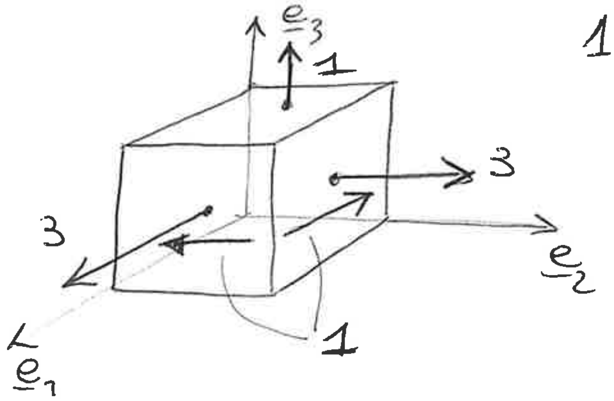
ESERCIZIO

Assegnato lo stato tensionale indicato nel disegno a fianco:



[N/mm² = MPa]

a) Scrivere l'espressione del tensore degli sforzi $\underset{\sim}{\sigma}$ nel sistema $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$;

b) Determinare le direzioni e le tensioni principali.

c) Calcolare le componenti idrostatica e deviatorica di $\underset{\sim}{\sigma}$

SOLUZIONE

a)
$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2]$$

b) Si osserva che $\underline{e}_3$ è una direzione principale e la relativa tensione principale è $1\ N/mm^2$.

In generale $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ si determinano risolvendo il seguente problema agli autovalori:

$$(\underline{\sigma} - \sigma_I \underline{I})\, \underline{n}_I = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\sigma_I & -1 & 0 \\ -1 & 3-\sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sigma_I \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$(1-\sigma_I)\left((3-\sigma_I)^2-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad (1-\sigma_I)(\sigma_I-2)(\sigma_I-4)=0$$

da cui seguono i valori delle 3 tensioni principali:

$$\sigma_I = 4\ \frac{N}{mm^2}, \quad \sigma_{II} = 2\ \frac{N}{mm^2}; \quad \sigma_{III} = 1\ \frac{N}{mm^2}.$$

Calcolo autovettori:

$\boxed{\underline{n}_I} \rightarrow$ Siano n_I^1, n_I^2, n_I^3 le componenti di $\underline{n}_I$ nel sistema $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$. Il sistema di equazioni per determinare n_I^1, n_I^2, n_I^3 è:

$$\left.\begin{aligned}(3-4)\, n_I^1 - n_I^2 &= 0\\ -n_I^1 + (3-4)\, n_I^2 &= 0\\ (1-4)\, n_I^3 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_I^1 &= -n_I^2 = \lambda \\ n_I^3 &= 0\end{aligned}$$

Imponendo che $|\underline{n}_I| = 1$ si ottiene

$$\underline{n}_I = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

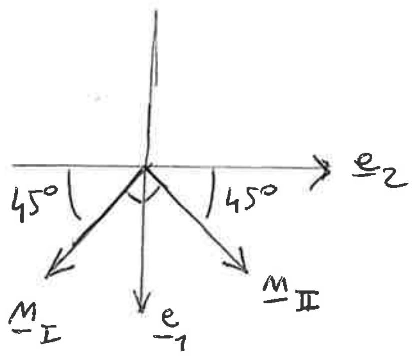
$\boxed{\underline{n}_{II}} \equiv (n_{II}^1, n_{II}^2, n_{II}^3)$

$$\left.\begin{aligned}(3-2)\, n_{II}^1 - n_{II}^2 &= 0\\ -n_{II}^1 + (3-2)\, n_{II}^2 &= 0\\ n_{II}^3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$n_{II}^1 = n_{II}^2 = \lambda$$

