3 ottobre

<u>Teor</u> $\sup \mathbb{N} = +\infty$

<u>Dim</u> ~~Supponiamo~~ per assurdo che $\sup \mathbb{N} < +\infty$

Allora so che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. S!!

$$S - \frac{1}{2} < n \qquad +1$$

$$S + \frac{1}{2} < n + 1 \leq S \implies \cancel{S} + \frac{1}{2} < \cancel{S}$$

$$\Downarrow$$

Quindi $S \in \mathbb{R} \implies$ assurdo. $\qquad \frac{1}{2} < 0$ falsa.

$\boxtimes$

E allora non resta che $\boxed{S = +\infty}$

Corollario (Principio di Archimede) Data una coppia qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}_+$ $\left(\mathbb{R}_+ = (0, +\infty) \right)$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n x > y$$

Dim Se considero il rapporto $\frac{y}{x}$ so che $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{y}{x}$.

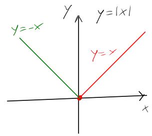
(se fosse $n \leq \frac{y}{x}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ allora $\frac{y}{x}$ sarebbe un maggiorante di $\mathbb{N}$ e quindi $\sup \mathbb{N} \leq \frac{y}{x} < +\infty$

$\Rightarrow$ $\sup \mathbb{N} < +\infty$, assurdo perché sappiamo che $\sup \mathbb{N} = +\infty$)

Esercizi 0.6.8 e 0.6.9

Def $|x| : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ è definita da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Osservazione. Vale $|x| = \sqrt{x^2}$

Proprietà 0.6.6

(1) $|x| \geq 0$

(2) $|x| = 0 \iff x = 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leq x \leq |x|$

Teorema 0.6.8. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Valgono:

1) $|a|^2 = a^2$ (segue da $|a| = \sqrt{a^2}$)

2) $|ab| = |a|\,|b|$

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (disug. triangolare)

Dim di 2) e 3)

2) $|ab|^2 = (ab)^2 = a^2 b^2 = |a|^2 \, |b|^2$

$|ab|^2 = |a|^2 \, |b|^2$ Applico $\sqrt{}$

$|ab| = |a| \, |b|$

3)
$$\begin{aligned} |a+b|^2 = (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &\leq a^2 + b^2 + 2|ab| \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\,|b| \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Concludiamo $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$

Prendendo radice quadrata $|a+b| \leq |a| + |b|$

Esercizio Dimostrare che $\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lemma Vale quanto segue, per un $a \overset{(>)}{\geq} 0$

$|x| \overset{(<)}{\leq} a \iff -a \overset{(<)}{\leq} x \overset{(<)}{\leq} a$

__Definizione__ Una successione di elementi di un insieme X è una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

__Osservazione__ Dato un insieme X ~~base~~ generica successione in X viene denotata $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{x_n\}$.

Esempio

$\{n\}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f(n) = n$

$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ $\quad f(n) = \frac{1}{n+1}$

$\{(-1)^n\}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ $\quad f(n) = (-1)^n$

__Def__ Date due insiemi non vuoti X e Y, una funzione, definita in X ed a valori in Y, è una legge che assegna ad ogni $x \in X$ esattamente un valore $y \in Y$. Generalmente si scrive che $y = f(x)$ e

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n \quad \text{non esiste.}$$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\sup X = +\infty$.

Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e dato un numero $L \in \mathbb{R}$ diremo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

(abbreviazione di: L e' il limite di f per x che va a $+\infty$)

se vale quanto segue:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \in \mathbb{R} \ \text{t.c.}\ x > K_\varepsilon \ (\text{e } x \in X) \implies |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Es $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

(qui $\sup(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = +\infty$)

Va dimostrato che

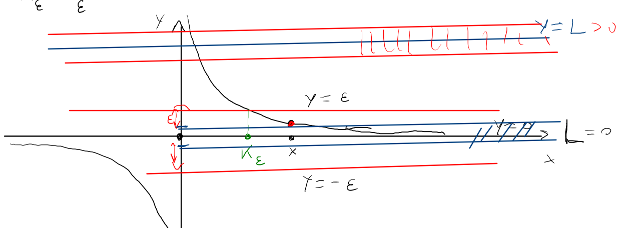
$$(*) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon > 0 \ \text{t.c.}\ x > K_\varepsilon \implies \frac{1}{x} < \varepsilon}$$

$\frac{1}{x} < \varepsilon$ $\qquad$ (qui $x > 0$) $\qquad \cdot \frac{x}{\varepsilon} > 0$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{\varepsilon} < x$

Per $K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ vale $(*)$.



$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^{+} \qquad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; K_\varepsilon \; \text{t.c.} \quad n > K_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad , \quad \frac{n}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n \qquad K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$$

Esercizi sezione 0.6