

Applicazioni continue

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ è *continua* se $\forall V \subset Y$ aperto in Y si ha $f^{-1}(V) \subset X$ aperto in X .

In altre parole $f: X \rightarrow Y$ è continua \Leftrightarrow le preimmagini tramite f degli aperti sono aperti.

Oss. $f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$. Quindi $f: X \rightarrow Y$ continua $\Leftrightarrow \forall C \subset Y$ chiuso in Y si ha $f^{-1}(C) \subset X$ chiuso in X .

Prop. $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ continue $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ continua.

Dim. Segue subito dal fatto che $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \forall V \subset Z$. \square

Oss. $c: X \rightarrow Y$ costante $\Rightarrow c$ continua.

$\text{id}_X: X \rightarrow X$ continua per ogni spazio topologico X .

$Y \subset X$ sottospazio topologico \Rightarrow mappa d'inclusione $i_Y: Y \hookrightarrow X$ continua.
Restrizioni di applicazioni continue a sottospazi del dominio o del codominio sono continue.

Qualunque $f: X_{\text{dis}} \rightarrow Y$ è continua.

Qualunque $f: X \rightarrow Y_{\text{ban}}$ è continua.

Def. $f: X \rightarrow Y$ è *aperta* se $\forall U \subset X$ aperto in X si ha $f(U)$ aperto in Y .
 $f: X \rightarrow Y$ è *chiusa* se $\forall C \subset X$ chiuso in X si ha $f(C)$ chiuso in Y .

In altre parole $f: X \rightarrow Y$ è aperta $\Leftrightarrow f$ manda aperti in aperti.

$f: X \rightarrow Y$ è chiusa $\Leftrightarrow f$ manda chiusi in chiusi.

Oss. Una costante $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è continua e chiusa, ma non aperta.

$f: X \rightarrow Y$ aperta $\Rightarrow f(X) \subset Y$ aperto.

$f: X \rightarrow Y$ chiusa $\Rightarrow f(X) \subset Y$ chiuso.

$A \subset X$ aperto (risp. chiuso) \Leftrightarrow inclusione $i_A: A \hookrightarrow X$ aperta (risp. chiusa).

Esempio. $\text{id}_{\mathbf{R}}: \mathbf{R}_{\text{dis}} \rightarrow \mathbf{R}$ continua, biiettiva ma l'inversa $\text{id}_{\mathbf{R}}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\text{dis}}$ non è continua.

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ è detta *omeomorfismo* se valgono le seguenti:

- (1) f è biiettiva
- (2) f è continua
- (3) f^{-1} è continua.

Diciamo che X e Y sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ e in tal caso scriviamo $X \cong Y$.

N.B. Gli omeomorfismi si chiamano anche applicazioni *bicontinue*.

Oss. $\text{id}_X : X \rightarrow X$ omeomorfismo per ogni spazio X (stessa topologia).
 $f : X \rightarrow Y$ omeomorfismo $\Rightarrow f^{-1} : Y \rightarrow X$ omeomorfismo.
 $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ omeomorfismi $\Rightarrow g \circ f : X \rightarrow Z$ omeomorfismo.
 L'omeomorfismo è una *relazione d'equivalenza* tra spazi topologici.

Oss. Data $f : X \rightarrow Y$ biiettiva, si ha f^{-1} continua $\Leftrightarrow f$ aperta $\Leftrightarrow f$ chiusa (attenzione, serve biiettiva).
 $f : X \rightarrow Y$ omeo $\Leftrightarrow f$ continua, biiettiva e aperta (o chiusa).

Cor. Per ogni spazio X l'insieme

$$\text{Omeo}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ omeo}\}$$

è un gruppo rispetto a composizione, detto gruppo degli omeomorfismi di X .

N.B. In generale $\text{Omeo}(X)$ è un gruppo molto grande e molto complicato, quasi mai abeliano (a parte alcuni casi banali).

Def. Una proprietà \mathcal{P} è detta *proprietà topologica* se $\forall X, Y$ spazi topologici, X ha \mathcal{P} e $Y \cong X \Rightarrow Y$ ha \mathcal{P} .

