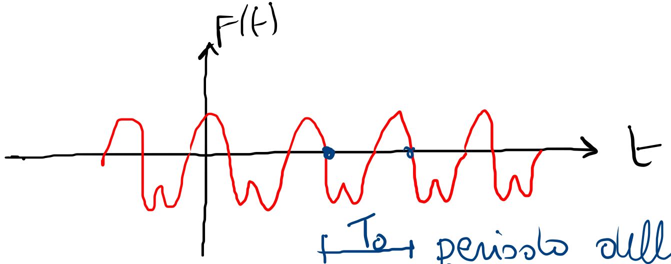
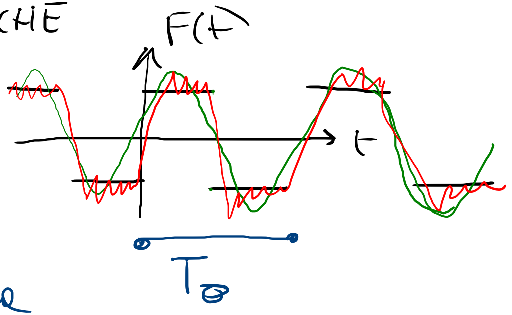
FORZANTI PERIODICHE GENERICHE

MDOS, 5/12/23





$$F(t+kT_0) = F(t) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$T_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

SERIE DI FOURIER

costanti

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} F(t)\,dt$$

$$\left.\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix}\right\rangle = \frac{2}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} F(t) \begin{matrix} \cos(n\omega_0 t) \\ \sin(n\omega_0 t) \end{matrix} \, dt$$

SI USA DI SOLITO CONSIDERARE UN NUMERO FINITO DI TERMINI

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{N} \left[\qquad \right]$$

La risposta dell'oscillatore si ottiene sovrapponendo le risposte delle singole armoniche:

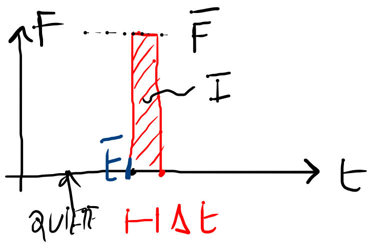
$$x(t) = e^{-\nu\omega t}(C_1 \sin\omega_D t + C_2 \cos\omega_D t) + \underbrace{\frac{F_0}{K} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]}_{x_{part}}$$

COEFF DA DETERMINARE

INTEGRALE DI DUHAMEL

Fornisce la risposta dinamica di un oscillatore eccitato da una generica forzante $F(t)$

FORZA IMPULSO



$$I = \int F\,dt$$

IMPULSO

$$I = \bar{F}\,\Delta t$$

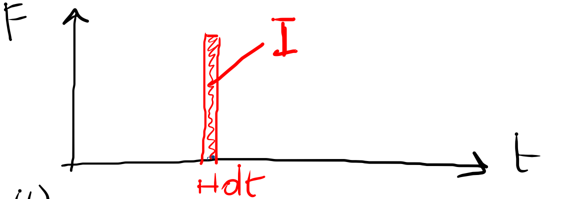
$$I = \underbrace{\Delta Q}_{\text{VARIAZ. QUANTITÀ DI MOTO}}$$

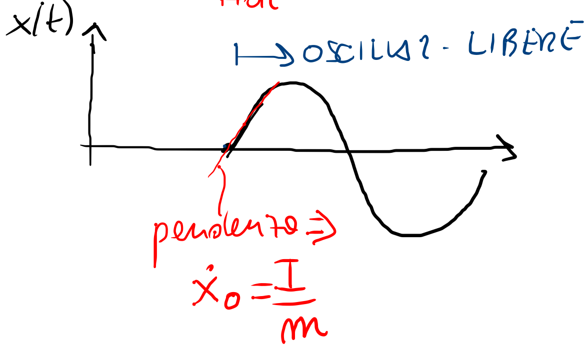
TEOREMA DELL'IMPULSO

$$I = m\dot{x}(\bar{t}+\Delta t)$$

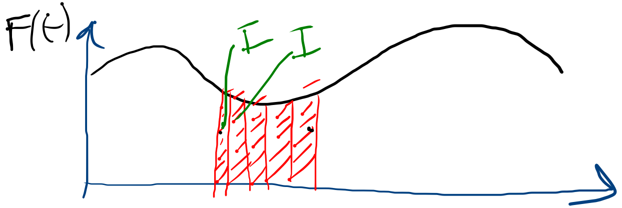
$$\dot{x}(\bar{t}+\Delta t) = \frac{I}{m}$$

; se il sistema è in quiete al tempo $\bar{t}$ e assegno un impulso $I(\bar{t}^+) \longrightarrow \dot{x}(\bar{t}^+) = \frac{I}{m}$

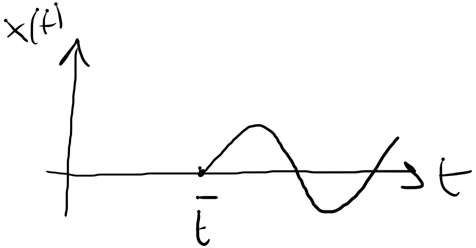




RISPOSTA OSCILLATORE



La risposta del sistema è data dalla somma delle risposte dei singoli impulsi.