$$n_{III}^3 = 0$$

$$\underline{n}_{II} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

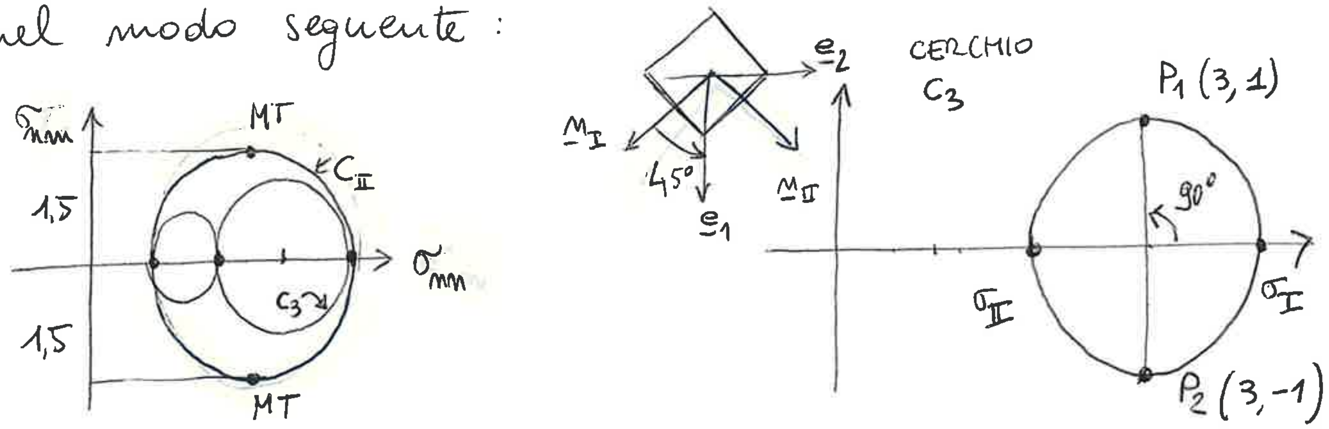


$\underline{n}_{III} \rightarrow \quad \underline{n}_{III} \equiv (0, 0, \pm 1)$.

OSSERVAZIONI

Lo stato tensionale è triassiale perché tutte le 3 tensioni principali sono $\neq 0$.

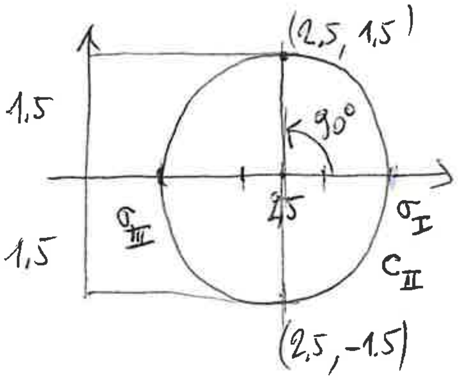
Nel piano di Mohr lo stato tensionale si rappresenta nel modo seguente:

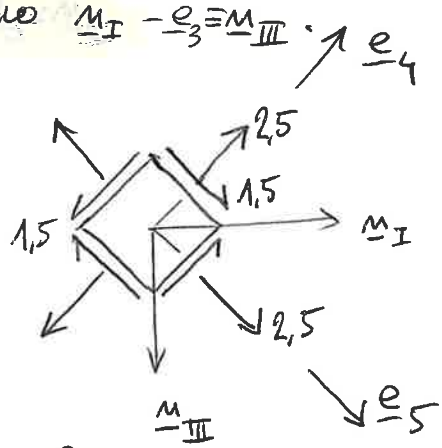


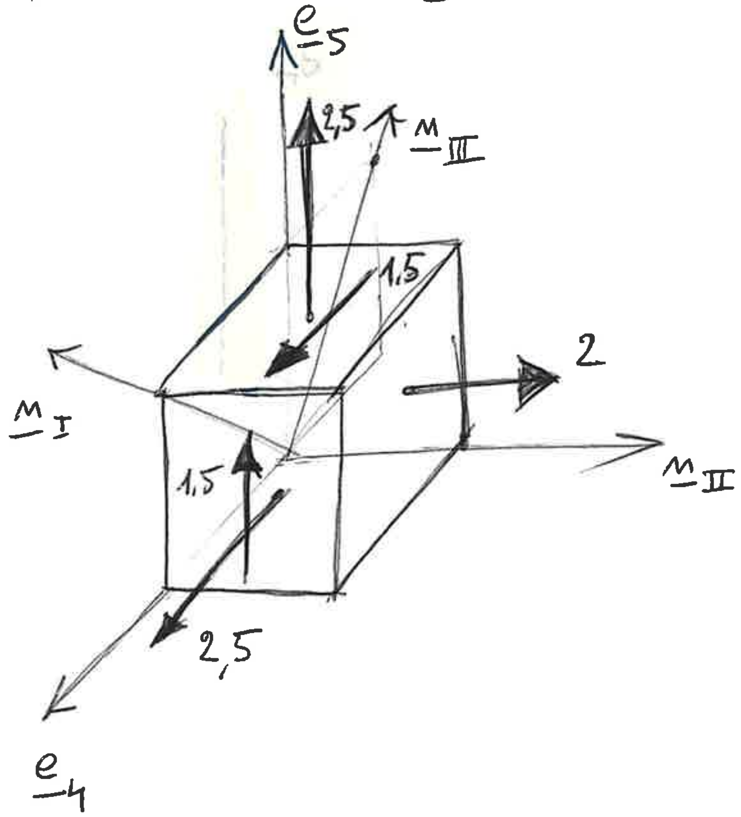
Essendo $\underline{e}_3$ già direzione principale il cerchio C_3 (individuato da $\sigma_{II} = 2$ e da $\sigma_I = 4$) descrive tutti gli stati tensionali relativi alle giaciture aventi normali contenute nel piano $\underline{e}_1$-$\underline{e}_2$ o, equivalentemente, $\underline{n}_I$ - $\underline{n}_{II}$.

La massima tensione tangenziale, tra queste giaciture, si ha proprio per le facce di normale $\underline{e}_1$ (punto nel piano di Mohr P_1) ed $\underline{e}_2$ (P_2 nel piano di Mohr).

Per determinare la giacitura dove è presente la MAX tensione tangenziale (punto MT, $\sigma_{nm}^{MAX} \equiv \tau_{MAX} = 1{,}5 \ N/mm^2$) ci si può riferire al cerchio C_{II} relativo alle giaciture di normale $\in$ al piano $\underline{n}_I - \underline{e}_3 \equiv \underline{n}_{III}$.







Nel sistema $\underline{e}_4, \underline{n}_{II}, \underline{e}_5$ il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ risulta:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2]$$

(Verificare che gli invarianti non cambiano.)

c) $\underset{\sim}{\sigma} = \underbrace{\sigma_m \underset{\sim}{I}}_{\text{IDRO}} + \underbrace{\underset{\sim}{S}}_{\text{DEV.}}$, $\sigma_m = \dfrac{I_1}{3} = \dfrac{7}{3}$ N/mm^2

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\sigma} - \sigma_m \underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

[N/mm^2]

(Rispetto alla base $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) Notare che $I_1(\underline{S}) = S_{11} + S_{22} + S_{33}$
$= 0$.

Rispetto alla base $\underline{u}_I, \underline{u}_{II}, \underline{u}_{III}$:

La parte idrostatica non cambia.

