Variabili Aleatorie e Misurabilità

Variabili Aleatorie

- Idea:
  - per un dato esperimento aleatorio rappresentato da Ω, si possono calcolare diverse quantità, o enti, che dipendono dal risultato del esperimento
  - formalmente, si tratta di applicazioni

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{variabile aleatoria}$$
$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad \text{vettore di variabili aleatorie}$$
$$X : \Omega \to E \qquad \text{ente aleatorio a valori in } E$$

  - il vero $\omega \in \Omega$ che si realizza non è noto, quindi non è noto $X(\omega)$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, definire le seguenti variabili aleatorie: risultato del primo e del secondo dado; somma, prodotto, massimo, minimo, scarto fra i due dadi

- Esercizio. Infiniti lanci di una moneta, definire le seguenti variabili aleatorie: X_n =1 se esce T al lancio n-esimo, 0 altrimenti; T_n = numero di T nei primi n lanci; D_n = differenza tra il numero di T e C nei primi n lanci; C_n = numero massimo di T consecutive nei primi n lanci

Misurabilità

- Per varie ragioni, solo applicazioni misurabili possono essere considerate
  - $(\Omega, \mathscr{F})$, $(\Omega', \mathscr{F}')$ due spazi misurabili
  - $f : \Omega \to \Omega'$ è $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ misurabile se

$$f^{-1}(A') \in \mathscr{F} \text{ per ogni } A' \in \mathscr{F}'$$

$\rightsquigarrow$ ogni controimagine di insiemi in $\mathscr{F}'$ è in $\mathscr{F}$

  - controimagine di A' tramite f:

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in A'\} \subset \Omega$$

Misurabilità

- [Commutabilità della controimagine]
  $f : \Omega \to \Omega'$, $A' \subset \Omega'$, $(A'_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \Omega'$
  - $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
  - $f^{-1}(\Omega') = \Omega$
  - $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$
  - $f^{-1}(\cup_\alpha A'_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$
  - $f^{-1}(\cap_\alpha A'_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$

Misurabilità

- Esercizio. Esempi/osservazioni su applicazioni misurabili
  - $f : \Omega \to \Omega'$ applicazione costante: fissato $\bar{\omega}' \in \Omega'$, $f(\omega) = \bar{\omega}'$ per ogni $\omega \in \Omega$; è sempre misurabile
  - $\Omega = \Omega'$, f applicazione identica: $f(\omega) = \omega$; quando è misurabile?
  - $f : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ misurabile allora è anche $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$ misurabile per ogni $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}, \mathscr{G}' \subset \mathscr{F}'$
  - ogni $f : \Omega \to \Omega'$ è $2^{\Omega}/\mathscr{F}'$ e $\mathscr{F}/\{\varnothing, \Omega'\}$ misurabile

Misurabilità

- $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\mathscr{F}$ σ-algebra in Ω
  - se la σ-algebra di riferimento in $\mathbb{R}^m$ è $\mathscr{B}^m$ (scelta usuale) e si dice semplicemente: f è $\mathscr{F}$-misurabile
  - se anche $\Omega = \mathbb{R}^n$ e la σ-algebra è $\mathscr{F} = \mathscr{B}^n$ (scelta usuale) si dice semplicemente: f è misurabile

Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - variabile aleatoria: una applicazione
    $$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
    $\mathscr{F}$ misurabile
  - vettore aleatorio: una applicazione
    $$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$
    $\mathscr{F}$ misurabile
  - un ente aleatorio è una applicazione
    $$X : \Omega \to E$$
    $\mathscr{F}/\mathscr{E}$ misurabile, con $\mathscr{E}$ σ-algebra su E

Variabili Aleatorie

- X variabile aleatoria su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$
  - per ogni Boreliano $B \in \mathscr{B}$,

    $$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$$

  - notazione:

    $$X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \text{“}X \text{ appartiene a } B\text{”}$$

  - perché si richiede la misurabilità? si può calcolare

    $$P(X^{-1}(B)) = P(\{X \in B\}) = P(X \in B)$$

    (si possono omettere le parentesi)

Variabili Aleatorie

- Esempio. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $A \subset \Omega$ l'indicatore di A è

$$1_A : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad 1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin A \\ 1 & \text{se } \omega \in A \end{cases}$$

