Lezione 2 ottobre 2023

lunedì 2 ottobre 2023 09:03

Visto: def. di curva algebrica affine

$$C = (Z(f), f)$$

$$Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_K \quad , \quad f \in K[x,y]$$

Def.: $\deg f$ (= gr f) = GRADO di f

è il grado come polinomio in x, y

OSS.: Se $f(x,y) = a_0 \in K$ è un polinomio costante

$$Z(f) = Z(a_0) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a_0 \neq 0 \\ \mathbb{A}^2_K & a_0 = 0 \end{cases}$$

Entrambi i casi non interessanti

D'ORA IN POI SUPPORREMO SEMPRE

$$\boxed{\deg f \geq 1}$$

Def.: Sia $C = (Z(f), f)$, con $\deg f \geq 1$

$\operatorname{ord} C$ = ORDINE DI C $:= \deg f$.

RICHIAMO: $K[x,y]$ (e in generale $K[x_1, \dots, x_n]$) è un Anello UFD

(unique factorization domain), o DFU in italiano, cioè ogni polinomio si può fattorizzare nel prodotto di polinomi irriducibili, in modo unico a meno di elementi invertibili:

$$f(x,y) = c \cdot f_1(x,y)^{\mu_1} \cdot f_2(x,y)^{\mu_2} \cdots \frac{1}{c} f_r(x,y)^{\mu_r}$$

con $f_i(x,y)$ irriducibili

Elementi invertibili in $K[x,y]$: sono le costanti non nulle (ricordo: se $\deg f(x,y) \geq 1$, non $\exists$ polinomio $g(x,y)$ t.c. $f(x,y)\cdot g(x,y) = 1_K$)

Esempi: • $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$= 2\cdot(x-y)\cdot\frac{1}{2}(x+y)$$

• $$g(x,y) = (3x+2)^2\cdot(x^3+1)$$
$$= (3x+2)^2\,(x+1)\,\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{irriducibile}}$$

Def: Se $f(x,y) = f_1(x,y)^{\mu_1}\cdots f_r(x,y)^{\mu_r}$

allora le curve $C_i = (Z(f_i), f_i)$ si chiamano COMPONENTI IRRIDUCIBILI di $C = (Z(f), f)$

OSS.: $C = (Z(f\cdot g), f\cdot g)$

$$Z(f\cdot g) \ni P \iff (f\cdot g)(p_1,p_2) = 0 \in K$$

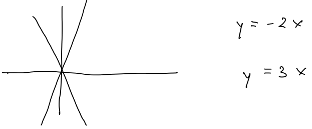
$P = (p_1,p_2)$ $$\underbrace{f(p_1,p_2)}_{\in K}\cdot\underbrace{g(p_1,p_2)}_{\in K} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(p_1,p_2)=0 \text{ oppure } g(p_1,p_2)=0$$

$$\Rightarrow Z(f\cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$$

Es: $h = (3x-y)(-2x-y) = f\cdot g$



Def: Se $f(x,y)$ è IRRIDUCIBILE, $C = (Z(f), f)$ è IRRIDUCIBILE

Se $f(x,y) = f_1(x,y)^{\mu_1}\cdots f_r(x,y)^{\mu_r}$

$C_i := (Z(f_i), f_i)$ è una comp. irrid.

di MOLTEPLICITÀ μ_i.

Def.: Se $f = f_1(x,y) \cdots f_r(x,y)$, cioè $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 1$, f si dice POLINOMIO RIDOTTO, e $C = (Z(f), f)$ CURVA RIDOTTA.

LEMMA DI STUDY: Sia K un campo algebricamente chiuso: $K = \overline{K}$.

Allora: se $Z(g) \subseteq Z(f) \Rightarrow g \underset{\text{divide}}{\mid} f$

con g irriducibile

cioè: $\exists\, h : f = g \cdot h$

$(f, g \in K[x_1, \dots, x_n])$

OSS.: Le ipotesi $K = \overline{K}$ e g irriducibile sono necessarie:

- se $K = \mathbb{R}$, cons.

  $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

  $f(x,y) = x + y$

  si ha: $Z(g) = \emptyset \subseteq Z(f)$

  ma g non divide f

- Se g non è irriducibile:

  $g(x) = x^2$, $f(x) = x$

  $Z(g) = \{0\} \subseteq Z(f) = \{0\}$

  ma g non divide f.

OSS.: Se $K = \overline{K}$, allora K è INFINITO.

Supp. $\mathbb{K} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

cons. $p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)+1$

$$p(a_i) = 1 \quad \forall\, a_i \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$$

Vedremo: se $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$ e $f(x,y)\in\mathbb{K}[x,y]$, $\deg f \geq 1$

$\Rightarrow Z(f)$ contiene infiniti punti

TEOREMA DI BÉZOUT: Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ pol. non costanti senza fattori irriducibili comuni $\Longrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cardinalità}}}{\#}\big(Z(f)\cap Z(g)\big) \leq \deg f \cdot \deg g$

in particolare: è finita.