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\sigma} - \sigma_m \underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

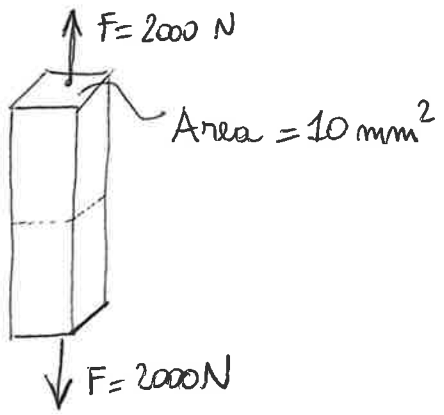
$I_1(\underline{S}) = 0$ [N/mm^2]

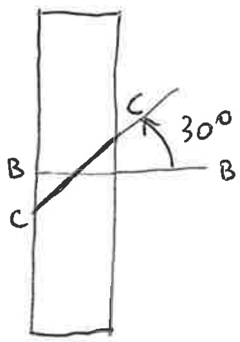
Rispetto alla base $\underline{e}_4, \underline{u}_{II}, \underline{e}_5$:

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\sigma} - \sigma_m \underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$ [N/mm^2]

$I_1(\underline{S}) = 0$

ESERCIZIO



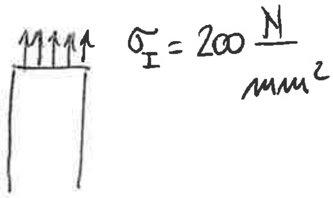


a) Calcolare lo stato tensionale relativo alla giacitura C-C;

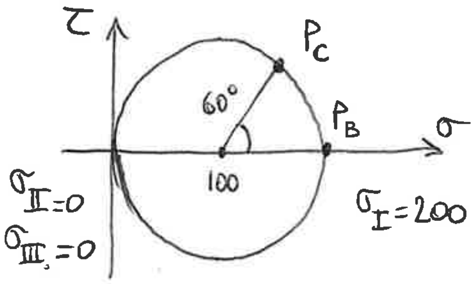
b) Verificare che la forza agente su C-C è sempre F= 2000 N.

SOLUZIONE

a) Stato tensionale relativo a B-B:



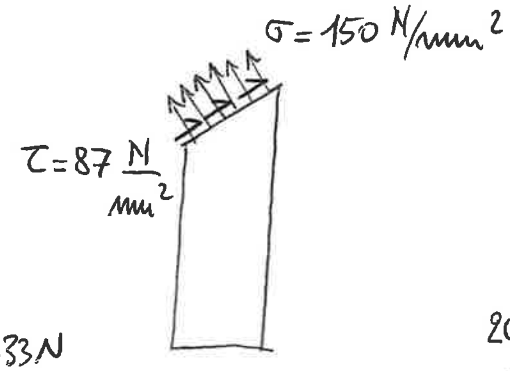
Cerchio di Mohr



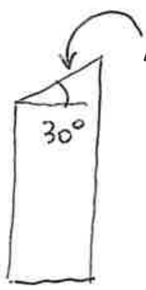
Raggio = 100

Le coordinate di P_C (giac. C-C) sono:

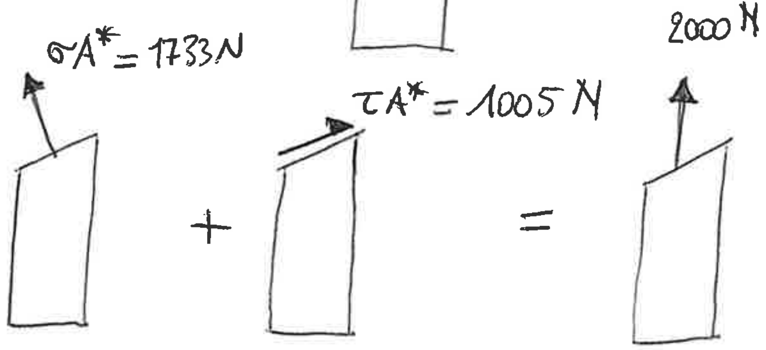
$P_C \equiv (150, 87)$



b)



$A^* = \frac{A}{\cos 30^\circ} = 11.55 \ mm^2$



ESERCIZIO

Si supponga che lo stato di sollecitazione all'interno di un mezzo continuo sia descritto dal tensore:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -Kz & Ky \\ -Kz & 0 & 0 \\ Ky & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $K \in \mathbb{R}$ arbitrario
[(x,y,z) : coordinate cartesiane]

a) Dimostrare che, con forze di volume nulle, le equazioni puntuali di equilibrio (o eq. indefinite di equilibrio) risultano soddisfatte.

b) Calcolare le tensioni principali nel punto $B \equiv (4,2,-1)$.

c) Tracciare i tre cerchi di Mohr.

d) Determinare la Max tensione tangenziale.

