Lezione 26 settembre 23

martedì 26 settembre 2023 09:09

AVVISO: giovedì 28/9 NO LEZIONE

PROSSIMA LEZ.: 2/10 9:15

3/10 9:15

NO LEZIONE 23/10 & 24/10

SÌ LEZIONE 26/10 giovedì 16:00 – 17:30

INTRODUZIONE:

Tratteremo CURVE ALG. PIANE

(SUP. ALG. & IPERSUP. ALG.)

che sono generalizzazione delle

RETTE (PIANI & IPERPIANI)

CONICHE (QUADRICHE & IPERQUADRICHE)

$r \subseteq \mathbb{A}^2$ retta

si può assegnare con 1 eq. cartesiana:

$$\boxed{ax + by = c}$$

(in più dimensioni: $\mathbb{A}^3$: $ax + by + cz = d$

piano affine

in gen. $\mathbb{A}^n$: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

iperpiano affine)

$$\iff ax + by - c = 0$$

$ax + by - c \in \mathbb{R}[x, y]$

anello dei polinomi

$\Rightarrow$ r = luogo degli zeri di un polinomio di grado 1 in 2 indeterminate x e y

Analog.: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b = 0$

H iperpiano = luogo di zeri di un pol. di grado 1 in n indeter.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

Generalizzo questi oggetti geo cons. polinomi di grado più alto:

Es. grado 2 : $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

in A^2_R : $\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}}_{\in \mathbb{R}[x,y]} = 0$

è l'eq. generale di una conica affine

Generalizziamo a più dimensioni:

in A^3_R : $\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00}} = 0$

QUADRICA AFFINE $\in \mathbb{R}[x,y,z]$

$\rightsquigarrow$ possiamo ass. matrice simmetrica

$$(a_{ij})_{\substack{0 \le i \le 3 \\ 0 \le j \le 3}} = A \quad 3 \times 3$$

il rango di A e delle sue sottomatrici permette di dare una class. geometrica delle quadriche

Più in generale:

Cons. A^n_R : cons. un polinomio di grado 2 in n incognite : $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

$\underline{gr}\, f = 2$

grado

$f = f(x_1, \dots, x_n)$, e cons.

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

o più precisamente:

$$\underbrace{Z(f)}_{\text{zeri del polinomio } f} := \{ P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} : f(p_1, \dots, p_n) = 0 \} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$$

IPERQUADRICHE AFFINI

$$\rightsquigarrow \quad A \in \mathrm{Sym}((n+1) \times (n+1), \mathbb{R})$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff {}^tX \underset{\text{prodotto RC}}{\cdot} A \underset{\text{prodotto RC}}{\cdot} X = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{(x_1 \ \cdots \ x_n \ 1)}_{1 \times (n+1)} \cdot \underset{(n+1) \times (n+1)}{A} \cdot \underset{(n+1) \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}}}_{1 \times 1}$$

$$f(p_1,\dots,p_n) \iff (p_1 \dots p_n\ 1)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} p_1\\ \vdots \\ p_n \\ 1\end{pmatrix} \in R$$

* * *

Def: Una CURVA PIANA ALGEBRICA è
"il luogo degli zeri di un polinomio $f(x,y) \in K[x,y]$"
con K campo

Cioè: in $\mathbb{A}^n_K$ fissiamo un SIST. DI RIF. AFFINE (Richiamo: $O \in \mathbb{A}^n_K$ ORIGINE

se $\mathbb{A}^n_K = \mathbb{A}(V)$, V sp. vett. su K, $\dim V = n$

fissiamo una base di V:

$\{v_1, \dots, v_n\}$

$(O, \{v_1, \dots, v_n\})$

Con questo dato, ad ogni punto di $\mathbb{A}^n_K$ possiamo associare COORDINATE AFFINI:

$P \in \mathbb{A}^n_K \rightsquigarrow \vec{OP} \in V$

$(f(O,P);\ P-O)$

$$\vec{OP} = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$$

le coordinate affini di P sono $(p_1, \dots, p_n)$, cioè le coord. del vettore $\vec{OP}$ nella base fissata

Esempio più comune di spazio affine:

SPAZIO AFFINE STANDARD:

$V = K^n$, $A(K^n) =: \mathbb{A}^n_K$; come insieme

gli elementi di K^n come SV verranno indicati con $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = v$

$\mathbb{A}^n_K =: A(K^n) = K^n$: gli elementi di K^n come SA verranno indicati $(b_1, \dots, b_n) = B$

$$f : \mathbb{A}^n_K \times \mathbb{A}^n_K \longrightarrow K^n$$

$$f(B, C) = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ \vdots \\ c_n - b_n \end{pmatrix} =: \vec{BC} \; (= C - B)$$

$B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$

INFINE: Scegliamo il SIST. DI RIF. PIÙ SEMPLICE: Scelgo $O \in \mathbb{A}^n_K$

$O = (0, 0, \dots, 0)$

e in $V = K^n$ scelgo BASE CANONICA

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

CON QUESTE SCELTE:

se $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n_K$, le COORDINATE AFF. di P sono

$P - O = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ \vdots \\ p_n - 0 \end{pmatrix}$ e ne prendo le coordinate nella $\mathcal{E}$

$\rightsquigarrow$ sono $(p_1, p_2, \dots, p_n)$

Torniamo alla definizione:

$P \in \mathbb{A}^2_K$ annulla $f \in K[x, y]$

$\Leftrightarrow$ le sue coordinate (p_1, p_2) soddisf.:

$$f(p_1, p_2) = 0$$

OSS: Può succedere che polinomi diversi abbiano lo stesso luogo degli zeri:

Es: $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$: • $Z(3x-y+1) = Z(c(3x-y+1)) = Z(3cx-cy+c)$

$c \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}$

• $\underline{Z(3x-y+1)} = \underline{Z(\boxed{(3x-y+1)^2})}$

$(3x-y+1)\cdot(3x-y+1) = 0$

• $Z((x^2+y^2+1)(3x-y+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$= Z(3x-y+1)$

Def.: Una CURVA ALGEBRICA PIANA (CAP) AFFINE

è una coppia $C = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{supporto}}}{Z(f)}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{polinomio}}}{f}\right)$