

Sottospazi topologici

Teor. Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Allora la famiglia

$$\mathcal{T}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \subset X \text{ aperto}\}$$

è una topologia su Y detta topologia indotta da X o topologia relativa o anche topologia di sottospazio.

Dim. Dimostriamo che valgono le proprietà della definizione di topologia.

$$(1) \emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

$$(2) Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

$$(3) \forall \{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}_Y \exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ aperti di } X \text{ t.c. } V_\alpha = U_\alpha \cap Y \forall \alpha \in A \Rightarrow$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

$$(4) \forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y \exists U_1, U_2 \text{ aperti in } X \text{ t.c. } V_1 = U_1 \cap Y \text{ e } V_2 = U_2 \cap Y \Rightarrow \\ V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y \in \mathcal{T}_Y. \quad \square$$

Def. $Y \subset X$ con la topologia relativa è detto *sottospazio topologico* di X .

Oss. Qualunque sottoinsieme di uno spazio topologico è un sottospazio topologico con la topologia relativa.

Un sottospazio topologico $Y \subset X$ è a sua volta uno spazio topologico.

$V \subset Y$ aperto in $Y \Leftrightarrow \exists U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap Y$.

I sottoinsiemi di uno spazio topologico saranno sempre considerati con la topologia relativa, se non specificato diversamente.

Esempio. $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ è un importante sottospazio topologico e lo considereremo con la topologia Euclidea indotta da \mathbf{R} .

$[0, +\infty[\subset \mathbf{R}$ è un altro esempio interessante.

Prop. $Y \subset X$ sottospazio topologico e \mathcal{B} base per $X \Rightarrow$

$$\mathcal{B}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

base per Y .

Dim. [Esercizio](#) (usare le definizioni di topologia relativa e di base).

Prop. $Y \subset X$ sottospazio, $y \in Y$ e \mathcal{J}_y base di intorni di y in $X \Rightarrow$

$$\mathcal{J}_{Y,y} \stackrel{\text{def}}{=} \{J \cap Y \mid J \in \mathcal{J}_y\}$$

base di intorni di y in Y .

Dim. [Esercizio](#) (usare le definizioni di topologia relativa e di base di intorni).

Spazi metrici

Def. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ è detta *distanza* o *metrica* su X se valgono le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in X$:

- (1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Oss. $d \geq 0$ infatti $\forall x, y \in X$ si ha

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Def. Uno *spazio metrico* (X, d) è un insieme non vuoto X munito di una distanza d su X .

Esempio. Per ogni insieme non vuoto X consideriamo la *distanza discreta*

$$d_{\text{dis}}: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

(X, d_{dis}) è detto *spazio metrico discreto*.

Esempio. *Distanza Euclidea* su \mathbf{R} : $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

Def. (X, d) spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Il sottoinsieme

$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset X$$

è detto *boccia aperta di centro x e raggio r* .

$$\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \subset X$$

è detto *boccia chiusa di centro x e raggio r* .

Oss. $x \in B_d(x, r) \subset \bar{B}_d(x, r)$.

Teor. (X, d) spazio metrico \Rightarrow

$$\mathcal{B}_d := \{B_d(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$$

base per una topologia \mathcal{T}_d su X (*topologia indotta da d o top. metrica*).

Dim. Oss. precedente $\Rightarrow \bigcup_{x, r} B(x, r) = X$ (proprietà (1) delle basi).

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall r_1, r_2 > 0 \quad \forall y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \rightsquigarrow$$

$$r := \min(r_1 - d(x_1, y), r_2 - d(x_2, y)) > 0$$

$\forall z \in B(y, r) \Rightarrow d(x_1, z) \leq d(x_1, y) + d(y, z) < d(x_1, y) + r \leq r_1 \Rightarrow z \in B(x_1, r_1)$ e similmente $z \in B(x_2, r_2) \Rightarrow$

$$y \in B(y, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \quad (\text{proprietà (2) delle basi}). \quad \square$$

Def. Uno spazio topologico X è detto *spazio metrizzabile* se esiste una distanza d su X che induce la topologia di X .

Esempio. Gli intervalli aperti limitati di \mathbf{R} sono le bocce aperte rispetto alla distanza Euclidea $\Rightarrow \mathbf{R}$ metrizzabile.

$d_{\text{dis}} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{\text{dis}}$ su X perché $B_{d_{\text{dis}}}(x, 1) = \{x\} \Rightarrow X_{\text{dis}}$ metrizzabile $\forall X$.

Oss. Gli spazi topologici discreti sono metrizzabili dato che la topologia discreta è indotta dalla distanza discreta.

Spazi Euclidei. Su \mathbf{R}^n consideriamo la *distanza Euclidea*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Ricordiamo che la disuguaglianza triangolare consegue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto scalare canonico di \mathbf{R}^n .

Def. La topologia su \mathbf{R}^n indotta dalla distanza Euclidea si chiama *topologia Euclidea*.

Oss. Consideriamo sempre \mathbf{R}^n con la topologia Euclidea, se non specificato diversamente.

In modo simile si definisce la topologia Euclidea su \mathbf{C}^n come quella indotta dalla distanza Euclidea

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{C}^n$.

Prop. Sia (X, d) spazio metrico e $Y \subset X$ sottospazio topologico. Allora la restrizione $d_Y = d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ è una distanza su Y che induce la topologia di sottospazio.

Dim. Che d_Y sia una distanza segue subito dal fatto che lo è d .

Che la topologia indotta su Y da d_Y sia la topologia di sottospazio segue subito dall'uguaglianza

$$B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y,$$

$\forall y \in Y$ e $\forall r > 0$, che è di immediata verifica. □

Cor. X spazio metrizzabile e $Y \subset X$ sottospazio $\Rightarrow Y$ metrizzabile.

Sottospazi notevoli di \mathbf{R}^n .

Def. Il sottospazio topologico

$$B^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subset \mathbf{R}^n$$

si chiama *n*-boccia o *n*-disco o *disco n-dimensionale*.

Il sottospazio topologico

$$S^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

si chiama *n*-sfera o *ipersfera* o *sfera n-dimensionale*.

Oss. $S^n \subset B^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

$B^0 = \{0\}$.

$B^1 = [-1, 1] \subset \mathbf{R}$.

B^2 è il disco chiuso unitario in \mathbf{R}^2 .

B^3 è la boccia chiusa unitaria in \mathbf{R}^3 .

$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbf{R}$ è uno spazio discreto con due punti.

$S^1 \subset \mathbf{R}^2$ è la circonferenza unitaria.

$S^2 \subset \mathbf{R}^3$ è la sfera unitaria.

Oss. $[0, 1]$, S^n , B^n sono metrizzabili.