Lezione 3 ottobre 2023

martedì 3 ottobre 2023 09:06

TRASFORMAZIONE DI CURVE ALG. AFFINI

PER AFFINITÀ:

Cons. $\alpha : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$, K campo qualsiasi;

affinità:

$$\alpha : \begin{cases} x_1 = ax + by + c \\ y_1 = dx + ey + f \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ d & e \end{matrix}} & \begin{matrix} c \\ f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}^{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha(x,y) = (x_1, y_1)$; $\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sia $\alpha^{-1} : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$

$$\alpha^{-1} : \boxed{\begin{cases} x = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 \\ y = d_1 x_1 + e_1 y_1 + f_1 \end{cases}}$$

$\alpha^{-1}(x_1, y_1) = (x, y)$

Domanda: chi è $\alpha(Z(f))$, $f = f(x,y) \in K[x,y]$ non costante ?

Abbiamo: $P_1 \in \alpha(Z(f)) \iff \alpha^{-1}(P_1) \in Z(f)$

$P_1 = (x_1, y_1)$

$$\Updownarrow$$

$$f(\alpha^{-1}(P_1)) = 0$$

$$\iff f(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1,\ d_1 x_1 + e_1 y_1 + f_1) = 0$$

$$= \tilde{f}(x_1, y_1) \in K[x_1, y_1]$$

$\Longrightarrow$ $\alpha(Z(f))$ è ancora luogo degli zeri di un polinomio: $Z(\tilde{f})$

(richiamo : se $\deg f = 2$: $f(x,y) = 0$

$$\iff \boxed{(x\ y\ 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0} \iff {}^t\left(B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot A \cdot B^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_1\ y_1\ 1) \cdot \boxed{{}^tB^{-1} \cdot A \cdot B^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Def: $\alpha: \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ affinità, $C = (Z(f), f)$

chiameremo CURVA ALGEBRICA IMMAGINE DI C

$$C_1 = (Z(\tilde{f}), \tilde{f})$$

__OSS.__: $\deg \tilde{f} = \deg f$

__Dim.__: $f = \dots + g \cdot x^\alpha y^\beta + \dots$ $\qquad g \in K$

se $\deg f = d$, $\alpha + \beta \le d$ (vale per tutti i monomi)

$$\tilde{f} = \dots + g \cdot \underbrace{(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1)^\alpha \cdot (d_1 x_1 + e_1 y_1 + f_1)^\beta}_{} + \dots$$

grado di x_1 è $\le \alpha + \beta$

grado di ogni monomio che compare nello sviluppo del prodotto ha grado $\le \alpha + \beta \le d$

$\Longrightarrow \deg f \ge \deg \tilde{f}$

Cons. ora $\alpha^{-1}: \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$

osservo che $\alpha^{-1}(Z(\tilde{f})) = Z(f)$

riapplico il ragionamento appena fatto e trovo

$\deg \tilde{f} \ge \deg f$

__OSS.__: Questo risultato si generalizza alle dimensioni superiori.

Cons. $\mathbb{A}^n_K$, $n \geq 3$

$f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f \geq 1$

Una IPERSUPERFICIE ALGEBRICA è una coppia $S = (Z(f), f)$

$$\text{ord } S := \deg f$$

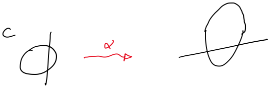
Se $\alpha : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$ affinità

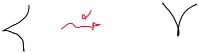
$\alpha^{-1} : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$

allora $\alpha(Z(f))$ è $= Z(\tilde{f})$

$\deg \tilde{f} = \deg f$.

OSS.: Non è difficile verificare, che se C è una curva $\subseteq \mathbb{A}^2_K$ RIDUCIBILE (non è irriducibile), allora ogni componente irriducibile di C viene mandata in una componente irriducibile di C_1 dello stesso grado tramite affinità (basta ripetere l'argomento di prima $\forall$ componente irriducibile)



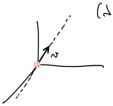


PASSIAMO A $\mathbb{P}^2_K$

$$\mathbb{P}^2_K := K^3 - \{0\} \,/\, \sim$$

dove $\sim$ è la relazione di PROPORZIONALITÀ:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in K^* \ (\lambda \neq 0) : w = \lambda v$$



Quindi: gli elementi di $\mathbb{P}^2_K$, che si chiameremo PUNTI sono classi di equivalenza:

$$P = [v] \in \mathbb{P}^2_K$$
$$\overset{\|}{=} [\lambda v] \ , \quad \lambda \neq 0$$

COORDINATE OMOGENEE di $P \in \mathbb{P}^2_K$:

Fissiamo una base dello SV (spazio vettoriale) K^3; tipicamente quella CANONICA: $\mathcal{E} = \{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3} \}$

sia $P = [v]$, $v = \begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix} = p_0 e_1 + p_1 e_2 + p_2 e_3$

definiamo p_0, p_1, p_2 COORDINATE OMOGENEE di P, e scriveremo

$$P = (p_0 : p_1 : p_2)$$

OSS: le coord. omog. sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità; infatti:

$$\begin{array}{ccc} P = [v] & = & [\lambda v] \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_0, p_1, p_2 & & \lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2 \end{array}$$

$$\implies P = (p_0 : p_1 : p_2) = (\lambda p_0 : \lambda p_1 : \lambda p_2)$$

con p_0, p_1, p_2 MAI CONTEMPORANEAMENTE NULLE (ovvero, almeno uno $p_i \neq 0$), per costruzione $\left(\mathbb{P}^2_K = K^3 - \{0\} / \sim \right)$

Pb: Definire luoghi degli zeri di tipo algebrico.