SOLUZIONE

a) $\sigma_{ij,j} = 0 \Rightarrow \sigma_{11,x} + \sigma_{12,y} + \sigma_{13,z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(-Kz) + \frac{\partial}{\partial z}(Ky) = 0$

$\sigma_{21,x} + \dots = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-Kz) = 0$

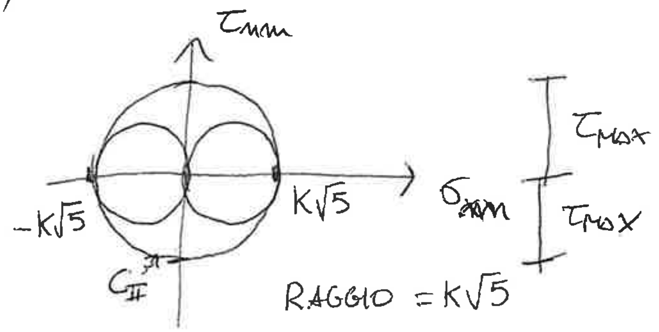
$\sigma_{31,x} + \dots = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(Ky) = 0$ OK!

b) Lo stato tensionale è PIANO o BIASSIALE perché $I_3 = \det \underset{\sim}{\sigma} = 0$ ma $I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma})^2 - \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^2\right] \neq 0$. Ci sarà quindi una tensione principale nulla:

$$(\underset{\sim}{\sigma} \;\sigma_I \underset{\sim}{I})\, n_I = \underline{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma_I & K & 2K \\ K & -\sigma_I & 0 \\ 2K & 0 & -\sigma_I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\sigma_I^3 + 5K^2\sigma_I = 0$$

$\sigma_I = K\sqrt{5}$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -K\sqrt{5}$

c), d)



$\tau_{MAX} = K\sqrt{5}$

La massima tensione tangenziale è $K\sqrt{5}$

Per determinare su quale giacitura si sviluppa è utile notare che la τ_{MAX} si trova sulla circonferenza C_{II} che descrive gli stati tensionali relativi a giaciture aventi l'asse $\underline{n}_{II}$, la direzione principale corrispondente a $\sigma_{II} = 0$, come sostegno.

L'analisi degli autovettori mostra come

$$\underline{n}_{II} \equiv \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$ nella base $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$.

ESERCIZIO

In un punto interno di un corpo il tensore degli sforzi vale
$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)},$$
con σ_{11} quantità variabile reale.

a) Determinare σ_{11} in modo che su qualche giacitura il vettore tensione sia nullo.

b) Definire il versore $\underline{a}$ della normale alla giacitura del punto a).

SOLUZIONE

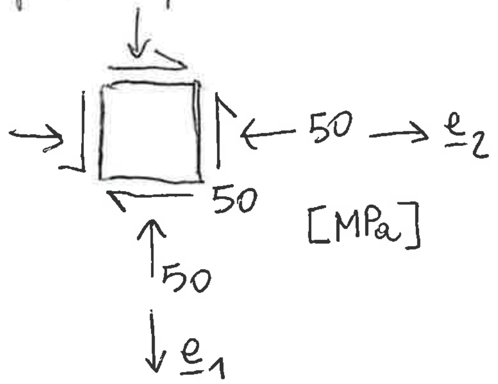
a) Perché l'affermazione sia soddisfatta è necessario che lo stato tensionale sia almeno PIANO o BIASSIALE (può essere anche MONOASSIALE, ma non è detto che la matrice ammetta questa condizione). Quindi imponendo $I_3 = \det \underset{\sim}{\sigma} = 0$ si risolve il problema.
La soluzione è: $\sigma_{11} = 0$.