  - 1 se A è V, 0 se A è F
  - è una variabile aleatoria $\iff A \in \mathscr{F}$

- Esercizio. Scrivere tramite 1_A e 1_B i seguenti indicatori: $1_{\bar{A}}, 1_{A \cup B}, 1_{A \cap B}, 1_{A-B}, 1_{A \triangle B}$

Variabili Aleatorie

- Su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$
  - X variabile aleatoria semplice se prende un numero finito di determinazioni ($X(\Omega)$ finito); tutte e sole le variabili aleatorie del tipo
  $$X = \sum_{i=1}^{m} c_i 1_{A_i}$$
  con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, m$
  - X variabile aleatoria discreta se prende al più un numerabile di determinazioni
  $$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$
- In uno spazio di probabilità finito (discreto) tutte le variabili aleatorie sono semplici (discrete)

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili
  - [Criterio standard di misurabilità] $(\Omega, \mathscr{F})$, $(\Omega', \mathscr{F}')$ con
    $\mathscr{F}' = \sigma(\mathscr{C}')$
    $f : \Omega \to \Omega'$ tale che

    $$f^{-1}(A') \in \mathscr{F} \text{ per ogni } A' \in \mathscr{C}'$$

    allora f è $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ misurabile
    Prova: mostrare che la classe dei "buoni insiemi"

    $$\mathscr{G}' = \{A' \subset \Omega' | f^{-1}(A') \in \mathscr{F}\}$$

    è una σ-algebra su Ω'

Misurabilità

- [Criterio standard di misurabilità (II)]
  - $f : \Omega \to \mathbb{R}$, se
$$f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathscr{F} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}$$
    allora f è $\mathscr{F}$ misurabile
  - $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, se
$$f^{-1}((-\infty, a_1] \times \ldots \times (-\infty, a_n]) \in \mathscr{F} \text{ per ogni } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$
    allora f è $\mathscr{F}$ misurabile
- Esercizio. verificare che sono misurabili
  - $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $g(x) = \cos x$
  - $f(x,y) = (x+y, x, y)$

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili
  - [Composizione] $(\Omega, \mathscr{F})$, $(\Omega', \mathscr{F}')$, $(\Omega'', \mathscr{F}'')$

$$f : \Omega \to \Omega', \qquad g : \Omega' \to \Omega''$$

se f $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ misurabile, g $\mathscr{F}'/\mathscr{F}''$ misurabile, allora

$$g \circ f : \Omega \to \Omega'', \qquad g \circ f(\omega) = g(f(\omega))$$

è $\mathscr{F}/\mathscr{F}''$ misurabile

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili
  - [Operazioni fra funzioni misurabili] $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$ misurabili, allora

$$\begin{aligned} & f+g, \qquad f \cdot g, \qquad c \cdot f \qquad (c \in \mathbb{R}) \\ & \max\{f,g\}, \qquad \min\{f,g\} \\ & \frac{1}{f} \qquad (\text{se } f(\omega) \neq 0 \text{ per ogni } \omega \in \Omega) \end{aligned}$$

    sono $\mathscr{F}$ misurabili

Misurabilità

- Variabili aleatorie estese: a volte conviene considerare applicazioni che prendono valori $+\infty$ e/o $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

(convenzione: $-\infty \le x \le +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$)

  - Esempio. infiniti lanci di una moneta: W tempo di attesa per la prima T
  - σ-algebra dei Boreliani su $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathscr{B}} = \sigma(\{[-\infty, a] | \, a \in \overline{\mathbb{R}}\})$$

si ottengono tutti i Boreliani di $\mathbb{R}$ a cui si aggiungono uno o entrambi i simboli $+\infty$, $-\infty$

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili; $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$ misurabile per ogni $n \geq 1$
  - allora
  $$\sup_n f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \inf_n f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$
    sono $\mathscr{F}/\overline{\mathscr{B}}$ misurabili
  - riesce
  $$\begin{aligned} E_1 &= \{\omega \in \Omega | \lim_n f_n(\omega) \text{ esiste in } \mathbb{R}\} \in \mathscr{F} \\ E_2 &= \{\omega \in \Omega | \lim_n f_n(\omega) \text{ esiste in } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathscr{F} \end{aligned}$$
  - se $P(E_1) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathscr{F}/\mathscr{B}$ misurabile
    se $P(E_2) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathscr{F}/\overline{\mathscr{B}}$ misurabile