Es: $f(x_0, x_1, x_2) = \underline{x_0 - x_1 x_2}$ NON è un polinomio omogeneo

$f(P) = f(1,1,1) = 1 - 1\cdot 1 = 0$

$P = (1:1:1) \overset{\shortparallel}{=} (2:2:2)$ $\neq$

$f(P) = f(2,2,2) = 2 - 2\cdot 2 = -2$

Def.: $F(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$

$F(x_0, x_1, x_2)$ = somma finita di monomi

$$= \sum_{\substack{0 \le i_j \le d \\ i_0 + i_1 + i_2 \le d}} a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

$d = \deg F$

$$= \underbrace{F_0}_{\text{somma dei monomi di grado 0}} + \overbrace{F_1}^{\text{somma dei monomi di grado 1}} + F_2 + \dots + F_d$$

F si dice OMOGENEO DI GRADO d

se $F_0 = F_1 = \dots = F_{d-1} = 0$.

F_i si chiamano TERMINI OMOGENEI DI GRADO d.

Es: $F = x_0 - x_1 \cdot x_2$, $d = \deg F = 2$

$F_0 = 0$, $F_1 = x_0$, $F_2 = -x_1 x_2$

NON è OMOGENEO.

Es: $F = x_0^3 + 2 x_1 x_2^2 - 8 x_1^3 = F_3$

I polinomi omogenei sono buoni candidati per definire $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

$P = (p_0 : p_1 : p_2)$

$$F(P) = F(p_0, p_1, p_2) = \overbrace{p_0^3 + 2\,p_1 p_2^2 - 8\,p_1^3}$$

$$F(\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2) = (\lambda p_0)^3 + 2\cdot(\lambda p_1)\cdot(\lambda p_2)^2 - 8\,(\lambda p_1)^3$$

$$\overset{!}{=} \lambda^3 \underbrace{\left(p_0^3 + 2\,p_1 p_2^2 - 8\,p_1^3\right)}$$

LEMMA : $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è OMOGENEO

$$\iff \quad F(t x_0, t x_1, \dots, t x_n) = t^d \cdot F(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

dove $d = \deg F$

in $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n, t]$

Dim. : $\Rightarrow$: facile

F omogeneo $\Rightarrow$ F è somma di monomi di grado d

cons. un generico monomio di grado d :

$$M(x_0, x_1, x_2) = c \cdot x_0^{\alpha} \cdot x_1^{\beta} \cdot x_2^{\gamma} \quad \text{con} \quad \boxed{\alpha + \beta + \gamma = d}$$

$0 \le \alpha \le d$

$0 \le \beta \le d$

$0 \le \gamma \le d$

$$M(t x_0, t x_1, t x_2) = c \cdot (t x_0)^{\alpha} \cdot (t x_1)^{\beta} \cdot (t x_2)^{\gamma}$$

$$= c \cdot t^{\boxed{\alpha+\beta+\gamma}} \, x_0^{\alpha} \, x_1^{\beta} \, x_2^{\gamma}$$

$$= t^d \cdot M(x_0, x_1, x_2)$$

Ora: F omogeneo è somma di monomi di grado d $\Rightarrow$ vale anche per F.

⇐ : Supp. che valga $\boxed{F(tx_0,\dots,tx_n)=t^d F(x_0,\dots,x_n)}$

$$F(x_0,\dots,x_n)=F_0+F_1+F_2+\dots+F_d$$

$$F(tx_0,\dots,tx_n)=F_0+\underbrace{F_1(tx_0,\dots,tx_n)}_{\text{omog. di grado 1}}+F_2(tx_0,\dots,tx_n)+\dots+F_d(tx_0,\dots,tx_n)$$

per il punto precedente

$$=F_0+t\,F_1(x_0,\dots,x_n)+t^2F_2(x_0,\dots,x_n)+\dots+t^dF_d(x_0,\dots,x_n)$$

$$=t^d\cdot F_0+t^d\cdot F_1+t^dF_2+\dots+t^dF_d$$

uguaglianza di polinomi $\Longrightarrow F_0=\dots=F_{d-1}=0$

CONSEGUENZA:

Se $F(x_0,x_1,x_2)$ è un polinomio omogeneo, è ben definito il suo LUOGO DEGLI ZERI PROIETTIVI:

$$Z(F)\subseteq\mathbb{P}^2_K$$

$$Z(F):=\{P\in\mathbb{P}^2_K,\ P=(p_0:p_1:p_2) : F(p_0,p_1,p_2)=0\}$$

Def.: Sia $F\in K[x_0,x_1,x_2]$ OMOGENEO di grado $d\geq1$

Una CURVA ALGEBRICA PROIETTIVA è una coppia $\mathcal{C}=(Z(F),F)$

dove $Z(F)=\{P\in\mathbb{P}^2_K : F(p_0,p_1,p_2)=0\}$

con $P=(p_0:p_1:p_2)$