COROLLARIO: $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$; $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{contiene infiniti punti}}}{Z(g)} \subseteq Z(f)$

$\Longrightarrow \#\big(Z(g)\cap Z(f)\big) =$ infinita

$\underset{\text{Teo Bézout}}{\Longrightarrow}$ g e f hanno fattore irriducibile comune

$\underset{g \text{ irriducibile}}{\Longrightarrow}$ $f = g\cdot h$

OSS. Le curve $C=(Z(f),f)$ sono semplici, perché polinomiali, ma il loro supporto $Z(f)$ può essere estremamente complicato; ad esempio, possiamo avere delle SINGOLARITÀ:

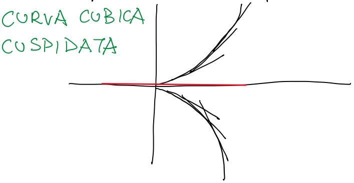
Esempio: $f(x,y) = y^2 - x^3$

$C = (Z(y^2-x^3),\, y^2-x^3)$, ord $C = 3$, C si f è un polinomio irriducibile: per assurdo, supp.

$$f(x,y) = (ax+by+c)(a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + a_{00})$$

$$= y^2 - x^3$$

$Z(y^2-x^3)$: la parte reale: $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$



$$y^2 = x^3$$

Oss: $Z(y^2-x^3)$ è il supporto della curva diff. parametrizzata:

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{\alpha(t) = (t^2, t^3)}$$

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$$

$\alpha'(0) = (0, 0) \Rightarrow \alpha$ non è una curva regolare

Affermo anche: $\mathrm{Im}(\alpha) = Z(y^2-x^3)$

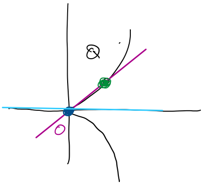
infatti: $P \in \mathrm{Im}(\alpha)$, $P = (t_1^2, t_1^3)$

$f = y^2 - x^3$; $f(P) = (t_1^3)^2 - (t_1^2)^3 = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq Z(y^2-x^3)$

Sia $Q \in Z(y^2-x^3)$; $Q = (q_1, q_2)$

2 3



$g_2 = g_1$

se $Q = (0,0)$, ok

$= (t^2, t^3)$ con $t = 0$

se $Q \neq (0,0)$

Cons $\overline{OQ}$: $y = mx$

$$\boxed{\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y = mx \end{cases}} \qquad \begin{cases} \boxed{m^2 x^2 = x^3} \\ \boxed{y = mx} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{\underbrace{x^2}_{\text{molteplicità } 2}(m^2 - x) = 0} \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ x = m^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = ms \end{cases}$$

$x = 0, \; y = 0$

$x = m^2, \; y = m \cdot m^2 = m^3$

$Q \in Z(y^2 - x^3)$

$Q \neq (0,0)$

$\Longrightarrow \; Q = (m^2, m^3) = \alpha(m)$

Vorrei dire che $y = 0$ è tg a $C = (Z(y^2 - x^3), y^2 - x^3)$ in $(0,0)$

Vediamo cosa succede se interseco con la retta $y = 0$:

$$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \text{la molteplicità di } \cap \text{ in } (0,0) \text{ è } 3$$

RICAP. :

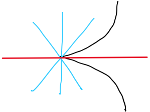
$$\left.\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ y = mx \end{cases}, \; m \neq 0 \right) \Longrightarrow \text{molt. dell'} \cap \text{ in } O \text{ è } 2$$

$$\left.\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right) \Longrightarrow \text{molt. dell'} \cap \text{ in } O \text{ è } 3$$

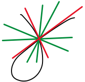
ultimo caso da analizzare :

$$\left.\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \right) \Longrightarrow \left.\begin{cases} \overset{\text{molt.} = 2}{y^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \right) \Longrightarrow \text{molt. dell'} \cap \text{ in } O \text{ è } 2$$

$\Longrightarrow$ tutte le rette passanti per $(0,0)$, eccetto $Z(y)$, hanno molteplicità di intersezione 2 in $(0,0)$ con la cubica cuspidata.
La retta $Z(y)$ ha, invece, molteplicità di intersezione 3 in $(0,0)$.



Daremo la seguente
def. di RETTA TG:
è una retta che in un
punto fissato ha
molteplicità di intersezione
> molteplicità di int. della
generica retta passante
per tale punto



Vedremo in modo analogo
che la cubica nodata ammette
2 rette con molteplicità di intersezione 3
nel nodo; tutte le altre hanno molt. di int.
2.