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili
  - [Restrizione] $f : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ misurabile, $D \in \mathscr{F}$; la restrizione
  $$f_D : D \to \Omega', \qquad f_D(\omega) = f(\omega)$$
  è $\mathscr{F}_D / \mathscr{F}'$ misurabile, dove
  $$\mathscr{F}_D = \{A \cap D \,|\, A \in \mathscr{F}\}, \qquad (\sigma\text{-algebra traccia})$$
  inoltre, se $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$, allora
  $$\mathscr{F}_D = \sigma(\{C \cap D \,|\, C \in \mathscr{C}\})$$
  - $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ con $D \in \mathscr{B}^n$, la σ-algebra da considerare in D è
  $$\mathscr{B}^n_D = \sigma(\{I \cap D \,|\, I \text{ iper-rettangoli}\})$$
  $\rightsquigarrow$ Boreliani su D (σ-algebra di riferimento in D)

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili
  - [Ricomposizione] $\mathbb{P} = (D_n)_{n \geq 1}$ partizione discreta di Ω,
$$f_n : D_n \to \Omega'$$
$\mathscr{F}_{D_n}/\mathscr{F}'$ misurabile per ogni $n \geq 1$, allora
$$f : \Omega \to \Omega', \qquad f(\omega) = \begin{cases} f_1(\omega) & \text{se } \omega \in D_1 \\ f_2(\omega) & \text{se } \omega \in D_2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$
è $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ misurabile
  - Esercizio. Mostrare che è misurabile
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y > 0 \\ \sqrt{-x-y} & \text{se } x+y \leq 0 \end{cases}$$

Misurabilità

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  - [Funzioni vettoriali]

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

    con $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, è misurabile se e solo se ogni f_i è misurabile

  - [Continuità implica misurabilità]
    se l'insieme dei punti di discontinuità di f è discreto, allora f è misurabile

- Tutte le funzioni di uso pratico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ sono misurabili

Variabili Aleatorie

- Operazioni con variabili aleatorie, purché ben definite, portano a nuove variabili aleatorie
    - se X, Y, $(X_n)_{n\geq 1}$ sono variabili aleatorie, tali sono

$$c\cdot X\,(c\in\mathbb{R}),\, X+Y,\, X\cdot Y,\, \frac{X}{Y}, \max\{X,Y\}, \min\{X,Y\}$$

$$\sup_n X_n,\, \inf_n X_n,\, \lim_n X_n,\, \sum_n X_n$$

$$f(X) \text{ con } f \text{ misurabile: } \mathrm{e}^X, \log X, X^\alpha, \ldots$$

    - se $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ vettore aleatorio, $X\in D$ q.c. $(D\in\mathscr{B}^n)$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ misurabile, allora $f(X)$ è un (ben definito) vettore aleatorio

σ-Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- Come definire l'informazione risultante dall'osservazione di una o più variabili aleatorie?

  - σ-algebra generata da una famiglia di funzioni

  - misurabilità di una variabile aleatoria rispetto alla σ-algebra generata equivale alla possibilità di ottenere (funzionalmente) la variabile aleatoria da quelle generanti la σ-algebra

σ-Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, $f_\alpha : \Omega \to \Omega'_\alpha$, $\mathscr{F}'_\alpha$ σ-algebra in Ω'_α;
  la σ-algebra generata da f_α, $\alpha \in I$ è

$$
\begin{aligned}
\sigma(f_\alpha, \alpha \in I) = & \cap \{\mathscr{G} \mid \mathscr{G}\ \sigma\text{-algebra su } \Omega, \\
& \qquad f_\alpha \text{ è } \mathscr{G}/\mathscr{F}'_\alpha \text{ misurabile per ogni } \alpha \in I\} \\
= & \sigma(\{f_\alpha^{-1}(A') \mid A' \in \mathscr{F}'_\alpha, \alpha \in I\})
\end{aligned}
$$

σ-Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : \Omega \to \Omega'_\alpha$, $\mathscr{F}'_\alpha$ σ-algebra in Ω'_α
  $\mathscr{F} = \sigma(f_\alpha, \alpha \in I)$ è la più piccola σ-algebra su Ω che rende f_α $\mathscr{F}/\mathscr{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$:
  - $\mathscr{F}$ è una σ-algebra su Ω
  - f_α è $\mathscr{F}/\mathscr{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$
  - per ogni σ-algebra $\mathscr{G}$ su Ω tale che f_α è $\mathscr{G}/\mathscr{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$, è $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$

