INTRODUZ. AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

12/3/24

MASSIMO
MINIMO

PROBL. DI INGEGNERIA SI RISOLVONO RICERCANDO VALORI ESTREMALI DI ESPR. INTEGRO-DIFFERENZIALI CHE CONTENGONO UNA O PIÙ FUNZ. INCOGNITE (E ANCHE LE LORO DERIVATE).

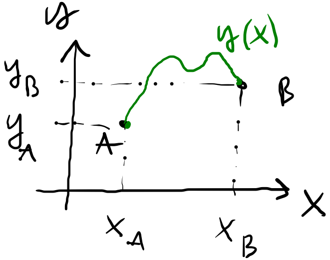
IN UN DOMINIO 1D, AMMETTIAMO CHE LA SOLUZ. SI POSSA RAPPRES. CON UNA FUNZ. $y = f(x)$, L'ESPR. INTEGRO-DIFF. LA POSSIAMO SCRIVERE COME

$$I(y) = \int_{x_A}^{x_B} F(x; y, y', y'', \dots)\, dx$$

$I(y)$: FUNZIONALE = "FUNZIONE DI FUNZIONE"

(AD OGNI FUNZ. $y(x) \Longrightarrow I \in \mathbb{R}$)

ES.

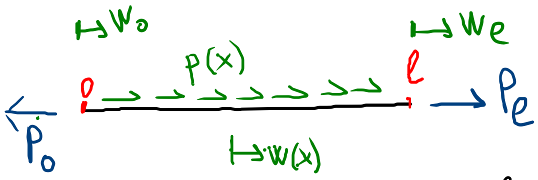


LUNGH. CURVA PIANA DA A e B:

$$I = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

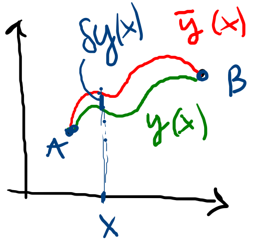
"FRA TUTTE LE CURVE $y(x)$ CONTINUE e CON $y'(x)$ CONTINUE TROVARE QUELLA CHE MINIMIZZA I"

ES EN. POT. TOTALE DI UNA BIELLA

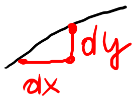


$$\Pi(w)=\underbrace{\int_0^l \frac{1}{2} EA\, w'^2(x)}_{\Phi\ \text{EN. POTENZ. ELASTICA}} \underbrace{- \int_0^l p\, w\, dx - P_l w_l + P_0 w_0}_{-\ \text{POT. CARICHI ESTERNI}} = \int_0^l \frac{1}{2} EA w'^2 - pw\, dx - [Pw]_0^l$$

CONCETTO DI "VARIAZIONE" $\bar{y}(x)$ è PROSSIMA a $y(x)$; $\underbrace{\delta y}_{\text{VARIAZ.}}(x)=\bar{y}(x)-y(x)$; $\delta y(x_A)=0=\delta y(x_B)$



$$\boxed{\delta y \overset{?}{\text{vs}} dy}$$



PROPRIETÀ DI δy

$$\frac{d}{dx}(\delta y)=\frac{d}{dx}(\bar{y}-y)=\bar{y}'-y'=\delta y'$$

$$\int_{x_A}^{x_B}\delta y\, dx=\delta\int_{x_A}^{x_B} y\, dx$$

VARIAZ. INDOTTA NELLA FUNZ. INTEGR.

$F(x;y,y')$ $\qquad I(y)=\int F(x;y,y')\,dx$

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

(x è FISSATO SE OPERO UNA VARIAZIONE)

LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (NEL CASO DI UNA FUNZ. DEFINITA NEL DOM $x_A \leq x \leq x_B$)

SE $\underbrace{\int_{x_A}^{x_B} y(x)\, \delta y(x)\, dx = 0, \ \forall \delta y}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{y(x) = 0 \text{ NEL DOMINIO } [x_A, x_B]}$

$I = \int_{x_A}^{x_B} F(x; y, y')\, dx$; c. ai limiti $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$

CONDIZ. DI STAZ. DI I $\Longrightarrow$ $\boxed{\delta I = 0 ; \ \forall \delta y}$ $\triangle$ $\Longrightarrow$ SOLUZ. DEL PROBL. $y^*(x)$

δI ? $\delta I = \int_{x_A}^{x_B} \delta F \, dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \, dx$

$\triangle$: $\boxed{\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \, dx = 0 \ ; \ \forall \delta y}$

ELABORO IL I MEMBRO INTEGRANDO PER PARTI.

