Gli assiomi dei numeri reali e le loro conseguenze

premessa agli assiomi dei numeri reali

Si assume che esiste l'insieme dei numeri reali (indicato con $\mathbb{R}$) su cui è possibile eseguire le quattro operazioni elementari ($+$, $-$, $\cdot$, $:$) e su cui è possibile stabilire quale tra due numeri è il maggiore.

In questo sistema valgono gli assiomi delle operazioni, dell'ordinamento e l'assioma di completezza.

assiomi delle operazioni

Siano a , b , c tre numeri reali qualsiasi.
Tra essi sono definite le operazioni di addizione ($+$) e moltiplicazione ($\cdot$) con le seguenti proprietà:

proprietà associativa dell'addizione	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
proprietà associativa della moltiplicazione	$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$
proprietà commutativa dell'addizione	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
proprietà commutativa della moltiplicazione	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione	$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$
esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione	esiste in $\mathbb{R}$ il numero **0** tale che $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$
esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione	esiste in $\mathbb{R}$ il numero **1** tale che $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{1}=\boldsymbol{a}$
esistenza dell'opposto	per ogni numero reale a esiste un numero reale $-\boldsymbol{a}$ tale che $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$
esistenza dell'inverso	per ogni numero reale $a\neq 0$ esiste un numero reale $\boldsymbol{a}^{-1}$ tale che $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})=\boldsymbol{1}$

assiomi dell'ordinamento

E' definita la relazione di minore o uguale ($\leq$) tra le coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

dicotomia	per ogni coppia di numeri reali si ha $\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{b}$ oppure $\boldsymbol{b}\leq\boldsymbol{a}$
proprietà asimmetrica	se valgono contemporaneamente $a\leq b$ e $b\leq a$ allora $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$
altri assiomi	se vale $a\leq b$ allora vale anche $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\leq\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ per ogni c reale
altri assiomi	se $0\leq a$ e $0\leq b$ allora valgono anche $\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ **e** $\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

assioma di completezza

se A e B sono due insiemi non vuoti di numeri reali tale che $a<b$ per ogni a appartenente ad A e per ogni b appartenente a B, allora esiste almeno un numero reale c tale che $a\leq c\leq b$

Gli assiomi dei numeri reali e le loro conseguenze

alcune conseguenze degli assiomi

Siano a , b , c tre numeri reali qualsiasi. Si dimostrano le seguenti proprietà:

conseguenze degli assiomi relativi alle operazioni

semplificazione rispetto alla somma	se $\boldsymbol{a+b=a+c}$ allora $\boldsymbol{b=c}$
semplificazione rispetto al prodotto	se $\boldsymbol{a\neq 0}$ e $\boldsymbol{a\cdot b=a\cdot c}$ allora $\boldsymbol{b=c}$
legge di annullamento del prodotto	$\boldsymbol{a\cdot b=0}$ se e solo se $\boldsymbol{a=0}$ oppure $\boldsymbol{b=0}$
unicità dell'opposto	***l'opposto*** *di un numero reale* è ***unico***
unicità dell'inverso	***l'inverso*** *di un numero reale non nullo* è ***unico***
altra proprietà	$\boldsymbol{-(-a)=a}$
altra proprietà	$\boldsymbol{(-a)\cdot b=-a\cdot b}$
altra proprietà	$\boldsymbol{(-a)\cdot(-b)=a\cdot b}$

conseguenze degli assiomi relativi all'ordinamento

proprietà dell'equivalenza	$\boldsymbol{a\leq b}$ è equivalente a $\boldsymbol{b-a\geq 0}$
proprietà transitiva	se $\boldsymbol{a\leq b}$ e $\boldsymbol{b\leq c}$ allora $\boldsymbol{a\leq c}$
altre proprietà	$\boldsymbol{a\geq 0}$ se e soltanto se $\boldsymbol{-a\leq 0}$
altre proprietà	se $\boldsymbol{a\leq b}$ e $\boldsymbol{c\geq 0}$ allora $\boldsymbol{a\cdot c\leq b\cdot c}$
altre proprietà	se $\boldsymbol{a\leq b}$ e $\boldsymbol{c\leq 0}$ allora $\boldsymbol{a\cdot c\geq b\cdot c}$

la relazione di maggiore o uguale ($\geq$) è ricondotta a quella di minore o uguale mediante la **definizione** $a\geq b \quad \Leftrightarrow \quad b\leq a$ La relazione di $\geq$ gode delle stesse proprietà della relazione di $\leq$

una conseguenza dell'assioma di completezza

Una importante conseguenza dell'assioma di completezza è che consente di distinguere l'insieme dei numeri razionali **Q** da quello dei numeri reali **R.**

Tale assioma vale infatti solo per i numeri reali e non vale per i numeri razionali come vediamo nel seguente esempio.

Consideriamo i sottoinsiemi A e B dei numeri razionali **Q** con $A\subseteq Q$ e $B\subseteq Q$ tali che $A=\{a>0:\ a^2\leq 2\}$ e $B=\{b>0:\ b^2\geq 2\}$. Risulta che $a<b\ \ \forall\, a\in A\ e\ \forall\, b\in B$.

Le ipotesi dell'assioma di completezza sono quindi soddisfatte ma NON esiste un numero razionale **c** tale che $a\leq c\leq b$. Infatti l'unico elemento che si trova tra l'insieme A e l'insieme B è $\sqrt{2}$ che NON è un numero razionale.