σ-Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- Nel caso di un'unica applicazione l'espressione si semplifica $f : \Omega \to \Omega'$, $\mathscr{F}'$ σ-algebra in Ω'; la σ-algebra generata da f è

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \cap\,\{\mathscr{G} \,|\, \mathscr{G}\ \sigma\text{-algebra su } \Omega,\ f \text{ è } \mathscr{G}/\mathscr{F}' \text{ misurabile}\}\\ &= \{f^{-1}(A') \,|\, A' \in \mathscr{F}'\}\end{aligned}$$

è la più piccola σ-algebra su Ω che rende f misurabile

Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - X variabile aleatoria

$$\sigma(X) = \{\{X \in B\} | B \in \mathscr{B}\}$$

informazione data dall'osservazione di X

  - $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ variabili aleatorie

$$\sigma(X_\alpha, \alpha \in I) = \sigma(\{\{X_\alpha \in B\} | B \in \mathscr{B}, \alpha \in I\})$$

informazione data dall'osservazione di ogni X_α, $\alpha \in I$

Variabili Aleatorie

- [misurabilità $\equiv$ costanza sugli atomi] $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$ misurabile, $A \neq \varnothing$ atomo di $\mathscr{F}$, cioè

$$\text{se } B \in \mathscr{F}, B \subset A \Rightarrow B = \varnothing \text{ o } B = A$$

  allora f è costante su A

- [misurabilità rispetto a partizioni] $\mathbb{P}$ partizione discreta di Ω, $\mathscr{F} = \sigma(\mathbb{P})$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è $\mathscr{F}$ misurabile se e solo se f è costante su ognuno degli atomi di $\mathbb{P}$

Variabili Aleatorie

- Esempio.
  - $\sigma(1_A) = \sigma(\{A, \bar{A}\}) = \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$
    f è $\sigma(1_A)$ misurabile se costante su A e $\bar{A} \Longleftrightarrow f$ è funzione di 1_A
  - X variabile aleatoria discreta con determinazioni $x_1, x_2, \ldots$

    $$\sigma(X) = \sigma(\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots \{X = x_n\}, \ldots\})$$

    se Y è $\sigma(X)$ misurabile $\Longleftrightarrow Y$ è funzione di X

Variabili Aleatorie

- [misurabilità rispetto variabili aleatorie]
  $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$
  sono equivalenti

  1. Y è $\sigma(X)$ misurabile
  2. $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$
  3. esiste una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ misurabile tale che
  $$Y = g(X)$$

- Y è $\sigma(X)$ misurabile: significa che si può calcolare Y partendo da X

Variabili Aleatorie

- Esercizio. $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie,

$$\begin{aligned} Y_1 =& X_1 \\ Y_2 =& X_1 + X_2 \\ &\dots\dots \\ Y_n =& X_1 + \dots + X_n \end{aligned}$$

  mostrare che

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$$

- Esercizio. X e Y sono variabili aleatorie su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $c \in \mathbb{R}$; mettere in ordine crescente di inclusione

$$\mathscr{F}, \sigma(X, X+Y), \sigma(|X|), \sigma(X), \sigma(X+Y, X-Y),$$
$$\sigma(X^2), \sigma(X, Y), \{\varnothing, \Omega\}, \sigma(X+c), \sigma(X, X^2 - Y^2).$$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado; $Z = X_1 + X_2$, $W = X_1 \cdot X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; dire quali delle seguenti relazioni sono V o F

  1. $\sigma(X_1.X_2) = \sigma(Z, W)$
  2. $\sigma(X_1.X_2) = \sigma(U, V)$
  3. $\sigma(Z, U) = \sigma(Z, V)$
  4. $\sigma(X_1 - X_2) = \sigma(V - U, 1_{\{X_1 > X_2\}})$
  5. $\sigma(X_1, U) = \sigma(X_2, V)$
  6. $\sigma(Z) \cap \sigma(W) = \{\varnothing, \Omega\}$
  7. $\sigma(U) \cap \sigma(V) = \{\varnothing, \Omega\}$