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_A}^{x_B} - \int \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y \, dx \qquad \int f g' = [fg] - \int f' g$$

$$\triangle \quad \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y \right) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_A}^{x_B} = 0 \;;\; \forall \delta y \implies$$

OSSERVO CHE $\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$ E QUINDI $[\quad] = 0 \; (\forall \delta y)$

RISCRIVO L'INTEGR $\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right) \delta y \, dx = 0, \; \forall \delta y$; MA PER IL LEMMA FOND. DEL CALCOLO DELLE VARIAZ. $\implies$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$

EQ. DI EULERO – LAGRANGE DEL PROBLEMA VARIAZIONALE

CON LE C. AI LIMITI

$$y(x_A) = y_A \; ; \; y(x_B) = y_B \qquad (2)$$

ES: EQ. DI EULERO-LAGRANGE PER IL FUNZ. E.P.T. DELLA BIELLA

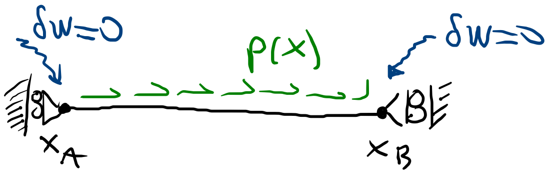
$$F(x; w, w') = \frac{1}{2} EA w'^2 - p w$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) = 0 \; ; \quad -p(x) - \frac{d}{dx}\left(EA w'(x)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -p(x) - \left(EA w'(x)\right)' = 0$$

$$(EA \text{ cost}) \qquad \boxed{EA w''(x) + p(x) = 0}$$

EQUIL. DELLA BIELLA.

IN QUESTA APPLICAZIONE ABBIAMO DATO PER SCONTATO CHE $\delta w(x_A) = \delta w(x_B) = 0$, questo significa che il PROBL. DA RISOLVERE



TORNANDO AL PROBL A IL REQUISITO GENERALE PERCHÉ $\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right]_{x_A}^{x_B} = 0$ RICHIEDE

$\delta y(x_B) = 0 \qquad \delta y(x_A) = 0$ (CONDIZ. DI TIPO GEOMETRICO O ESSENZIALE)

$\frac{\partial F}{\partial y'}(x_B) = 0 \qquad \delta y(x_A) = 0$

$\delta y(x_B) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}(x_A) = 0$ (CONDIZ DI TIPO STATICO O NATURALE)

$\frac{\partial F}{\partial y'}(x_B) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}(x_A) = 0$

COMBINAZ. POSSIBILI AI LIMITI

$\int f g' = [fg] - \int f' g$

ES. STAZIONARIETÀ DI $\Pi(w)$ (PROBL DELLA BIELLA)

$$\Pi(w) = \int_0^\ell \frac{1}{2} EA w'^2 - p w \, dx - [Pw]_0^\ell$$

$$\boxed{\delta\Pi(w) = 0, \forall \delta w} \Rightarrow \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EA\, 2 w' \delta w' - p \delta w\right) dx - [P \delta w]_0^\ell = 0, \forall \delta w$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \underbrace{EA w' \delta w'}_{\text{PER PARTI}} - p \delta w \, dx - [P\delta w]_0^\ell = 0 \Rightarrow [EA w' \delta w]_0^\ell - \int_0^\ell (EA w')' \delta w \, dx - \int_0^\ell p \delta w - [P \delta w]_0^\ell = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \underbrace{\left[(EA w')' + p\right]}_{=0} \delta w \, dx + \left[(P - EA w') \delta w\right]_0^\ell = 0 ; \quad \forall \delta w$$

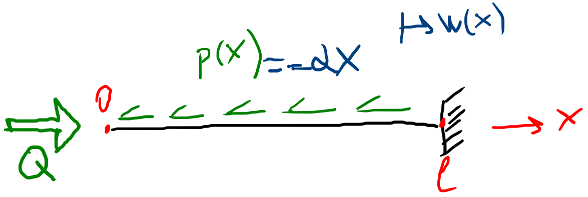
$$(EA w')' + p = 0 \qquad x \in]0, \ell[$$

EQ DIFF. DI CAMPO

4 COMB. POSS. CONDIZ AI LIMITI

$$\begin{cases} \delta w(0) = 0, & \delta w(\ell) = 0 \\ P(0) = EA w'(0), & \delta w(\ell) = 0 \\ \delta w(0) = 0, & P(\ell) = EA w'(\ell) \\ P(0) = EA w'(0), & P(\ell) = EA w'(\ell) \end{cases}$$

ES:



$\alpha \in \mathbb{R}^+$

$EA = \text{cost}$

$$\begin{cases} EA\, w''(x) - \alpha x = 0, & x \in]0, \ell[\qquad \text{EQ. DI CAMPO} \\ -Q = EA\, w'(0) & x = 0 \\ w(\ell) = 0 & x = \ell \end{cases}$$