \mu^2 p(x_i) - 2\mu x_i p(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p(x_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Il primo addendo è il valore atteso dei valori della v.a.d. X elevati al quadrato (la funzione quadratica non altera le proprietà aleatorie del numero su cui viene calcolata). Gli ultimi due termini si semplificano invece così:

$$= E(X^2) + \mu^2 1 - 2\mu\mu = E(X^2) - \mu^2.$$

Quindi possiamo riscrivere come

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Proprietà:

$$V(c) = 0$$

$$E(c^2) - [E(c)]^2 = c^2 - c^2 = 0$$

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

$$E(c^2X^2) - [E(cX)]^2 = c^2 E(X^2) - [cE(X)]^2$$

$$= c^2 E(X^2) - c^2 [E(X)]^2$$

$$= c^2 \{E(X^2) - [E(X)]^2\} = c^2 V(X)$$

$$V(c + X) = V(X)$$

$$E[(c + X)^2] - [E(c + X)]^2 = E(c^2 + X^2 + 2cX) - [c + E(X)]^2 =$$

$$= c^2 + E(X^2) + 2cE(X) - c^2 - [E(X)]^2 - 2cE(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

PROPRIETA' DEL VALORE ATTESO E DELLA VARIANZA

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

con X e Y indipendenti.

$$E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2 = E(X^2 + Y^2 + 2XY) - [E(X) + E(Y)]^2 =$$

$$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y) =$$

Riorganizzando gli addendi:

$$= \underbrace{E(X^2) - [E(X)]^2}_{V(X)} + \underbrace{E(Y^2) - [E(Y)]^2}_{V(Y)} + 2\left[\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{=0}\right].$$

<u>L'ultimo termine essendo uguale a zero con X e Y indipendenti</u>: infatti

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

(Vedi Pagina 1).

A questo punto è facile verificare che:

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

con X e Y indipendenti.

$$E[(X-Y)^2] - [E(X-Y)]^2 = E(X^2 + Y^2 - 2XY) - [E(X) - E(Y)]^2 =$$

$$= E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 + 2E(X)E(Y) =$$

Riorganizzando gli addendi:

$$= \underbrace{E(X^2) - [E(X)]^2}_{V(X)} + \underbrace{E(Y^2) - [E(Y)]^2}_{V(Y)} - 2\left[\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{=0}\right].$$