In altre parole \mathcal{P} è una proprietà topologica se valendo per uno spazio X vale anche per tutti gli spazi omeomorfi a X , ovvero \mathcal{P} è *invariante* a meno di omeomorfismi. Studieremo in seguito importanti proprietà topologiche.

La *Topologia* studia le proprietà topologiche degli spazi. Uno dei problemi più importanti è: dati due spazi topologici X e Y capire se $X \cong Y$.

Prop. La *metrizzabilità* è una proprietà topologica.

Dim. Diamo solo un'idea, lasciando i dettagli per [Esercizio](#).

X metrizzabile e $Y \cong X \rightarrow \exists d_X$ distanza su X che ne induce la topologia e $\exists f : Y \rightarrow X$ omeo \rightsquigarrow

$$d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbf{R}$$

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$$

distanza su Y che induce la topologia di Y . □

Def. Dati gli spazi X e Y definiamo l'insieme delle applicazioni continue

$$C(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\}.$$

Oss. $C(X, Y) \neq \emptyset$ (contiene almeno le costanti).
 $\text{Omeo}(X) \subset C(X, X)$.

Prop. $f: X \rightarrow Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall V \subset Y$ intorno di $f(x) \in Y, \exists U \subset X$ intorno di x in X t.c. $f(U) \subset V$.

Dim. Non è restrittivo limitarci a considerare solo intorni aperti.

\Rightarrow $\forall V \subset Y$ intorno aperto di $f(x) \Rightarrow x \in U := f^{-1}(V) \subset X$ aperto.

\Leftarrow $\forall V \subset Y$ aperto, se $f^{-1}(V) = \emptyset$ allora è aperto.

Se $f^{-1}(V) \neq \emptyset, \forall x \in f^{-1}(V) \Rightarrow V$ intorno di $f(x)$ in $Y \Rightarrow \exists U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset V \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto in $X \Rightarrow f$ continua. \square

Oss. Nella Prop. possiamo limitarci a considerare intorni U e V aperti e/o basici (se abbiamo preventivamente fissato basi di intorni in X e Y). La dimostrazione richiede solo piccole modifiche.

Continuità negli spazi metrici

Cor. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Allora $f: X \rightarrow Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X$ si abbia che

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dim. Segue subito dalla Prop. e dall'Oss. usando come intorni basici le bocce aperte $V = B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ e $U = B_{d_X}(x_0, \delta)$. \square

Oss. In generale δ dipende da x_0 e da ε .

La definizione di funzione continua generalizza quella studiata in Analisi. Le funzioni reali di variabili reali la cui continuità è nota dall'Analisi saranno considerate continue senza bisogno di dimostrazione.

Oss. Applicazioni affini reali $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, f(x) = Ax + b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ e $b \in \mathbf{R}^m$, sono continue.

Idem per applicazioni affini complesse $\mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^m$.

Affinità reali $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, f(x) = Ax + b$ con $A \in GL_n(\mathbf{R})$ e $b \in \mathbf{R}^n$, sono omeomorfismi (l'inversa è anch'essa affinità quindi continua).

Idem per affinità complesse $\mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$.

In particolare, per $b = 0$, le applicazioni lineari $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ sono continue e gli automorfismi lineari $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ sono omeomorfismi (idem su \mathbf{C}).

Esempio. $\exp: \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[, \exp(x) = e^x$ è continua e infatti è omeo con inversa $\log:]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$, pure essa continua $\Rightarrow \mathbf{R} \cong]0, +\infty[$.

$g:]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[, g(x) = \frac{x}{1-x}$ omeo con inversa $g^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$.

$$]0, 1[\cong]a, b[\cong]a, +\infty[\cong]-\infty, a[\cong \mathbf{R}.$$

$$]0, 1[\cong]a, b[\cong]a, b[\cong]0, +\infty[\cong]a, +\infty[\cong]-\infty, a[.$$

$$]0, 1[\cong]a, b[\text{ ma }]0, 1[\not\cong \mathbf{R} \text{ (lo vedremo più avanti).}$$