b) Il versore $\underline{a}$ è la DIREZ. PRINCIPALE relativa all'autovalore $\sigma_I = 0$. Infatti gli autovalori di $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono $\underset{\sigma_{II}}{-\sqrt{5}}, \underset{\sigma_{III}}{\sqrt{5}}, \underset{\sigma_I}{0}$. Quindi chiamando $\underline{a} \equiv \underline{n}_I = (n_I^1, n_I^2, n_I^3)$ si ottiene il sistema
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_I^2 \\ n_I^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n_I^2 = 0 \\ 2n_I^1 + n_I^3 = 0 \end{cases}$$
da cui, dopo la normalizzazione: $\underline{n}_I = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$.

■

ESERCIZIO

Verificare che lo stato tensionale rappresentato in figura è MONOASSIALE. Determinare la direzione principale associata alla tensione principale non nulla.



$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} -50 & -50 & 0 \\ -50 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

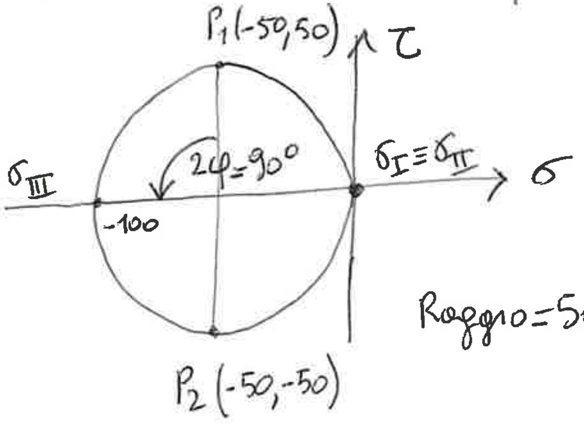
SOLUZIONE

Calcolo tensioni principali:
$$\begin{vmatrix} -50-\sigma_I & -50 & 0 \\ -50 & -50-\sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_I \end{vmatrix} = 0$$

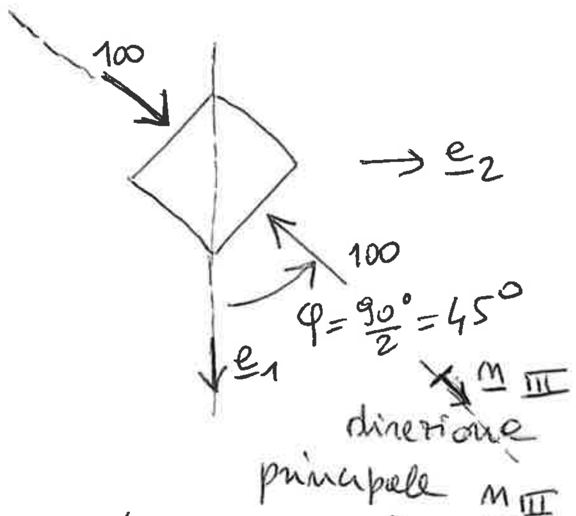
$$-\sigma_I\left[(-50-\sigma_I)^2 - 50^2\right] = 0 \quad ; \quad \sigma_I\left[\cancel{50^2} + \sigma_I^2 + 100\,\sigma_I - \cancel{50^2}\right] = 0$$

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 0 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{III} = -100 \text{ MPa}$$

Metodo delle circonferenze di Mohr



Raggio = 50 MPa



P_1: faccia di normale $\underline{e}_1$

P_2: " " " $\underline{e}_2$

$$\underline{n}_{III} \equiv \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$