$$x(t) = e^{-\nu\omega(t-\bar t)}\left[B_1 \sin\omega_D(t-\bar t) + B_2\cos\omega_D(t-\bar t)\right] \qquad \boxed{t \geq \bar t}$$

CONDIZ. INIZIALI $\begin{cases} x(\bar t)=0 \\ \dot x(\bar t) = \dfrac{I}{m}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{I}{m\omega_D} \\ B_2 = 0\end{cases}$

$$x(t) = e^{-\nu\omega(t-\bar t)}\,\frac{I}{m\omega_D}\sin\omega_D(t-\bar t) \qquad (t \geq \bar t)$$

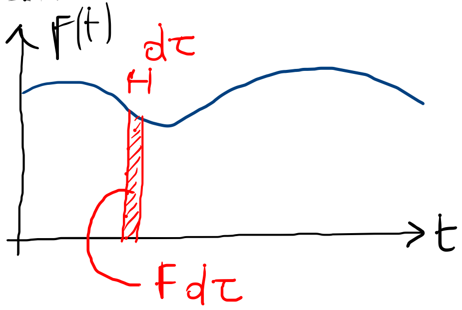
FUNZIONE DI RISPOSTA AD UN IMPULSO UNITARIO $\quad h(t-\bar t) = x(t)\big|_{I=1}$

$$h(t-\bar t) = \frac{1}{m\omega_D}\, e^{-\nu\omega(t-\bar t)} \sin\omega_D(t-\bar t)$$

$$x(t) = I\, h(t-\bar t)$$

$$x(t) = \int_0^t \underbrace{F\,d\tau}_{I}\; h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

INT. DI DUHAMEL



t: tempo al quale voglio studiare la risposta dell'oscill.

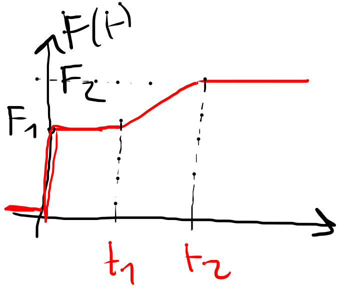
τ: variabile di integrazione $\tau \in [0,t]$

OSS: • se $\nu = 0$; $x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$

• se $F(\tau) = F \sin\bar{\omega}\tau \implies$ L'INT DI DUHAMEL DEVE DARE LA STESSA SOLUZIONE DI QUELLA ESPLICITA.

• SOLUZ. DELL'INTEGRALE SI OTTENGONO PER SEMPLICI FUNZIONI $F(\tau)$

Nel caso in cui la forzante segue una legge di questo tipo:

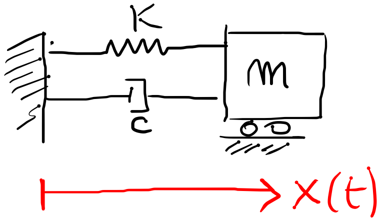


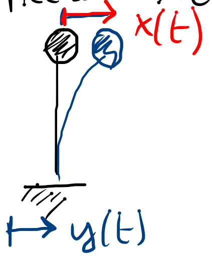
1) STUDIO IL PROBLEMA CON $F(t) = F_1$ per $t \in [0, t_1]$ (ANCHE SE NON LO ABBIAMO VISTO, ∃ SOLUZ. PER FORZE A GRADINO)

2) per $t \in [t_1, t_2]$ STUDIO UN NUOVO PROBLEMA CON $F(t) = \alpha t + \beta$ e CON x_0 e $\dot{x}_0$ DERIVANTI DAL PROBLEMA PRECEDENTE

3) per $t > t_2$ ... ANALOGO A SOPRA CON $F(t) = F_2$

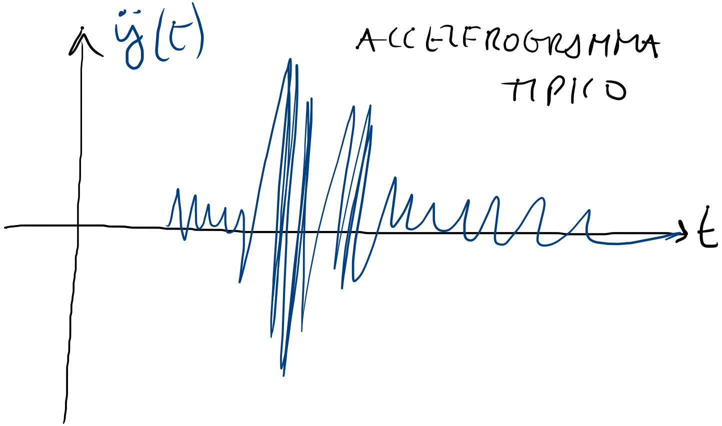
OSCILLATORE CON MOTO IMPRESSO ALLA BASE





$\rightarrow y(t)$: MOTO DELLA BASE (O DEL TERRENO)

RIF. ASSOLUTO



ACCELEROGRAMMA TIPICO

$$\underbrace{m(\ddot{y}+\ddot{x})}_{\text{ACCELERAZ. DELLA MASSA}} = -Kx - c\dot{x}$$

EQ DELLA DINAMICA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \underbrace{-m\overbrace{\ddot{y}(t)}^{\text{ACCELEROGRAMMA}}}_{\text{FORZANTE ESTERNA } F(t)}$$